Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Osvald Demuth

Об одном условии дифференцируемости конструктивных функций ограниченной вариации

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 12 (1971), No. 4, 687--711

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105378

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

12,4 (1971)

ОБ ОДНОМ УСЛОВИИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ КОНСТРУКТИВНЫХ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

О. ДЕМУТ (O. DEMUTH), Прага

В классической математике всякая функция ограниченной вариации на сегменте $\mathcal{J}$ почти всюду на $\mathcal{J}$ дифференцируема и ее производная является интегрируемой по Лебегу [1]. В конструктивной математике аналогичное утверждение неверно. В [7] построена возрастающая на $0 \Delta 1$ функция, не являющаяся дифференцируемой ни в одной точке сегмента $0 \Delta 1$. В настоящей работе показано, что свойство α ([9]) является необходимым и достаточным для того, чтобы конструктивная функция ограниченной вариации на $0 \Delta 1$ была в определенном ниже смысле дифференцируемой почти всюду на $0 \Delta 1$.

В следующем мы пользуемся определениями и обозначениями из [4 - 5],[8 - 9]. Напомним, что для любой функции f - $\alpha(f) \rightleftharpoons \forall a \, \exists u \; Var(u, f - h_a, 0 \Delta 1)$, где $\forall a x \, (h_a(x) = = a . max(min(x,1),0))$.

Определения. Пусть f функция, G ступенчатый остов, $\{F_m\}_m$ последовательность ступенчатых остовов, $\mathcal{Y}$ $\mathcal{S}$-множество, p и b НЧ, а u и v КДЧ, $0 \leq v$.

1) Д$(f, \{F_m\}_m, p, \mathcal{Y}, b)$ обозначает: мера $\mathcal{Y}$ меньше чем $\frac{1}{3^p}$ и выполнено

AMS, Primary 02E99 Ref. Ž. 2.644
Secondary 26A24,26A45

$$\forall x (x \in 0 \triangle 1 \,\&\, \neg (x \in \mathcal{G}) \supset \exists z (P(z, \{F_m\}_m, x) \,\&$$

$$\& \forall y (|x - y| < \frac{1}{s} \supset$$

$$\supset |f(y) - f(x) - z.(y - x)| \leq \frac{1}{3^p} . |y - x|))) .$$

2) $Д(f, \{F_m\}_m)$ обозначает: существуют последовательности S-множеств $\{\mathcal{G}^k\}_k$ и НЧ $\{s_k\}_k$ такие, что $\forall k\, Д(f, \{F_m\}_m, k, \mathcal{G}^k, s_k)$.

3) $G \tau u \rightleftharpoons G \tau 0 \gamma 1 \sigma u$, $\{F_m\}_m - u \rightleftharpoons \{F_m \tau u\}_m$ и $\lambda(u, v) \rightleftharpoons max(min(u, v), -v)$.

<u>Замечание 1</u>. Пусть для $i = 1, 2$ - f_i функция, $\{F_m^i\}_m$ последовательность ступенчатых остовов, $\mathcal{G}^i$ S-множество, λ_i и t НЧ, $\{\mathcal{G}^k\}_k$ последовательность S-множеств, а $\{s_k\}_k$ последовательность НЧ.

1) Пусть $\forall k\; Д(f_1, \{F_m^1\}_m, k, \mathcal{G}^k, s_k)$. Согласно замечанию 1 из [6] существует S-множество $\mathcal{G}$ меры меньшей чем $\frac{1}{3^{t-1}}$, являющееся объединением S-множеств $\mathcal{G}^k$ ($t \leq k$). Выполнено

$$\forall x (x \in 0 \triangle 1 \,\&\, \neg (x \in \mathcal{G}) \supset \exists z (P(z, \{F_m^1\}_m, x) \,\&$$

$$\& \forall k y (t \leq k \,\&\, |y - x| < \frac{1}{s_k} \supset |f_1(y) - f_1(x) -$$

$$- z . (y - x)| \leq \frac{1}{3^k} . |y - x|))) .$$

Таким образом, f_1 является равномерно дифференцируемой на множестве $\wedge x (x \in 0 \triangle 1 \,\&\, \neg (x \in \mathcal{G}))$.

2) Если $Д(f_1, \{F_m^1\}_m)$, то согласно 1) для почти всех КДЧ x из $0 \triangle 1$ верно $\exists z (P(z, \{F_m^1\}_m, x) \,\& \,\&\, D(z, f_1, x))$.

3) По определению, функция f_1 сингулярна тогда и только тогда, когда $Д(f_1, \{0 \gamma 1 \delta 0\}_m)$ и f_1 функция ограниченной вариации на $0 \Delta 1$ ([10]).

4) Если для $i = 1, 2$ верно $Д(f_i, \{F_m^i\}_m, t+1, \mathcal{Y}^i, \lambda_i)$, то существует S-множество $\mathcal{Y}$ меры меньшей чем $\frac{1}{3^t}$, являющееся объединением $\mathcal{Y}^1$ и $\mathcal{Y}^2$ и выполнено

$$Д(f_1 + f_2, \{F_m^1\}_m + \{F_m^2\}_m, t, \mathcal{Y}, max(\lambda_1, \lambda_2)).$$

5) Если для $i = 1, 2$ верно $Д(f_i, \{F_m^i\}_m)$, то

$$Д(-f_1, \{0 \gamma 1 \delta 0\}_m - \{F_m^1\}_m) \& Д(f_1 + f_2, \{F_m^1\}_m + \{F_m^2\}_m).$$

<u>Теорема 1</u>. Пусть f функция ограниченной вариации на $0 \Delta 1$. Тогда выполнено $\alpha(f)$ в том и только том случае, если существует $\{F_m\}_m \in S$ такое, что $Д(f, \{F_m\}_m)$.

<u>Теорема 2</u>. Пусть $\{F_m\}_m \in L_1$. Тогда существуют последовательность S-множеств $\{\mathcal{Y}^p\}_p$ и возрастающая последовательность НЧ $\{s_k\}_k$ такие, что для всякого НЧ p мера $\mathcal{Y}^p$ меньше чем $\frac{1}{3^p}$, $\mathcal{Y}^{p+1} \subseteq \mathcal{Y}^p$ и выполнено

$$\forall x (x \in 0 \Delta 1 \& \neg (x \in \mathcal{Y}^p) \supset \exists u (P(u, \{F_m\}_m, x) \&$$

$$\& \forall k y (p \leq k \& |y - x| \leq \frac{1}{s_k} \supset$$

$$\supset \int_{min(x,y)}^{max(x,y)} |\{F_m\}_m - u| \leq \frac{1}{3^k} \cdot |y - x|))).$$

<u>Доказательство</u>. Пусть

$$\forall m (F_m \equiv a_0^m \gamma a_1^m \ldots \gamma a_{m_m}^m \delta \psi_1^m \gamma \psi_2^m \ldots \gamma \psi_{m_m}^m).$$

Согласно [5], стр.271-2, можно построить последовательность 1-полигональных остовов ([4]) $\{^{(1)}G_m\}_m$ и последовательность S-множеств $\{\mathcal{Y}^{0,p}\}_p$ такие, что для всякого НЧ p мера $\mathcal{Y}^{0,p}$ меньше чем $\frac{1}{3^p}$, $\mathcal{Y}^{0,p+1} \subseteq \mathcal{Y}^{0,p}$

и выполнено

$$\forall x\,(x \in 0\Delta 1\ \&\ \neg(x \in \mathcal{Y}^{0,p}) \supset \forall \ell\,(!\,\tilde{\mathcal{F}}_{F_\ell}(x)\ \&$$
$$\&\ (p \le \ell \supset \tilde{\mathcal{F}}_{F_\ell}(x) = \tilde{\mathcal{R}}_{\{1\}G_\ell}(x))))\ \&$$
$$\&\ \forall z k\,(1 \le k \le m_p\ \&\ z \int_{a^p_{k-1}\Delta a^p_k} |\tilde{\mathcal{F}}_{F_p} - \tilde{\mathcal{R}}_{\{1\}G_p}| \supset$$
$$\supset z < \frac{1}{m_p \cdot 3^{p+1}})\ .$$

Тогда ввиду $\{F_m\}_m \in L_1$ верно

$$(1)\qquad \forall p z\,(z \int_{0\Delta 1} |\tilde{\mathcal{R}}_{\{1\}G_p} - \tilde{\mathcal{R}}_{\{1\}G_{p+1}}| \supset z < \frac{1}{2^{p-1}})\ .$$

Пусть Φ покрытие, ${}^{\{1\}}G_0$ 1-полигональный остов и для всякого НЧ k — φ_k функция такие, что $\tilde{\mathcal{R}}_{\{1\}G_0} = 0$ и

$$\forall y\,(\varphi_k(y) = \frac{2}{|\Phi_k|^2}\cdot(|y - \text{Эл}(\Phi_k)| + |y - \text{Эm}(\Phi_k)| -$$
$$- |2y - \text{Эл}(\Phi_k) - \text{Эm}(\Phi_k)|))\ .$$

