N. G. Perlova

Об одном условии жёсткости 2-го порядка двусвязной поверхности вращения

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 13 (1972), No. 1, 23--29

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/105392`

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

13,1 (1972)

ОБ ОДНОМ УСЛОВИИ ЖЁСТКОСТИ 2-го ПОРЯДКА ДВУСВЯЗНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Н.Г. ПЕРЛОВА, Ростов-на-Дону

Рассмотрим двусвязную поверхность вращения

$S : \bar{r} = u\bar{e} + r(u)\bar{a}(v)$, где $r = r(u) \in C^{(2)}$,

$\frac{1}{r'(u)} \neq 0$, ограниченную параллелями $u = 0$ и $u = a$.

Справедлива

Теорема. Поверхность S обладает жесткостью 2-го порядка относительно бесконечно малых изгибаний, сохраняющих нормальную кривизну одной из ее граничных параллелей.

Доказательство. Бесконечно малое изгибание 1-го порядка поверхности S , не подчинённое граничным условиям, определяется векторным полем [1]

$$\underset{(1)}{\bar{z}}(u,v) = \underset{(1)}{\alpha}(u,v)\bar{e} + \underset{(1)}{\beta}(u,v)\bar{a}(v) + \underset{(1)}{\gamma}(u,v)\bar{a}'(v)$$

класса $C^{(2)}$, удовлетворяющим системе уравнений

$$(1) \quad \begin{cases} \underset{(1)}{\alpha}_{u} + r'\underset{(1)}{\beta}_{u} = 0 , \\ \underset{(1)}{\beta} + \underset{(1)}{\gamma}_{v} = 0 , \\ \underset{(1)}{\alpha}_{v} + r'(\underset{(1)}{\beta}_{v} - \underset{(1)}{\gamma}) + r\,\underset{(1)}{\gamma}_{u} = 0 . \end{cases}$$

AMS, Primary 53A05 Ref. Ž. 3.934.14

Бесконечно малое изгибание 2-го порядка поверхности S, не подчинённое граничным условиям, определяется векторным полем [1]

$$\underset{(2)}{\bar z}(u,v) = \underset{(2)}{\alpha}(u,v)\,\bar e + \underset{(2)}{\beta}(u,v)\,\bar a(v) + \underset{(2)}{\gamma}(u,v)\,\bar a'(v)$$

класса $C^{(2)}$, удовлетворяющим системе уравнений

$$(2)\quad \begin{cases} \underset{(2)}{\alpha}_u + \varkappa' \underset{(2)}{\beta}_u = -\dfrac{1}{2}\left[\underset{(1)}{\alpha}{}^2_u + \underset{(1)}{\beta}{}^2_u + \underset{(1)}{\gamma}{}^2_u\right], \\[2ex] \underset{(2)}{\beta} + \underset{(2)}{\gamma}_v = -\dfrac{1}{2\varkappa}\left[\underset{(1)}{\alpha}{}^2_v + (\underset{(1)}{\beta}_v - \underset{(1)}{\gamma})^2\right], \\[2ex] \underset{(2)}{\alpha}_v + \varkappa'(\underset{(2)}{\beta}_v - \underset{(2)}{\gamma}) + \varkappa \underset{(2)}{\gamma}_u = \\ \qquad = -\left[\underset{(1)}{\alpha}_u \underset{(1)}{\alpha}_v + \underset{(1)}{\beta}_u(\underset{(1)}{\beta}_v - \underset{(1)}{\gamma})\right]. \end{cases}$$

Первая и вторая вариации нормальной кривизны линии $u = const$ на поверхности определяются формулами [2]

$$\delta k_n = \frac{\delta N}{G}, \qquad \delta^2 k_n = \frac{\delta^2 N}{G},$$

где G и N суть коэффициенты первой и второй основных форм поверхности.

Найдем выражение коэффициента N^* второй основной формы поверхности $\bar\varkappa^* = \bar\varkappa + \varepsilon \underset{(1)}{\bar z} + \varepsilon^2 \underset{(2)}{\bar z}$:

$$(3)\qquad N^* = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\ \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 + \varepsilon \underset{(1)}{\alpha}_u + \varepsilon^2 \underset{(2)}{\alpha}_u & \varkappa' + \varepsilon \underset{(1)}{\beta}_u + \varepsilon^2 \underset{(2)}{\beta}_u & \varepsilon \underset{(1)}{\gamma}_u + \varepsilon^2 \underset{(2)}{\gamma}_u \\ \varepsilon \underset{(1)}{\alpha}_v + \varepsilon^2 \underset{(2)}{\alpha}_v & \varepsilon(\underset{(1)}{\beta}_v - \underset{(1)}{\gamma}) + \varepsilon^2(\underset{(2)}{\beta}_v - \underset{(2)}{\gamma}) & \varkappa + \varepsilon^2(\underset{(2)}{\gamma}_v + \underset{(2)}{\beta}) \\ \varepsilon \underset{(1)}{\alpha}_{vv} + \varepsilon^2 \underset{(2)}{\alpha}_{vv} & -\varkappa + \varepsilon(\underset{(1)}{\beta}_{vv} - \underset{(1)}{\gamma}_v) + \varepsilon^2(\underset{(2)}{\beta}_{vv} - 2\underset{(2)}{\gamma}_v - \underset{(2)}{\beta}) & \varepsilon(\underset{(1)}{\beta}_v - \underset{(1)}{\gamma}) + \varepsilon^2(\underset{(2)}{\gamma}_{vv} + 2\underset{(2)}{\beta}_v - \underset{(2)}{\gamma}) \end{vmatrix}$$

откуда

$$\delta N = \frac{1}{\varkappa\sqrt{1+\varkappa'^2}}\left[\varkappa\left(\varkappa' \underset{(1)}{\alpha}_{vv} + \varkappa \underset{(1)}{\alpha}_{u}\right) - \varkappa\left(\underset{(1)}{\beta}_{vv} - \underset{(1)}{\gamma}_{v}\right)\right].$$

Из (1) следует:

$$\underset{(1)}{\alpha}_{vv} = -\varkappa'\left(\underset{(1)}{\beta}_{vv} - \underset{(1)}{\gamma}_{v}\right) - \varkappa \underset{(1)}{\gamma}_{uv} ,$$

$$\underset{(1)}{\alpha}_{u} = -\varkappa' \underset{(1)}{\beta}_{u} = \varkappa' \underset{(1)}{\gamma}_{uv} .$$

Поэтому

$$\delta N = -\sqrt{1+\varkappa'^2}\left(\underset{(1)}{\beta}_{vv} - \underset{(1)}{\gamma}_{v}\right) = -\sqrt{1+\varkappa'^2}\left(\underset{(1)}{\beta}_{vv} + \underset{(1)}{\beta}\right).$$

Пользуясь периодичностью функций $\underset{(1)}{\alpha}$, $\underset{(1)}{\beta}$, $\underset{(1)}{\gamma}$, представим их в виде рядов Фурье:

$$(4)\quad \begin{cases} \underset{(1)}{\alpha}(u,v) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\left[\underset{(1)}{\varphi}_k(u)e^{ikv} + \underset{(1)}{\bar{\varphi}}_k(u)e^{-ikv}\right], \\ \underset{(1)}{\beta}(u,v) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\left[\underset{(1)}{\psi}_k(u)e^{ikv} + \underset{(1)}{\bar{\psi}}_k(u)e^{-ikv}\right], \\ \underset{(1)}{\gamma}(u,v) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\left[\underset{(1)}{\chi}_k(u)e^{ikv} + \underset{(1)}{\bar{\chi}}_k(u)e^{-ikv}\right], \end{cases}$$

где функции $\underset{(1)}{\varphi}_k$, $\underset{(1)}{\psi}_k$, $\underset{(1)}{\chi}_k$ удовлетворяют системе уравнений [1]

$$(5)\quad \begin{cases} \underset{(1)}{\varphi}'_k + \varkappa' \underset{(1)}{\psi}'_k = 0, \\ ik\underset{(1)}{\chi}_k + \underset{(1)}{\psi}_k = 0, \\ ik\underset{(1)}{\varphi}_k + \varkappa'\left(ik\underset{(1)}{\psi}_k - \underset{(1)}{\chi}_k\right) + \varkappa\underset{(1)}{\chi}'_k = 0 \end{cases}$$

при натуральном $k \geq 2$; исключение неизвестных функций $\underset{(1)}{\varphi}_k$ и $\underset{(1)}{\psi}_k$ из (4) приводит к уравнению

$$(6)\qquad \varkappa\underset{(1)}{\chi}''_k + (k^2-1)\varkappa''\underset{(1)}{\chi}_k = 0 \qquad (k \geq 2)$$

для одной неизвестной функции $\underset{(1)}{\chi}_k$, с помощью которой $\underset{(1)}{\varphi}_k$ и $\underset{(1)}{\psi}_k$ находятся без квадратур.