Мы построим 2-функцию ${}^{\{2\}}\psi$ и для любого НЧ q 2-функцию ${}^{\{2\}}\psi_q$ такие, что для любой 2-точки $x \,\square\, y$ выполнено

$${}^{\{2\}}\psi(x \,\square\, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{\mathcal{R}}_{\{1\}G_k}(x) - \tilde{\mathcal{R}}_{\{1\}G_{k-1}}(x)) \cdot \varphi_k(y) \quad \text{и}$$
$${}^{\{2\}}\psi_q(x \,\square\, y) = \sum_{k=1}^{q} (\tilde{\mathcal{R}}_{\{1\}G_k}(x) - \tilde{\mathcal{R}}_{\{1\}G_{k-1}}(x)) \cdot \varphi_k(y)\ .$$

Тогда $\forall q\,(L_2({}^{\{2\}}\psi_q)\ \&\ \forall x\,(0 \le x \le 1 \supset L_1(\widetilde{({}^{\{2\}}\psi_q)_{x\square}})\ \&$ $\tilde{\mathcal{R}}_{\{1\}G_q}(x) \int_{0\Delta 1} \widetilde{({}^{\{2\}}\psi_q)_{x\square}}))$ и ввиду (1) и 7) из [4] выполнено

$$\forall q z\,(z \int_{0\Delta 1 \square 0\Delta 1} |{}^{\{2\}}\psi_q - {}^{\{2\}}\psi_{q+1}| \supset z < \frac{1}{2^{q-1}})\ .$$

Согласно 12) из [4] верно

$$L_2({}^{\{2\}}\psi)\ \&\ \forall q z\,(z \int_{0\Delta 1 \square 0\Delta 1} |{}^{\{2\}}\psi - {}^{\{2\}}\psi_q| \supset z \le \frac{1}{2^{q-2}})\ .$$

Заметим, что для любых НЧ p и КДЧ x и u ,

$x \in 0 \Delta 1 \;\&\; \neg (x \in \mathcal{Y}^{0,p}) \;\&\; L_1 (\widehat{{}^{\{2\}}\psi_{x\square}}) \;\&\; \mu \int_{0\Delta 1} \widehat{{}^{\{2\}}\psi_{x\square}}$,

имеет место $\widetilde{\mathcal{R}}_{\{1\}\Theta_k} (x) \xrightarrow[k \to \infty]{} \mu$ и, следовательно, $P(\mu, \{F_n\}_n, x)$.

Согласно теореме 3.1 из монографии Интегралы Лебега и Римана и понятие измеримости функций в конструктивной математике, которая готовится к печати, существуют возрастающая последовательность НЧ $\{m_k\}_k$ и последовательность S - множеств $\{\mathcal{G}^p\}_p$ такие, что для всякого НЧ p мера $\mathcal{G}^p$ меньше чем $\frac{1}{3^{p-1}}$, $\mathcal{G}^{p+1} \subseteq \mathcal{G}^p$ и выполнено

$$\forall x \, (x \in 0 \Delta 1 \;\&\; \neg (x \in \mathcal{G}^p) \supset L_1 (\widehat{{}^{\{2\}}\psi_{x\square}}) \;\&$$

$$\& \; \forall k v w z \, (p < k \;\&\; v \leq x \leq w \;\&\; 0 < w - v \leq \frac{1}{m_k} \;\&$$

$$\& \; z \int_{v \Delta w \square 0 \Delta 1} |{}^{\{2\}}\psi - \widehat{{}^{\{2\}}\psi_{x\square}}| \supset z \leq \frac{1}{3^{k+1}} \cdot (w - v))) \; .$$

Для всякого НЧ p мы определим $s_p \rightleftharpoons m_{p+3}$ и обозначим посредством $\mathcal{Y}^p$ объединение S -множеств $\mathcal{Y}^{0,p+2}$ и $\mathcal{G}^{p+2}$.

Пусть p НЧ. Тогда мера $\mathcal{Y}^p$ меньше чем $\frac{1}{3^p}$ и $\mathcal{Y}^{p+1} \subseteq \mathcal{Y}^p$. Пусть l НЧ, x , v и w КДЧ, $x \in 0 \Delta 1 \;\&$ $\& \; \neg (x \in \mathcal{Y}^p) \;\&\; p \leq l \;\&\; v \leq x \leq w \;\&\; 0 < w - v \leq \frac{1}{s_l}$.

Тогда $L_1 (\widehat{{}^{\{2\}}\psi_{x\square}})$ и существует КДЧ μ такое, что $P(\mu, \{F_n\}_n, x) \;\&\; \mu \int_{0\Delta 1} \widehat{{}^{\{2\}}\psi_{x\square}}$. Пусть q НЧ, z, ξ , η_1 и η_2 КДЧ и $\{\varkappa_i\}_{i=1}^{m_q}$ система КДЧ, для которых выполнено

$$\frac{1}{2^{q-2}} < \frac{1}{3^{l+3}} \cdot (w - v) \;\&\; (z \int_{v \Delta w \square 0 \Delta 1} |{}^{\{2\}}\psi - \widehat{{}^{\{2\}}\psi_{x\square}}|) \;\&$$

$$\& \; (\xi \int_{0 \Delta 1 \square 0 \Delta 1} |{}^{\{2\}}\psi - {}^{\{2\}}\psi_q|) \;\&$$

$\& (\eta_1 \int_{v \Delta w, \square 0 \Delta 1} |{}^{\{2\}}\psi_q - \widehat{{}^{\{2\}}\psi_{x\square}}|) \& (\eta_2 \int_{v \Delta w} | \mathcal{R}_{\{1\}G_q} - u |) \&$

$\& \forall i (1 \le i \le m_q \supset \varkappa_i \int_{a^q_{i-1} \Delta a^q_i} | \mathcal{F}_{F_q} - \mathcal{R}_{\{1\}G_q} |)$.

Тогда мы имеем $z \le \frac{1}{3^{l+1}} \cdot (w-v)$, $\xi < \frac{1}{3^{l+2}} \cdot (w-v)$, $\eta_2 \le \eta_1 \le \xi + z$ (7) из [4]), $\sum_{i=1}^{m_q} \varkappa_i < \frac{1}{3^{l+3}} \cdot (w-v)$, $\int_0^1 |\{F_m\}_m - F_q| \le$

$\le \frac{1}{2^{q-1}} < \frac{1}{3^{l+3}} \cdot (w-v)$ (лемма 1 из [5]) и, следовательно,

$$\int_v^w |\{F_m\}_m - u| \le \int_0^1 |\{F_m\}_m - F_q| + \sum_{i=1}^{m_q} \varkappa_i + \xi + z < \frac{1}{3^l} \cdot (w-v) .$$

На основании доказанного и теоремы 2 из [5] мы получаем следующее утверждение.

Следствие. Пусть g функция, а $\{G_m\}_m \in L_1$ такие, что $\forall x y (0 \le x < y \le 1 \supset g(y) - g(x) = \int_x^y \{G_m\}_m)$. Тогда Д$(g, \{G_m\}_m)$.

Для всякой абсолютно непрерывной на $0 \Delta 1$ функции g существует $\{G_m\}_m \in L_1$ такое, что $\forall x y (0 \le x < y \le 1 \supset$ $\supset g(y) - g(x) = \int_x^y \{G_m\}_m)$ и, следовательно, Д$(g, \{G_m\}_m)$.

Замечание 2. Согласно теореме 2 для любого $\{F_m\}_m \in L_1$ почти все точки из $0 \Delta 1$ являются точками Лебега (ср.[1], стр.275).

Замечание 3. 1) Пусть $\{G_m\}_m \in L_1$, $\{H_m\}_m \in S$, v КДЧ, а q НЧ, $0 \le v \le q$. Тогда $\{\lambda_0(G_m, v)\}_m \in L_1 \&$ $\& \{\lambda_0(H_{m+q+1}, v)\}_m \in L_1$.

2) Пусть g абсолютно непрерывная на $0 \Delta 1$ функция. Тогда согласно теореме из [9] и [5] $\alpha(g) \& a(g)$ и существует $\{G_m\}_m \in L_1$ такое, что

$\forall x y (0 \le x < y \le 1 \supset g(y) - g(x) = \int_x^y \{G_n\}_n)$ и, следовательно,

$$\forall u x (0 \le x \le 1 \supset V\langle g, u\rangle(x) = \int_0^x |\{G_n\}_n - u| \,\&$$

$$\& \, V^+\langle g, u\rangle(x) = \int_0^x (\{G_n\}_n - u)^+ \,\&\, V^-\langle g, u\rangle(x) =$$

$$= \int_0^x (\{G_n\}_n - u)^- \,\&\, (0 \le u \supset g_{\{u\}}(x) = g(0) +$$

$$+ \int_0^x \{\lambda_0(G_n, u)\}_n) .$$

Лемма 1. Пусть f функция ограниченной вариации на $0 \Delta 1$, а $\{F_n\}_n \in S$ такие, что $Д(f, \{F_n\}_n)$. Тогда $\alpha(f)$.

Доказательство. Пусть w КДЧ, $\{\mathcal{G}^{1,p}\}_p$ последовательность S-множеств и $\{s_{1,p}\}_p$ последовательность НЧ такие, что

$$Var(w, f, 0 \Delta 1) \,\&\, \forall p \, Д(f, \{F_n\}_n, p, \mathcal{G}^{1,p}, s_{1,p}) .$$

Пусть a РЧ. Согласно замечанию 3, теореме 1 из [5] и следствию теоремы 2 $\{\lambda_0(F_{n+[|a|]+2}, |a|)\}_n \in L_1$ и существуют абсолютно непрерывная функция g и последовательности S-множеств $\{\mathcal{G}^{2,p}\}_p$ и НЧ $\{s_{2,p}\}_p$, для которых выполнено $\alpha(g) \,\&\, a(g) \,\&\, \forall x y (0 \le x < y \le 1 \supset$

$$\supset g(y) - g(x) = \int_x^y \{\lambda_0(F_{n+[|a|]+2}, |a|)\}_n) \,\&$$

$$\& \, \forall p \, Д(g, \{\lambda_0(F_{n+[|a|]+2}, |a|)\}_n, p, \mathcal{G}^{2,p}, s_{2,p}) .$$

Мы докажем

$$(2) \; Var(w - V\langle g, 0\rangle(0 \Delta 1) + V\langle g, a\rangle(0 \Delta 1), f - h_a, 0 \Delta 1) .$$

Пусть $\{c_i\}_{i=0}^{r}$ В-система РЧ, а m НЧ, $|a| < m$. Ввиду $a(g)$ можно построить НЧ t такое, что $6m \le t$ и для любой системы неперекрывающихся рациональных сегментов

$\{d_i \Delta e_i\}_{i=1}^{\varkappa}$ верно

$$(\sum_{i=1}^{\varkappa} |d_i \Delta e_i| \le \frac{1}{t} \supset \sum_{i=1}^{\varkappa} |g(e_i) - g(d_i)| < \frac{1}{12m}).$$

Существуют S -множество $\mathcal{G}$ меры меньшей чем $\frac{2}{3^{t+1}}$, являющееся объединением $\mathcal{G}^{1,t+1}$ и $\mathcal{G}^{2,t+1}$, и НЧ q такое, что

$$s_{1,t+1} + s_{2,t+1} \le q \,\&\, \forall i\,(0 \le i \le \tau \supset \exists j(\frac{j}{q} = c_i))\,\&$$

$$\& \, V\langle g, 0\rangle (0 \Delta 1) - \frac{1}{6m} < W(g, \{\frac{j}{q}\}_{j=0}^{q})\,\&$$

$$\& \, V\langle g, a\rangle (0 \Delta 1) - \frac{1}{12m} < W(g - h_a, \{\frac{j}{q}\}_{j=0}^{q})\,\&$$

$$\& \, w - \frac{1}{12m} < W(f, \{\frac{j}{q}\}_{j=0}^{q}).$$

Согласно теореме 1.3 из [2] и замечанию 2 из [10] осуществими дизъюнктные возрастающие системы НЧ $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ и системы КДЧ $\{\xi_j\}_{j \in \mathcal{E}_1}$ и $\{\eta_j\}_{j \in \mathcal{E}_1}$ для которых выполнено

$$\forall j((1 \le j \le q \equiv (j \in \mathcal{E}_1 \vee j \in \mathcal{E}_2))\,\&$$

$$\&\,(j \in \mathcal{E}_1 \supset \nu\langle \mathcal{G}\rangle(\frac{j-1}{q} \Delta \frac{j}{q}) < |\frac{j-1}{q} \Delta \frac{j}{q}|\,\&\,\frac{j-1}{q} < \xi_j <$$

$$< \frac{j}{q} \,\&\, \neg(\xi_j \in \mathcal{G})\,\&\,P(\eta_j, \{F_n\}_n, \xi_j))\,\&\,(j \in \mathcal{E}_2 \supset$$

$$\supset \frac{2}{3} \cdot |\frac{j-1}{q} \Delta \frac{j}{q}| < \nu\langle \mathcal{G}\rangle(\frac{j-1}{q} \Delta \frac{j}{q}))).$$

Тогда $\sum_{j \in \mathcal{E}_2} |\frac{j-1}{q} \Delta \frac{j}{q}| \le \frac{3}{2} \cdot \sum_{j \in \mathcal{E}_2} \nu\langle \mathcal{G}\rangle(\frac{j-1}{q} \Delta \frac{j}{q}) \le \frac{3}{2} \cdot$ $\cdot \nu\langle \mathcal{G}\rangle(0 \Delta 1) < \frac{1}{3^t} \le \frac{1}{3^{6m}}$ и, следовательно, $\sum_{j \in \mathcal{E}_2} |g(\frac{j}{q}) - g(\frac{j-1}{q})| < \frac{1}{12m}$. Для всякого НЧ j, $j \in \mathcal{E}_1$, выполнено

$$|f(\tfrac{j}{q})-f(\tfrac{j-1}{q})-a.(\tfrac{j}{q}-\tfrac{j-1}{q})-(\eta_j-a).\tfrac{1}{q}|=$$
$$=|f(\tfrac{j}{q})-f(\tfrac{j-1}{q})-\eta_j.\tfrac{1}{q}|\le\frac{1}{3^{t+1}}.\frac{1}{q}<\frac{1}{6m}.\frac{1}{q}\ ,$$
$$|g(\tfrac{j}{q})-g(\tfrac{j-1}{q})-a.(\tfrac{j}{q}-\tfrac{j-1}{q})-(\lambda(\eta_j,|a|)-a).\tfrac{1}{q}|=$$
$$=|g(\tfrac{j}{q})-g(\tfrac{j-1}{q})-\lambda(\eta_j,|a|).\tfrac{1}{q}|<\frac{1}{6m}.\frac{1}{q}\ ,$$
$$|\eta_j-a|=|\eta_j|-|\lambda(\eta_j,|a|)|+|\lambda(\eta_j,|a|)-a|.$$

Таким образом, обозначив для $i=1,2$

$$\xi_i=\sum_{j\in\mathcal{C}_i}|f(\tfrac{j}{q})-f(\tfrac{j-1}{q})|-\sum_{j\in\mathcal{C}_i}|g(\tfrac{j}{q})-g(\tfrac{j-1}{q})|+$$
$$+\sum_{j\in\mathcal{C}_i}|g(\tfrac{j}{q})-g(\tfrac{j-1}{q})-a.(\tfrac{j}{q}-\tfrac{j-1}{q})|\ ,$$

мы получаем

$$\sum_{j\in\mathcal{C}_2}|f(\tfrac{j}{q})-f(\tfrac{j-1}{q})-a.(\tfrac{j}{q}-\tfrac{j-1}{q})|\le\xi_2+2.\sum_{j\in\mathcal{C}_2}|g(\tfrac{j}{q})-$$
$$-g(\tfrac{j-1}{q})|<\xi_2+\frac{1}{6m}\ ,$$
$$\sum_{j\in\mathcal{C}_2}|f(\tfrac{j}{q})-f(\tfrac{j-1}{q})-a.(\tfrac{j}{q}-\tfrac{j-1}{q})|\ge\xi_2-2.|a|.\sum_{j\in\mathcal{C}_2}\frac{1}{q}>$$
$$>\xi_2-\frac{2m}{3^{6m}}>\xi_2-\frac{1}{6m}\ ,$$
$$\sum_{j\in\mathcal{C}_1}|f(\tfrac{j}{q})-f(\tfrac{j-1}{q})-a.(\tfrac{j}{q}-\tfrac{j-1}{q})|<\frac{1}{6m}+\sum_{j\in\mathcal{C}_1}|\eta_j-a|.$$
$$.\frac{1}{q}=\frac{1}{6m}+\sum_{j\in\mathcal{C}_1}|\eta_j|.\frac{1}{q}-\sum_{j\in\mathcal{C}_1}|\lambda(\eta_j,|a|)|.\frac{1}{q}+$$
$$+\sum_{j\in\mathcal{C}_1}|\lambda(\eta_j,|a|)-a|.\frac{1}{q}\le\frac{1}{6m}+\xi_1+\sum_{j\in\mathcal{C}_1}|f(\tfrac{j}{q})-$$
$$-f(\tfrac{j-1}{q})-\eta_j.(\tfrac{j}{q}-\tfrac{j-1}{q})|+\sum_{j\in\mathcal{C}_1}|g(\tfrac{j}{q})-g(\tfrac{j-1}{q})-$$
$$-\lambda(\eta_j,|a|).(\tfrac{j}{q}-\tfrac{j-1}{q})|+\sum_{j\in\mathcal{C}_1}|g(\tfrac{j}{q})-g(\tfrac{j-1}{q})-$$
$$-a.(\tfrac{j}{q}-\tfrac{j-1}{q})-(\lambda(\eta_j,|a|)-a).$$
$$.(\tfrac{j}{q}-\tfrac{j-1}{q})|<\xi_1+\frac{4}{6m}$$