В силу (4_2) условие $\delta k_n /_{u=const} = 0$ принимает вид

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (k^2-1)[\underset{(1)}{\psi}_k(u)e^{ikv} + \underset{(1)}{\bar{\psi}}_k(u)e^{-ikv}]/_{u=const} = 0,$$

откуда в силу линейной независимости функций e^{ikv} получаем:

$$\underset{(1)}{\psi}_k(u)/_{u=const} = 0 \qquad (k \geq 2)$$

(при $k=0$ $\underset{(1)}{\psi}_k(u) \equiv 0$ [1]) или, что то же,

$$\underset{(1)}{\chi}_k(u)/_{u=const} = 0 \qquad (k \geq 2) \quad .$$

Предположим, что поверхность S допускает бесконечно малое изгибание 1-го порядка с сохранением нормальной кривизны обеих граничных параллелей. Тогда существует решение уравнения (6) при одном или нескольких $k \geq 2$ удовлетворяющее условиям

$$\underset{(1)}{\chi}_k(0) = \underset{(1)}{\chi}_k(a) = 0 \quad . \tag{7}$$

Заметим, что поверхность S в этом случае невыпуклая: если $r'' < 0$, то решение уравнения

$$\underset{(1)}{\chi}''_k + (k^2-1)\frac{r''}{r}\underset{(1)}{\chi}_k = 0$$

не может иметь более одного нуля в интервале $[0, a]$. Если же $r'' > 0$, то есть поверхность S строго невыпуклая, то на ней существует счетное множество параллелей $u = a_k$ таких, что выполняются условия

$$\underset{(1)}{\chi}{}_{k}(0) = \underset{(1)}{\chi}{}_{k}(a_{k}) = 0 \quad .$$

Действительно, при $\varkappa'' > 0$ расстояние между двумя последовательными нулями решения уравнения (6) меньше $\dfrac{\pi}{\sqrt{\min(k^2-1)\frac{\varkappa''}{\varkappa}}}$ [3] и, следовательно, при всех k, больших некоторого k_0, оно меньше a.

Рассмотрим продолжение 2-го порядка бесконечно малого изгибания $\underset{(1)}{\bar{x}} = \sum\limits_{k} \underset{(1)}{x}{}_{k} + \underset{(1)}{\bar{x}}{}_{1} + \underset{(1)}{\bar{x}}{}_{0}$, где суммирование ведется по тем значениям $k \ge 2$, для которых выполняется условие (7_1).

Из (3), учитывая (7_1), найдем:

$$\delta^2 N|_{u=0} = \frac{1}{\varkappa\sqrt{1+\varkappa'^2}}\Big[\varkappa(\varkappa'\underset{(2)}{\alpha}{}_{vv} + \varkappa\underset{(2)}{\alpha}{}_{u}) - \varkappa(\underset{(2)}{\beta}{}_{vv} - \underset{(2)}{\gamma}{}_{v}) +$$

$$+ 2\varkappa(\underset{(2)}{\gamma}{}_{v} + \underset{(2)}{\beta}) + \varkappa\underset{(1)}{\alpha}{}_{vv}\underset{(1)}{\beta}{}_{u} - \varkappa\underset{(1)}{\alpha}{}_{v}\underset{(1)}{\gamma}{}_{u} +$$

$$+ \varkappa'\underset{(1)}{\alpha}{}_{v}\underset{(1)}{\gamma}{}_{0} + \underset{(1)}{\gamma}{}_{0}^{2}\Big]\Big|_{u=0} \quad .$$

Так как из (2) следует:

$$\underset{(2)}{\alpha}{}_{vv} = -\varkappa'(\underset{(2)}{\beta}{}_{vv} - \underset{(2)}{\gamma}{}_{v}) - \varkappa\underset{(2)}{\gamma}{}_{uv} - \big[\underset{(1)}{\alpha}{}_{uv}\underset{(1)}{\alpha}{}_{v} + \underset{(1)}{\alpha}{}_{u}\underset{(1)}{\alpha}{}_{vv} +$$

$$+ \underset{(1)}{\beta}{}_{uv}(\underset{(1)}{\beta}{}_{v} - \underset{(1)}{\gamma}) + \underset{(1)}{\beta}{}_{u}(\underset{(1)}{\beta}{}_{vv} - \underset{(1)}{\gamma}{}_{v})\big] \quad ,$$

$$\underset{(2)}{\alpha}{}_{u} = \varkappa'\underset{(2)}{\gamma}{}_{uv} - \frac{1}{2}\big[\underset{(1)}{\alpha}{}_{u}^{2} + \underset{(1)}{\beta}{}_{u}^{2} + \underset{(1)}{\gamma}{}_{u}^{2}\big] + \frac{\varkappa'}{2\varkappa^2}\Big\{\varkappa\big[2\underset{(1)}{\alpha}{}_{v}\underset{(1)}{\alpha}{}_{uv} +$$