и, аналогично,

$$\sum_{j \in \mathcal{Y}_1} |f(\tfrac{j}{q}) - f(\tfrac{j-1}{q}) - a.(\tfrac{j}{q} - \tfrac{j-1}{q})| > \sum_{j \in \mathcal{Y}_1} |\eta_j - a|.\tfrac{1}{q} - \tfrac{1}{6m} > \xi_1 - \tfrac{4}{6m}.$$

Следовательно, верно

$$\begin{aligned} W(f-h_a, \{c_i\}_{i=0}^{\tau}) &\leq W(f-h_a, \{\tfrac{j}{q}\}_{j=0}^{q}) < \\ &< W(f, \{\tfrac{j}{q}\}_{j=0}^{q}) - W(g, \{\tfrac{j}{q}\}_{j=0}^{q}) + W(g-h_a, \{\tfrac{j}{q}\}_{j=0}^{q}) + \\ &+ \frac{5}{6m} < w - V\langle g, 0\rangle (0 \Delta 1) + \\ &+ V\langle g, a\rangle (0\Delta 1) + \frac{1}{m} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} W(f-h_a, \{\tfrac{j}{q}\}_{j=0}^{q}) &> W(f, \{\tfrac{j}{q}\}_{j=0}^{q}) - W(g, \{\tfrac{j}{q}\}_{j=0}^{q}) + \\ &+ W(g-h_a, \{\tfrac{j}{q}\}_{j=0}^{q}) - \frac{5}{6m} > w - \\ &- V\langle g, 0\rangle (0\Delta 1) + V\langle g, a\rangle (0\Delta 1) - \frac{1}{m} \ . \end{aligned}$$

Итак, мы для любого РЧ a доказали (2) и тогда выполнено $\alpha(f)$.

<u>Лемма 2</u>. Пусть $\mathcal{Y}$ S -множество, τ целое число, $0 \leq \tau$ и q, κ и s НЧ, для которых верно $1 \leq s \leq 3^{\tau} \,\&$ $\& \, \nu\langle \mathcal{Y}\rangle (\frac{s-1}{3^{\tau}} \Delta \frac{s}{3^{\tau}}) < \frac{1}{3^q} \cdot \frac{1}{3^{\tau}}$. Тогда существует НЧ σ_0 такое, что для любого НЧ σ, $\sigma_0 \leq \sigma$, можно построить дизъюнктные возрастающие системы НЧ $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$, для которых выполнено

$$\begin{aligned} &\forall i (((s-1).3^{\sigma} + 1 \leq i \leq s.3^{\sigma} \equiv (i \in \mathcal{L}_1 \vee i \in \mathcal{L}_2)) \,\& \\ &\& (i \in \mathcal{L}_1 \supset \nu\langle \mathcal{Y}\rangle (\frac{i-1}{3^{\tau+\sigma}} \Delta \frac{i}{3^{\tau+\sigma}}) < \frac{1}{3^{\kappa}} \cdot \frac{1}{3^{\tau+\sigma}})) \,\& \\ &\& \sum_{i \in \mathcal{L}_2} |\frac{i-1}{3^{\tau+\sigma}} \Delta \frac{i}{3^{\tau+\sigma}}| \leq \frac{1}{3^q} \cdot \frac{1}{3^{\tau}} \ . \end{aligned}$$

<u>Обозначение</u>. Для всяких сегментов $a \Delta b$ и $c \Delta d$ обозначим $|a \Delta b \cap c \Delta d| \rightleftharpoons max(min(b, d), c) - max(min(a, d), c)$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{S}$ -множество $\mathcal{Y}$ образовано последовательностью сегментов $\{P_n\}_n$, а t НЧ такое, что $\nu\langle\mathcal{Y}\rangle(\frac{s-1}{3^\tau}\vartriangle\frac{s}{3^\tau}) < (\frac{1}{3^k}-\frac{1}{3^t}).\frac{1}{3^\tau}$.

Тогда существуют НЧ m_0 и σ_0 такие, что
$\sum_{n=m_0+1}^{\infty}|P_n| < \frac{1}{3^{k+t+2}}\cdot\frac{1}{3^\tau}$ и для любого НЧ σ, $\sigma_0 \leq \sigma$, верно

$$\sum_{n=1}^{m_0}\sum_{B_\sigma(i,m)}\left|\frac{i-1}{3^{\tau+\sigma}}\vartriangle\frac{i}{3^{\tau+\sigma}}\right| > \sum_{n=1}^{m_0}\left|P_n\cap\frac{s-1}{3^\tau}\vartriangle\frac{s}{3^\tau}\right| - \frac{1}{3^{k+t+2}}\cdot\frac{1}{3^\tau},$$

где

$$\forall m\, i\,(B_\sigma(i,m) \rightleftharpoons ((s-1).3^\sigma+1\leq i\leq s.3^\sigma\,\&$$
$$\&\left|\frac{i-1}{3^{\tau+\sigma}}\vartriangle\frac{i}{3^{\tau+\sigma}}\right| = \left|P_m\cap\frac{i-1}{3^{\tau+\sigma}}\vartriangle\frac{i}{3^{\tau+\sigma}}\right|)).$$

Пусть σ НЧ, $\sigma_0 \leq \sigma$. Согласно теореме 1.3 из [2] существуют дизъюнктные возрастающие системы НЧ $\mathcal{K}_0$, $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ такие, что

$$\forall i\,(((s-1).3^\sigma+1\leq i\leq s.3^\sigma \equiv (i\in\mathcal{K}_0\vee i\in\mathcal{K}_1\vee i\in\mathcal{K}_2))\,\&$$
$$\&\,(i\in\mathcal{K}_0 \equiv \exists m\,(1\leq m\leq m_0\,\&\,B_\sigma(i,m)))\,\&$$
$$\&\,(i\in\mathcal{K}_1 \supset \nu\langle\mathcal{Y}\rangle(\frac{i-1}{3^{\tau+\sigma}}\vartriangle\frac{i}{3^{\tau+\sigma}}) < \frac{1}{3^k}\cdot\frac{1}{3^{\tau+\sigma}})\,\&\,(i\in\mathcal{K}_2 \supset$$
$$\supset \frac{1}{3^{k+1}}\cdot\frac{1}{3^{\tau+\sigma}} < \nu\langle\mathcal{Y}\rangle(\frac{i-1}{3^{\tau+\sigma}}\vartriangle\frac{i}{3^{\tau+\sigma}}))).$$

Тогда выполнено

$$\sum_{i\in\mathcal{K}_0}\left|\frac{i-1}{3^{\tau+\sigma}}\vartriangle\frac{i}{3^{\tau+\sigma}}\right| \leq \nu\langle\mathcal{Y}\rangle(\frac{s-1}{3^\tau}\vartriangle\frac{s}{3^\tau}) <$$
$$< (\frac{1}{3^k}-\frac{1}{3^t}).\frac{1}{3^\tau},$$
$$\frac{1}{3^{k+1}}\cdot\sum_{i\in\mathcal{K}_2}\left|\frac{i-1}{3^{\tau+\sigma}}\vartriangle\frac{i}{3^{\tau+\sigma}}\right| \leq \sum_{i\in\mathcal{K}_2}\nu\langle\mathcal{Y}\rangle(\frac{i-1}{3^{\tau+\sigma}}\vartriangle\frac{i}{3^{\tau+\sigma}}) < \frac{1}{3^{k+t+1}}\cdot\frac{1}{3^\tau}$$

и, следовательно, $\sum_{i\in\mathcal{K}_2}\left|\frac{i-1}{3^{\tau+\sigma}}\vartriangle\frac{i}{3^{\tau+\sigma}}\right| < \frac{1}{3^t}\cdot\frac{1}{3^\tau}$.

Итак, для завершения доказательства достаточно определить $\mathcal{L}_1 \rightleftharpoons \mathcal{K}_1$ и обозначить посредством $\mathcal{L}_2$ возрастающую систему НЧ, сцясющуюся объединением $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}_2$.

Лемма 3. Пусть ψ неубывающая функция, $\alpha(\psi)$, $\mathcal{G}$ S-множество, k целое число, $0 \leq k$, а p и s НЧ такие, что

$$1 \leq s \leq 3^k, \quad \psi\left(\frac{s}{3^k}\right) - \psi\left(\frac{s-1}{3^k}\right) + \\ + \frac{1}{3^{2p+11}} \cdot \frac{1}{3^k} - 2 \cdot \frac{1}{3^{2p+11}} \cdot \nu\langle \mathcal{G} \rangle \left(\frac{s-1}{3^k} \,\Delta\, \frac{s}{3^k}\right) \leq \\ \leq V\left\langle \psi, \frac{1}{3^{2p+11}} \right\rangle \left(\frac{s-1}{3^k} \,\Delta\, \frac{s}{3^k}\right)$$

и $\nu\langle \mathcal{G} \rangle \left(\frac{s-1}{3^k} \,\Delta\, \frac{s}{3^k}\right) < \frac{1}{3^{p+6}} \cdot \frac{1}{3^k}$.

Тогда можно построить НЧ λ_0, $p+5 < \lambda_0$, такое, что для любого НЧ ℓ, $\lambda_0 \leq \ell$, существует возрастающая система НЧ $\mathcal{C}$, для которой выполнено

(3) $$\forall i \left(i \in \mathcal{C} \supset (s-1) \cdot 3^\ell + 1 < i < s \cdot 3^\ell \,\&\right. \\ \& \forall j \left(i-1 \leq j \leq i+1 \supset \psi\left(\frac{j}{3^{k+\ell}}\right) - \psi\left(\frac{j-1}{3^{k+\ell}}\right) < \right. \\ \left.\left. < \frac{1}{3^{2p+8}} \cdot \frac{1}{3^{k+\ell}}\right)\right) \,\&\, \sum_{i \in \mathcal{C}} \left|\frac{i-1}{3^{k+\ell}} \,\Delta\, \frac{i}{3^{k+\ell}}\right| = \left(1 - \frac{1}{3^{p+2}}\right) \cdot \frac{1}{3^k}$$

и $\forall i \left(i \in \mathcal{C} \supset \nu\langle \mathcal{G} \rangle \left(\frac{i-1}{3^{k+\ell}} \,\Delta\, \frac{i}{3^{k+\ell}}\right) < \frac{1}{3^{p+7}} \cdot \frac{1}{3^{k+\ell}}\right)$.

Доказательство. Согласно доказательству леммы 3 из [10], где мы перейдем от p к $p+1$, и лемме 2, где $r \geq k$, $q \geq p+6$, $n \geq p+7$, существуют НЧ ℓ_0 и σ_0, $p+5 < \ell_0$, такие, что для любого НЧ ℓ, $max(\ell_0, \sigma_0) \leq \ell$, можно построить возрастающую системы НЧ $\mathcal{C}$, которая содержится в пересечении построенных описанным способом систем $\mathcal{C}_0$ и $\mathcal{L}_1$ и которая удовлетворяет условиям, описанным в утверждении настоящей леммы. Мы определим $\lambda_0 \geq max(\ell_0, \sigma_0)$.

Замечание 4. Формула (3) совпадает с (10) из [10].

Лемма 4. Пусть ψ неубывающая функция, t НЧ, а $\mathcal{Y}$ S-множество меры меньшей чем $\frac{1}{3^{t+7}}$ такие, что

$$\alpha(\psi) \& \forall a b x (0 \leq a < b \leq 1 \& 0 \leq x \leq 1 \supset V\langle \psi, x\rangle (a \Delta b) \geq$$
$$\geq \psi(b) - \psi(a) + x.(b-a) - 2x.\nu\langle \mathcal{Y}\rangle (a \Delta b)) .$$

Тогда существуют НЧ n_t и S-множество $\mathcal{Y}$, для которых выполнено Д$(\psi, \{0\gamma 1\sigma 0\}_m, t+1, \mathcal{Y}, n_t)$.

Доказательство. 1) Согласно лемме 3, где $k_1 \rightleftharpoons 0$, $r_1 \rightleftharpoons t+1$ и $s \rightleftharpoons 1$, существуют НЧ λ_1, $t+6 < \lambda_1$, и возрастающая система НЧ a_1 такие, что

$$\forall i (i \in a_1 \supset 1 < i < 3^{\lambda_1} \& \forall j (i-1 \leq j \leq i+1 \supset$$
$$\supset \psi(\frac{j}{3^{\lambda_1}}) - \psi(\frac{j-1}{3^{\lambda_1}}) < \frac{1}{3^{2t+10}} \cdot \frac{1}{3^{\lambda_1}})) \& \sum_{i \in a_1} |\frac{i-1}{3^{\lambda_1}} \Delta \frac{i}{3^{\lambda_1}}| \geq$$
$$\geq (1 - \frac{1}{3^{t+2}}) \& \forall i (i \in a_1 \supset \nu\langle \mathcal{Y}\rangle (\frac{i-1}{3^{\lambda_1}} \Delta \frac{i}{3^{\lambda_1}}) <$$
$$< \frac{1}{3^{t+8}} \cdot \frac{1}{3^{\lambda_1}}) .$$

В $\mathcal{Y}$ мы на этом шаге включим все сегменты $\frac{i-1}{3^{\lambda_1}} \Delta \frac{i}{3^{\lambda_1}}$, $1 \leq i \leq 3^{\lambda_1} \& \neg (i \in a_1)$, и определим $k_2 \rightleftharpoons k_1 + \lambda_1$.

2) Пусть m НЧ, $1 < m$, пусть уже построены НЧ k_m и возрастающая система НЧ a_{m-1} такие, что сегменты системы $\{\frac{s-1}{3^{k_m}} \Delta \frac{s}{3^{k_m}}\}_{s \in a_{m-1}}$ не перекрываются с сегментами пока включенными в $\mathcal{Y}$ и вместе с ними покрывают $0 \Delta 1$, выполнено

$$\forall i (i \in a_{m-1} \supset 1 < i < 3^{k_m} \& \forall j (i-1 \leq j \leq i+1 \supset \psi(\frac{j}{3^{k_m}}) -$$

$$-\psi\left(\frac{j-1}{3^{k_m}}\right) < \frac{1}{3^{2t+2m+6}} \cdot \frac{1}{3^{k_m}})) \mathbin{\&} \sum_{i \in \mathcal{A}_{m-1}} \left| \frac{i-1}{3^{k_m}} \vartriangle \frac{i}{3^{k_m}} \right| \geq 1 -$$

$$-\frac{3^{m-1}-1}{2.3^{t+m}} \mathbin{\&} \forall i \left(i \in \mathcal{A}_{m-1} \supset \nu\langle \mathcal{Y} \rangle \left(\frac{i-1}{3^{k_m}} \vartriangle \frac{i}{3^{k_m}} \right) < \frac{1}{3^{t+m+6}} \cdot \frac{1}{3^{k_m}} \right).$$

Мы определим $p_m \geq t^{\circ} + m$. Для всякого НЧ s , $s \in \mathcal{A}_{m-1}$, мы применим к ψ, k_m, p_m и s лемму 3 и лемму 4 из [10]. Мы получим НЧ λ_m, $t+m+5 < \lambda_m$, и для всякого НЧ $s \in \mathcal{A}_{m-1}$ дизъюнктные возрастающие системы НЧ $\mathcal{E}_{m,s,1}$ и $\mathcal{E}_{m,s,2}$ такие, что

$$\forall i \left(i \in \mathcal{E}_{m,s,1} \supset (s-1).3^{\lambda_m} + 1 < i < s.3^{\lambda_m} \mathbin{\&} \right.$$

$$\mathbin{\&} \forall j \left(i-1 \leq j \leq i+1 \supset \psi\left(\frac{j}{3^{k_{m+1}}}\right) - \psi\left(\frac{j-1}{3^{k_{m+1}}}\right) < \frac{1}{3^{2t+2m+8}} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \frac{1}{3^{k_{m+1}}} \right) \mathbin{\&} \forall xy \left(\frac{s-2}{3^{k_m}} \leq x \leq \frac{i-1}{3^{k_{m+1}}} < \frac{i}{3^{k_{m+1}}} \leq y \leq \right.$$

$$\left. \leq \frac{s+1}{3^{k_m}} \supset 0 \leq \psi(y) - \psi(x) < \frac{1}{3^{t+m}} \cdot (y-x) \right) \mathbin{\&}$$

$$\mathbin{\&} \nu\langle \mathcal{Y} \rangle \left(\frac{i-1}{3^{k_{m+1}}} \vartriangle \frac{i}{3^{k_{m+1}}} \right) <$$

$$\left. < \frac{1}{3^{t+m+7}} \cdot \frac{1}{3^{k_{m+1}}} \right) \mathbin{\&}$$

$$\mathbin{\&} \sum_{i \in \mathcal{E}_{m,s,2}} \left| \frac{i-1}{3^{k_{m+1}}} \vartriangle \frac{i}{3^{k_{m+1}}} \right| = \frac{1}{3^{t+m+1}} \cdot \frac{1}{3^{k_m}} \mathbin{\&}$$

$$\mathbin{\&} \forall i \left((s-1).3^{\lambda_m} + 1 \leq i \leq s.3^{\lambda_m} \equiv \right.$$

$$\left. \equiv (i \in \mathcal{E}_{m,s,1} \vee i \in \mathcal{E}_{m,s,2}) \right) ,$$

где $k_{m+1} \geq k_m + \lambda_m$. В $\mathcal{Y}$ мы на этом шаге включим все сегменты $\dfrac{i-1}{3^{k_{m+1}}} \vartriangle \dfrac{i}{3^{k_{m+1}}}$, где $\exists s \, (s \in \mathcal{A}_{m-1} \mathbin{\&} i \in \mathcal{E}_{m,s,2})$. Сумма длин этих сегментов не больше чем $\dfrac{1}{3^{t+m+1}}$ и, следовательно, если мы посредством $\mathcal{A}_m$ обозначим возрастающую систему НЧ, являющуюся объединением систех $\mathscr{E}_{m,s,1}$ $(s \in a_{m-1})$, то

$$\sum_{i \in a_m} \left| \frac{i-1}{3^{k_{m+1}}} \Delta \frac{i}{3^{k_{m+1}}} \right| \geq 1 - \frac{3^{m-1}-1}{2.3^{t+m}} - \frac{1}{3^{t+m+1}} = 1 - \frac{3^m - 1}{2.3^{t+m+1}} .$$

Заметим, что сегменты пока включенные в $\mathscr{Y}$ не перекрываются с сегментами системы $\{\frac{i-1}{3^{k_{m+1}}} \Delta \frac{i}{3^{k_{m+1}}}\}_{i \in a_m}$ и вместе с ними покрывают $0 \Delta 1$.