$$+ 2(\underset{(1)}{\beta}{}_{v} - \underset{(1)}{\gamma})(\underset{(1)}{\beta}{}_{uv} - \underset{(1)}{\gamma}{}_{u})\big] - \varkappa'\big[\underset{(1)}{\alpha}{}_{v}^{2} + (\underset{(1)}{\beta}{}_{v} - \underset{(1)}{\gamma})^2\big]\Big\} \quad ,$$

$$2(\underset{(2)}{\beta} + \underset{(2)}{\gamma}{}_{v}) = -\frac{1}{\varkappa}\big[\underset{(1)}{\alpha}{}_{v}^{2} + (\underset{(1)}{\beta}{}_{v} - \underset{(1)}{\gamma})^2\big] \quad ,$$

то

$$\delta^2 N_{/u=0} = -\sqrt{1+\kappa'^2}\Big\{ \underset{(2)}{\beta}_{vv} + \underset{(2)}{\beta} - \frac{\kappa}{2}\Big[\sum_k \underset{(1)}{\gamma}_{kuv} + \underset{(1)}{\gamma}_{1uv} \Big]^2 +$$

$$+ \kappa \Big[\sum_k \underset{(1)}{\gamma}_{ku} + \underset{(1)}{\gamma}_{1u} \Big]^2 + \frac{1}{2} C_0^2 \kappa \Big\}_{/u=0} ,$$

где $C_0 \kappa = \underset{(1)}{\gamma}_0$ [1] .

Предположим, что $\delta^2 k_{n/u=0} = 0$. Тогда

$$\delta^2 N_{/u=0} = 0 . \tag{8}$$

В силу линейной независимости функций e^{ilv} должны равняться нулю коэффициенты при них в левой части равенства (8), в том числе коэффициент при e^0 :

$$-\sqrt{1+\kappa'^2}\Big\{ -\frac{1}{\kappa}\Big[\sum_k |\underset{(1)}{\varphi}_k|^2 k^2 + |\underset{(1)}{\varphi}_1|^2 + \frac{1}{2} C_0^2 \kappa^2 \Big] -$$

$$- \kappa \Big[\sum_k |\underset{(1)}{\chi}'_k|^2 k^2 + |\underset{(1)}{\chi}'_1|^2 \Big] + 2\kappa \Big[\sum_k |\underset{(1)}{\chi}'_k|^2 + |\underset{(1)}{\chi}'_1|^2 \Big] +$$

$$+ \frac{1}{2} C_0^2 \kappa \Big\} = \kappa \sqrt{1+\kappa'^2} \sum_k (k^2 - 1) |\underset{(1)}{\chi}'_k|^2 = 0 .$$

Следовательно, в предположении нежесткости 2-го порядка поверхности S при условии сохранения нормальной кривизны одной только граничной параллели $u = 0$ получаем:

$$\underset{(1)}{\chi}'_k(0) = 0 \qquad (k \geq 2) .$$

Так как уравнение

$$\underset{(1)}{\chi}''_k + (k^2 - 1)\frac{\kappa''}{\kappa} \underset{(1)}{\chi}_k = 0$$

при условиях $\underset{(1)}{\chi}_k(0) = 0$, $\underset{(1)}{\chi}'_k(0) = 0$ имеет только нулевое решение в интервале $[0, a]$, то

$$\underset{(1)}{\chi}_k(u) \equiv 0 \qquad (k \geq 2) ,$$

а потому в силу (5)

$$\underset{(1)}{\varphi}_k(u) \equiv 0 , \quad \underset{(1)}{\psi}_k(u) \equiv 0 \qquad (k \geq 2) .$$

Это означает, что поле $\underset{(1)}{\bar{z}}(u,v)$ тривиально на всей поверхности S, что противоречит предложению о нежесткости 2-го порядка. Теорема доказана.

Литература

[1] S. COHN-VOSSEN, Unstarre geschlossene Flächen, Math. Ann. 102(1929), 10-29.

[2] И.Н. ВЕКУА, Обобщенные аналитические функции, М., Физматгиз, 1959.

[3] В.В. СТЕПАНОВ, Курс дифференциальных уравнений, М., Физматгиз, 1958, стр. 254-255.

Кафедра геометрии
Ростовского гос. университета
Ростов-на-Дону 7, СССР

(Oblatum 11.6.1971)