Итак, $\mathscr{Y}$ S -множество меры меньшей чем $\frac{1}{3^{t+1}}$.

Методом, описанным в конце доказательства теоремы 1 из [10] легко доказать

$$\forall z (z \in 0 \Delta 1 \,\&\, \neg (z \in \mathscr{Y}) \supset \forall x y (x \leq z \leq y \,\&\, |y - x| < \frac{1}{3^{k_2}} \supset 0 \leq \psi(y) - \psi(x) \leq \frac{1}{3^{t+1}} \cdot (y - x))) .$$

Таким образом, верно

$$Д(\psi, \{0 \gamma 1 \sigma 0\}_m, t+1, \mathscr{Y}, 3^{k_2}) .$$

<u>Замечание 5</u>. Для любого S -множества $\mathscr{S}$ мы обозначим посредством $\nu_1 \langle \mathscr{S} \rangle$ функцию такую, что

$$\forall x (0 < x \leq 1 \supset \nu_1 \langle \mathscr{S} \rangle (x) = \nu \langle \mathscr{S} \rangle (0 \Delta x)) .$$

Тогда, как легко показать, $\nu_1 \langle \mathscr{S} \rangle (0) = 0$, $\nu_1 \langle \mathscr{S} \rangle$ неубывающая абсолютно непрерывная на $0 \Delta 1$ функция и выполнено $\forall x y (0 \leq x < y \leq 1 \supset 0 \leq \nu_1 \langle \mathscr{S} \rangle (y) - \nu_1 \langle \mathscr{S} \rangle (x) = \nu \langle \mathscr{S} \rangle (x \Delta y) \leq |x \Delta y|)$. Согласно теореме 2 из [5] и отмеченным свойствам $\nu_1 \langle \mathscr{S} \rangle$ для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ верно

$$\exists u (D(u, \nu_1 \langle \mathscr{S} \rangle, x) \,\&\, 0 \leq u \leq 1 \,\&\, (x \in \mathscr{S} \supset u = 1)) .$$

<u>Лемма 5</u>. Пусть φ неубывающая функция, $\alpha(\varphi)$. Тогда существует $\{H_m\}_m \in S$ такое, что $Д(\varphi, \{H_m\}_m)$.

<u>Доказательство</u>. Пусть τ_0 НЧ такое, что $\varphi(1) - \varphi(0) < \tau_0$.

а) Согласно соответствующим определениям и лемме 1 из [10] для всяких КДЧ v, w и z, $0 \le w \le v \;\&\; 0 \le z$: $V^{+}\langle \varphi, v \rangle$ неубывающая функция, $\varphi_{\{v\}}$ неубывающая абсолютно непрерывная на $0 \Delta 1$ функция,

$\varphi_{\{v\}} = \varphi(0) + \varphi_{\{1,v\}} = \varphi(0) + V^{+}\langle \varphi, 0 \rangle - V^{+}\langle \varphi, v \rangle = \varphi - V^{+}\langle \varphi, v \rangle$

и, следовательно, $V\langle \varphi_{\{v\}}, 0 \rangle (0 \Delta 1) \le \varphi(1) - \varphi(0) < \tau_0$; верно

$$
\begin{aligned}
&\alpha(V^{+}\langle \varphi, v \rangle), \quad V\langle V^{+}\langle \varphi, v \rangle, z \rangle = \\
&= V^{+}\langle V^{+}\langle \varphi, v \rangle, z \rangle + V^{-}\langle V^{+}\langle \varphi, v \rangle, z \rangle = V^{+}\langle \varphi, v+z \rangle + \\
&+ V^{-}\langle \varphi, v+z \rangle - V^{-}\langle \varphi, v \rangle = V^{+}\langle \varphi, v \rangle + \\
&+ h_z + 2 \cdot (V^{+}\langle \varphi, v+z \rangle - V^{+}\langle \varphi, v \rangle) = \\
&= V^{+}\langle \varphi, v \rangle + h_z - 2 \cdot (\varphi_{\{v+z\}} - \varphi_{\{v\}})
\end{aligned}
$$

и

$$
\begin{aligned}
&(\varphi_{\{v\}})_{\{w\}} = \varphi_{\{v\}} - V^{+}\langle \varphi - V^{+}\langle \varphi, v \rangle, w \rangle = \varphi - \\
&- V^{+}\langle \varphi, v \rangle - (V^{+}\langle \varphi, w \rangle - V^{+}\langle \varphi, v \rangle) = \varphi_{\{w\}} \; .
\end{aligned}
$$

б) Пусть m НЧ. Мы определим $q_m \rightleftharpoons 2^{2m+19} \cdot \tau_0$. Ввиду отмеченных в а) свойств функции $\varphi_{\{q_m\}}$ и теоремы 2 из [5] существует $\{G^{1,m}_n\}_n \in L_1$ такое, что

(4) $\forall x y \, (0 \le x < y \le 1 \supset 0 \le \varphi_{\{q_m\}}(y) - \varphi_{\{q_m\}}(x) = \int_x^y \{G^{1,m}_n\}_n)$,

причем $|\{G^{1,m}_n\}_n| = \{G^{1,m}_n\}_n$. Мы определим $\forall m \, (G^{m}_n \rightleftharpoons |G^{1,m}_n|_0)$. Тогда $\{G^{m}_n\}_n \in L_1$,

(5) $$0 \le \{G^{m}_n\}_n = \{G^{1,m}_n\}_n$$

и $\int_0^1 |\{G^{m}_n\}_n| = V\langle \varphi_{\{q_m\}}, 0 \rangle (0 \Delta 1) < \tau_0$. По лемме 2 из [8] существуют равномерно непрерывная функция φ_m и

$\mathcal{S}$ -множество $\mathcal{G}^{1,m}$ меры меньшей чем $\frac{1}{2^{2m+17}} <$ $< \frac{1}{2 \cdot 3^{m+8}}$, для которых верно

$$\forall x (x \in 0 \Delta 1 \& \neg (x \in \mathcal{G}^{1,m}) \supset P(q_m(x), \{G_n^m\}_n, x) \&$$
$$\& \, 0 \le q_m(x) < \varrho_m) .$$

Ввиду (4),(5), теорем 1,2 и 6 из [5] и следствия теоремы 2 существуют $\mathcal{S}$ -множество $\mathcal{G}^{2,m}$ и НЧ s_m такие, что Д$(\varphi_{\{\varrho_m\}}, \{G_n^m\}_n, m+8, \mathcal{G}^{2,m}, s_m)$.

в) Пусть m НЧ. Ввиду

(6) $\quad \forall v w (0 \le w \le v \supset (\varphi_{\{v\}})_{\{w\}} = \varphi_{\{w\}})$,

б), замечания 3, леммы 1 и теорем 2 и 5 из [5]

$$\forall \ell (\{\lambda_0(G_n^{m+\ell}, \varrho_m)\}_n \in L_1 \& \{\lambda_0(G_n^{m+\ell}, \varrho_m)\}_n = \{G_n^m\}_n) .$$

Таким образом, для всякого НЧ ℓ существует $\mathcal{S}$ -множество $\mathcal{G}^{3,m,\ell}$ меры меньшей чем $\frac{1}{2 \cdot 3^{m+8+\ell}}$ такое, что

$$\forall x (x \in 0 \Delta 1 \& \neg (x \in \mathcal{G}^{3,m,\ell}) \supset \exists u (P(u, \{G_n^{m+\ell}\}_n, x) \&$$
$$\& P(\lambda(u, \varrho_m), \{G_n^m\}_n, x))) .$$

Согласно замечанию 1 из [6] осуществимо $\mathcal{S}$ -множество $\mathcal{G}^{4,m}$ меры меньшей чем $\frac{2}{3^{m+8}}$, которое является объединением $\mathcal{S}$ -множеств $\mathcal{G}^{1,m+i}$ $(0 \le i)$, $\mathcal{G}^{3,m,\ell}$ $(1 \le \ell)$ и $\mathcal{G}^{2,m}$. Ясно, что $\forall x (x \in 0 \Delta 1 \& \neg (x \in \mathcal{G}^{4,m}) \supset$

$$\supset \forall i (0 \le i \supset 0 \le q_m(x) = q_{m+i}(x) < \varrho_m \&$$
$$\& P(q_m(x), \{G_n^{m+i}\}_n, x))) \&$$
$$\& \text{Д}(\varphi_{\{\varrho_m\}}, \{G_n^m\}_n, m+7, \mathcal{G}^{4,m}, s_m) .$$

г) Ввиду в) и теоремы 4 из [5] существует $\{H_m\}_m \in S$ такое, что для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ верно

$$(7) \qquad \exists u (P(u, \{H_m\}_m, x) \& (q_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} u)) .$$

Таким образом, $0 \leq \{H_m\}_m$ и для всякого НЧ m можно построить S-множество $\mathcal{G}^{5,m}$ меры меньшей чем $\frac{1}{3^{8+m}}$, для которого для всех КДЧ x, $x \in 0 \Delta 1$ & $\& \neg (x \in \mathcal{G}^{5,m})$ верно (7) и, следовательно, если $\mathcal{G}^m$ объединение S-множеств $\mathcal{G}^{4,m}$ и $\mathcal{G}^{5,m}$, то мера $\mathcal{G}^m$ меньше чем $\frac{1}{3^{m+7}}$ и выполнено

$$(8) \qquad \begin{aligned} &\forall x (x \in 0\Delta 1 \& \neg (x \in \mathcal{G}^m) \supset \forall i (0 \leq i \supset 0 \leq q_m(x) = \\ &= q_{m+i}(x) < q_m \& P(q_m(x), \{G_n^{m+i}\}_n, x)) \& P(q_m(x), \\ &\{H_n\}_n x)) \& Д(\varphi_{\{q_m\}}, \{H_n\}_n, m+7, \mathcal{G}^m, s_m) . \end{aligned}$$

д) Пусть m НЧ. Согласно лемме 1 из [5], в) и г)

$$\{\lambda_0 (H_{n+q_{m+1}+1}, q_{m+1})\}_n \in L_1 \; \&$$

$$\& \{\lambda_0 (H_{n+q_{m+1}+1}, q_{m+1})\}_n = \{G_n^{m+1}\}_n .$$

На основании этого, (4) и (5), где мы перейдем от m к $m+1$, [5], (6) и замечания 3 выполнено

$$(9) \qquad \begin{aligned} &\forall u x y (0 \leq u \leq 1 \& 0 \leq x < y \leq 1 \supset \{H_n^{\langle u \rangle}\}_n \in L_1 \; \& \\ &\& \varphi_{\{q_m+u\}}(y) - \varphi_{\{q_m+u\}}(x) = \int_x^y \{H_n^{\langle u \rangle}\}_n) , \end{aligned}$$

где

$$\forall n u (0 \leq u \leq 1 \supset H_n^{\langle u \rangle} \rightleftarrows \lambda_0 (H_{n+q_{m+1}+1}, q_m + u)) .$$

Пусть z КДЧ, $0 \leq z \leq 1$. Тогда ввиду (8), (9) и теоремы 2 из [5] для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ выполнено

$$\exists v\,(P(v,\{H_n^{\langle z\rangle}\}_n-\{H_n^{\langle 0\rangle}\}_n,x)\ \&\ D(v,\varphi_{\{q_m+z\}}-$$
$$-\varphi_{\{q_m\}},x)\ \&\ 0\le v\le z\ \&\ (\neg(x\in\mathcal{G}^m)\supset v=0))\ .$$

На основании лемм 3 и 1 из [6], теорем 1 и 2 из [5] и замечания 5 мы знаем, что существуют $\{\mathfrak{M}_n^m\}_n\in M$ и абсолютно непрерывная функция ψ_m такие, что

$$\chi[\{\mathfrak{M}_n^m\}_n]\in L_1\ ,\ \ \forall xy\,(0\le x<y\le 1\supset$$
$$\supset\psi_m(y)-\psi_m(x)=\int_x^y\chi[\{\mathfrak{M}_n^m\}_n])$$

и для почти всех КДЧ x из $0\Delta 1$

$$(x\in\mathcal{G}^m\vee\neg(x\in\mathcal{G}^m))\ \&\ (x\in\mathcal{G}^m\supset D(1,\nu_1\langle\mathcal{G}^m\rangle,x)\ \&$$
$$\&\ x\in\{\mathfrak{M}_n^m\}_n\ \&\ P(1,\chi[\{\mathfrak{M}_n^m\}_n],x)\ \&\ D(1,\psi_m,x))\ \&$$
$$\&\ (\neg(x\in\mathcal{G}^m)\supset\exists u\,(0\le u\le 1\ \&\ D(u,\nu_1\langle\mathcal{G}^m\rangle,x))\ \&$$
$$\&\ \neg(x\in\{\mathfrak{M}_n^m\}_n)\ \&\ P(0,\chi[\{\mathfrak{M}_n^m\}_n],x)\ \&$$
$$\&\ D(0,\psi_m,x))\ .$$

Итак, $0\le\{H_n^{\langle z\rangle}\}_n-\{H_n^{\langle 0\rangle}\}_n\le z.\chi[\{\mathfrak{M}_n^m\}_n]$ и согласно следствию теоремы 6 и теореме 2 из [5] выполнено

$$\forall xy\,(0\le x<y\le 1\supset 0\le\varphi_{\{q_m+z\}}(y)-$$
$$-\varphi_{\{q_m+z\}}(x)-(\varphi_{\{q_m\}}(y)-\varphi_{\{q_m\}}(x))\le z.(\psi_m(y)-$$
$$-\psi_m(x))\le z.(\nu_1\langle\mathcal{G}^m\rangle(y)-\nu_1\langle\mathcal{G}^m\rangle(x))=z.\nu\langle\mathcal{G}^m\rangle(x\Delta y)).$$

Отсюда мы на основании а) и г) получаем: $V^+\langle\varphi,q_m\rangle$ неубывающая функция, $\mathcal{G}^m$ $\mathcal{S}$ -множество меры меньшей чем $\frac{1}{3^{m+7}}$ и

$\alpha(V^+\langle\varphi, q_m\rangle) \,\&\, \forall x y z\,(0 \leq x < y \leq 1 \,\&\, 0 \leq z \leq$
$\leq 1 \supset V\langle V^+\langle\varphi, q_m\rangle, z\rangle(x \Delta y) \geq V^+\langle\varphi, q_m\rangle(x\Delta y) +$
$+ z.(y-x) - 2z.\nu\langle\mathcal{Y}^m\rangle(x\Delta y))$.

Согласно лемме 4 существуют $\mathcal{S}$ -множество $\mathcal{Y}^{1,m}$ и НЧ n_m такие, что

$Д(V^+\langle\varphi, q_m\rangle, \{0\gamma 1\sigma 0\}_n, m+1, \mathcal{Y}^{1,m}, n_m)$.

Пусть $\mathcal{Y}^m$ объединение $\mathcal{S}$ -множеств $\mathcal{Y}^m$ и $\mathcal{Y}^{1,m}$. Тогда ввиду (8), а) и замечания 1 выполнено

$Д(\varphi, \{H_n\}_n, m, \mathcal{Y}^m, max(n_m, s_m))$.

Итак, мы доказали $Д(\varphi, \{H_n\}_m)$, что и требовалось.

Доказательство теоремы 1. Из $\alpha(f)$ следует по лемме 1 и замечанию 3 из [10]

$\alpha(V^+\langle f,0\rangle) \,\&\, \alpha(V^-\langle f,0\rangle) \,\&\, f = f(0) + V^+\langle f,0\rangle - V^-\langle f,0\rangle$.

Как мы знаем, $V^+\langle f,0\rangle$ и $V^-\langle f,0\rangle$ неубывающие функции. Согласно лемме 5 существуют $\{H^1_n\}_n \in \mathcal{S}$ и $\{H^2_m\}_n \in \mathcal{S}$ такие, что $Д(V^+\langle f,0\rangle, \{H^1_n\}) \,\&$ $\&\, Д(V^-\langle f,0\rangle, \{H^2_n\}_n)$. Выполнено $(\{H^1_n\}_n - \{H^2_m\}_m) \in \mathcal{S}$ (лемма 1 из [5]), $\{H^1_n\}_n +$ $+ (\{0\gamma 1\sigma 0\}_m - \{H^2_m\}_m) = \{H^1_m\}_n - \{H^2_m\}_m$ и по замечанию 1 $Д(f, \{H^1_m\}_n - \{H^2_m\}_m)$.

Ввиду этого и леммы 1 теорема 1 доказана.

На основании теоремы 1, леммы 1 из [5], замечания 1, следствия теоремы 2, теоремы 1 из [5] и [10] легко доказать следующие утверждения.

Следствие 1. Пусть f_1 и f_2 функции, $\alpha(f_1)$ & & $\alpha(f_2)$. Тогда выполнено $\alpha(f_1+f_2)$ в том и только том случае, если f_1+f_2 - функция ограниченной вариации на $0\Delta 1$.

Следствие 2. Функция f представима в виде $\varphi+g$, где φ сингулярная функция, а g абсолютно непрерывная на $0\Delta 1$ функция, в том и только в том случае, если выполнено одно из двух следующих условий:

1) f функция ограниченной вариации на $0\Delta 1$ и существует $\{G_n\}_n \in L_1$ такое, что $Д(f, \{G_n\}_n)$;

2) $\alpha(f)$ и существует $\{G_n\}_n \in L_1$ такое, что для почти всех КДЧ x из $0\Delta 1$ верно

$$\exists u\,(P(u,\{G_n\}_n, x)\ \&\ D(u, f, x)) .$$

Замечание 6. Пусть φ функция такая, что φ возрастает на $0\Delta 1$ и $0\le\varphi(0)<\varphi(1)\le 1$. Тогда можно построить неубывающую функцию ψ, для которой выполнено

$$\forall x\,(0\le x\le 1 \supset \psi(\varphi(x)) = x\ \&\ (0\le x\le\varphi(0)\supset\psi(x) = 0)\ \&\ (\varphi(0)\le x\le\varphi(1)\supset\varphi(\psi(x)) = x)\ \&\ (\varphi(1)\le x\le 1\supset\psi(x) = 1))..$$

Если $\alpha(\varphi)$, то легко доказать

$$\forall a\,(\neg(a=0)\supset Var(|a|\cdot(1-(\varphi(1)-\varphi(0)) + V\langle\varphi,\frac{1}{a}\rangle(0\Delta 1)), \psi - h_a, 0\Delta 1))$$

и, следовательно, выполнено $\alpha(\psi)$.

Замечание 7. Пусть u КДЧ, $0<u<1$, а Φ покрытие такие, что $\forall k\,(\sum_{i=1}^{k}|\Phi_i|<u)$. Тогда согласно теореме 2.4 из [3] ряд $\sum_k|\Phi_k|$ не сходится.

Можно построить возрастающую на $0 \Delta 1$ функцию g и покрытие Ψ, для которых выполнено $g = g / \Phi \,\&\, \forall k (g(Эл(\Phi_k)) = Эл(\Psi_k) \,\&\, g(Эт(\Phi_k)) = Эт(\Psi_k)) \,\&\, (\sum_{i=1}^{k} |\Psi_i| \xrightarrow[k\to\infty]{} 1)$.

Из сказанного непосредственно следует абсолютная непрерывность функции g и по теореме из [9] $\alpha(g)$. Согласно замечанию 6 существует возрастающая на $0 \Delta 1$ функция f такая, что $\forall x (0 \le x \le 1 \supset f(g(x)) = g(f(x)) = x) \,\&$

$\& \,\alpha(f)$, и, следовательно, $f = f / \Psi$. Из свойств покрытий Φ и Ψ следует по теореме из [9], что f не может быть абсолютно непрерывной на $0 \Delta 1$. Согласно лемме 5 из [10] f нельзя представить в виде суммы сингулярной и абсолютно непрерывной функции. Но тогда по следствию 2 теоремы 1 не существует $\{G_m\}_m \in L_1$ такое, что для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ верно

$\exists u (P(u, \{G_m\}_m, x) \,\&\, D(u, f, x))$.

<u>Пример</u>. Существуют неубывающие функции φ_1 и φ_2 такие, что $\alpha(\varphi_1) \,\&\, \alpha(\varphi_2) \,\&\, Д(\varphi_1 - \varphi_2, \{0 \gamma 1 \delta 0\}_m) \,\&$

$\& \neg \alpha(\varphi_1 - \varphi_2)$ и, следовательно, функция $\varphi_1 - \varphi_2$ не является сингулярной.

<u>Доказательство</u>. Пусть u КДЧ и Φ покрытие такие, что $\forall k (\sum_{i=1}^{k} |\Phi_i| < u < 1)$. Пусть Ψ покрытие, построенное на основании Φ в замечании 7, а f функция, являющаяся конструктивным аналогом функции Θ из [11, стр.232-3.

Мы построим неубывающие функции φ_1 и φ_2 такие, что

$$\forall i k x (1 \le i \le 2 \,\&\, x \in \Psi_k \supset \varphi_i(x) = \frac{1}{2}.$$

$.(\text{Эл}(\Phi_k)+|\Phi_k|.f(\frac{2}{|\Psi_k|}.(x-\text{Эл}(\Psi_k)-\frac{i-1}{2}.|\Psi_k|))))$.

Тогда ввиду $\sum_{i=1}^{k}|\Psi_i| \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$ нетрудно показать, что φ_1 и φ_2 сингулярные функции (см. доказательство примера из [10] и замечание 1). Следовательно, согласно замечанию 1 и лемме 1 выполнено

$\alpha(\varphi_1)$ & $\alpha(\varphi_2)$ & $Д(\varphi_1-\varphi_2, \{0\gamma 1\sigma 0\}_m)$.

Для всякого НЧ k функция $\varphi_1-\varphi_2$ является неубывающей на $\text{Эл}(\Psi_k)\,\Delta\,\frac{1}{2}.(\text{Эл}(\Psi_k)+\text{Эm}(\Psi_k))$ и невозрастающей на $\frac{1}{2}.(\text{Эл}(\Psi_k)+\text{Эm}(\Psi_k))\,\Delta\,\text{Эm}(\Psi_k)$ и выполнено $\varphi_1(\text{Эл}(\Psi_k))-\varphi_2(\text{Эл}(\Psi_k))=$
$=\varphi_1(\text{Эm}(\Psi_k))-\varphi_2(\text{Эm}(\Psi_k))=0$ & $\varphi_1(\frac{1}{2}.(\text{Эл}(\Psi_k)+$
$+\text{Эm}(\Psi_k)))-\varphi_2(\frac{1}{2}.(\text{Эл}(\Psi_k)+\text{Эm}(\Psi_k)))=$
$=\frac{1}{2}.(\text{Эл}(\Phi_k)+|\Phi_k|-\text{Эл}(\Phi_k))=\frac{1}{2}.|\Phi_k|$.

Отсюда видно, что $\varphi_1-\varphi_2$ является функцией ограниченной вариации на $0\,\Delta\,1$ в том и только том случае, если сходится ряд $\sum_k|\Phi_k|$. Однако согласно теореме 2.4 из [3] ряд $\sum_k|\Phi_k|$ не сходится. Следовательно, $\neg\alpha(\varphi_1-\varphi_2)$ и $\varphi_1-\varphi_2$ не является сингулярной функцией (лемма 2 из [10]).

Литература

[1] НАТАНСОН И.П.: Теория функций вещественной переменной, Москва, 1957.

[2] ЗАСЛАВСКИЙ И.Д.: Некоторые свойства конструктивных вещественных чисел и конструктивных функций, Проблемы конструктивного направления в математике 2(сборник работ),Труды Мат.инст.им.В.А.

Стеклова, т. LXVII (1962), стр.385-457.

[3] ЗАСЛАВСКИЙ И.Д. и ЦЕЙТИН Г.С.: О сингулярных покрытиях и связанных с ними свойствах конструктивных функций, там же, стр.458-502.

[4] ДЕМУТ О.: Интеграл Лебега в конструктивном анализе, Записки научных семинаров Ленинградского отд.Мат.инст.им.В.А.Стеклова, т.4(1967), стр.30-43.

[5] ДЕМУТ О.: Пространства L_n и S в конструктивной математике, Comment.Math.Univ.Carolinae 10(1969),261-84.

[6] ДЕМУТ О.: Об измеримости множеств по Лебегу в конструктивной математике, Comment.Math.Univ. Carolinae 10(1969),463-492.

[7] ДЕМУТ О.: О дифференцируемости конструктивныцх функций, Comment.Math.Univ.Carolinae 10(1969),167-175.

[8] ДЕМУТ О.: Об интегрируемости производных от конструктивных функций, Comment.Math.Univ. Carolinae 11(1970),667-690.

[9] ДЕМУТ О.: Необходимое и достаточное условие абсолютной непрерывности конструктивных функций, Comment.Math.Univ. Carolinae 11(1970),705-726.

[10] ДЕМУТ О.: Необходимое и достаточное условие представимости конструктивных функций в виде суммы сингулярной и абсолютно непрерывной функции,

Comment.Math.Univ.Carolinae

12(1971),587-610.

Matematicko-fyzikální fakulta

Karlova universita

Sokolovská 83

Praha Karlín,

Československo

(Oblatum 15.3.1971)