Osvald Demuth

Необходимое и достаточное условие представимости конструктивных функций в виде суммы сингулярной и абсолютно непрерывной функции

*Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, Vol. 12 (1971), No. 3, 587--610

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/105367`

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

12,3 (1971)

# НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ПРЕДСТАВИМОСТИ КОНСТРУКТИВНЫХ ФУНКЦИЙ В ВИДЕ СУММЫ СИНГУЛЯРНОЙ И АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ

О. ДЕМУТ, Прага

В классической математике всякая функция ограниченной вариации представима в виде суммы сингулярной и абсолютно непрерывной функции [1]. В настоящей работе показано, как дело обстоит в конструктивной математике.

В следующем мы пользуемся определениями и обозначениями из [7] и [8] .

<u>Замечание 1</u>. Пусть $\varphi$ функция, $\alpha(\varphi)$, а $g$ абсолютно непрерывная на $0 \triangle 1$ функция. Тогда $\alpha(-\varphi)$ и по теореме 6.8 из [3] для любой полигональной функции $\mathcal{F}$ выполнено $\exists u \; Var(u, \varphi + \mathcal{F}, 0 \triangle 1)$. Для всякого РЧ $a$ функция $g - h_a$ абсолютно непрерывна на $0 \triangle 1$ и, следовательно, существуют последовательности полигональных функций $\{\mathcal{F}_n\}_n$ и КДЧ $\{v_n\}_n$ и $\{u_n\}_n$ такие, что

$$\forall n \,(Var(v_n, g - h_a - \mathcal{F}_n, 0 \triangle 1) \,\&\, v_n < \frac{1}{n} \,\&$$
$$\& \, Var(u_n, \varphi + \mathcal{F}_n, 0 \triangle 1)) .$$

Последовательность $\{u_n\}_n$ сходится к вариации функции

---

AMS, Primary 02E99 Ref.Ž. 2.644.2
Secondary 26A30, 26A45

$\varphi + g - h_a$ на $0 \Delta 1$. Таким образом, верно $\alpha(\varphi + g)$.

Замечание 2. Пусть $\mathcal{Y}$ $S$-множество, образованное последовательностью сегментов $\{H_n\}_n$. Тогда, по определению, ряд $\sum_n |H_n|$ сходится к мере $\mathcal{Y}$ и, следовательно, для всяких КДЧ $\xi$ и $\eta$, $0 \leq \xi < \eta \leq 1$, сходится ряд

(1) $\sum_n (max(min(\exists n(H_n), \eta), \xi) - max(min(\exists \lambda(H_n), \eta), \xi))$.

Пусть $u$ сумма этого ряда. Для всякого НЧ $p$ существует $S$-множество $\mathcal{Y}^p$ меры меньшей чем $u + \frac{1}{p}$, для которого выполнено $\forall x(x \in \xi \Delta \eta \mathbin{\&} x \in \mathcal{Y} \supset x \in \mathcal{Y}^p)$.

Итак, если $u < |\xi \Delta \eta|$, то согласно доказательству теоремы 2.4 из [4] $\exists v(\xi < v < \eta \mathbin{\&} \neg(v \in \mathcal{Y}))$.

Существует алгорифм $\nu \langle \mathcal{Y} \rangle$ такой, что для всяких КДЧ $\xi$ и $\eta$, $0 \leq \xi < \eta \leq 1$, верно $!\nu\langle\mathcal{Y}\rangle(\xi \Delta \eta)$ и $\nu\langle\mathcal{Y}\rangle(\xi \Delta \eta)$ является суммой ряда (1).

Заметим, что $\nu\langle\mathcal{Y}\rangle(0 \Delta 1)$ - мера $\mathcal{Y}$ и

$$\forall x y z (0 \leq x < y < z \leq 1 \supset \nu\langle\mathcal{Y}\rangle(x \Delta y) + $$
$$+ \nu\langle\mathcal{Y}\rangle(y \Delta z) = \nu\langle\mathcal{Y}\rangle(x \Delta z) \leq |x \Delta z|).$$

Замечание 3. Части 1б), 2 - 4) леммы 3 из [8] верны для любой функции $f$ такой, что $\alpha(f)$.

Действительно, пусть $v$ и $w$ КДЧ. Часть 1б) непосредственно следует из $\forall x(|x - v| = (x - v)^+ +$

$$+ (x - v)^- \mathbin{\&} x - v = (x - v)^+ - (x - v)^- \mathbin{\&}$$
$$\mathbin{\&} (w \leq v \supset (x - v)^+ \leq (x - w)^+ \mathbin{\&} (x - w)^- \leq (x - v)^-)).$$

В доказательстве части 4) не используется предположение

(2) $$f = f/\Phi \ .$$

В части II a) доказательства леммы выведена без использования (2) формула (8) из [8]. Ввиду того, что это доказательство можно повторить для произвольного сегмента, содержащегося в $0 \Delta 1$, верно (5) из [8]. Аналогично доказывается остаток части 2) и часть 3).

<u>Обозначение</u>. Пусть $f$ функция, $\alpha(f)$, а $v$ КДЧ, $0 \leq v$. Мы обозначим $f_{\{v\}} \rightleftharpoons f - V^+\langle f,v\rangle + V^-\langle f,-v\rangle$, $f_{\{1,v\}} \rightleftharpoons V^+\langle f,0\rangle - V^+\langle f,v\rangle$ и $f_{\{2,v\}} \rightleftharpoons V^-\langle f,0\rangle - V^-\langle f,-v\rangle$.

<u>Лемма 1</u>. Пусть $f$ функция, $\alpha(f)$, а $u, v$ и $x$ КДЧ, $0 \leq v$. Тогда

1) $\alpha(V^+\langle f,u\rangle) \,\&\, \alpha(V^-\langle f,u\rangle)$,

$$V^+\langle V^+\langle f,u\rangle, x\rangle = V^+\langle f + V^-\langle f,u\rangle, u+x\rangle =$$

$$= V^+\langle f, max(u, u+x)\rangle + h_{x-} \ ,$$

$$V^+\langle V^-\langle f,u\rangle, x\rangle = V^-\langle f - V^+\langle f,u\rangle, u-x\rangle =$$

$$= V^-\langle f, min(u, u-x)\rangle + h_{x-} \ ,$$

$$V^-\langle V^+\langle f,u\rangle, x\rangle = V^-\langle f + V^-\langle f,u\rangle, u+x\rangle =$$

$$= V^-\langle f, max(u, u+x)\rangle - V^-\langle f,u\rangle \ ,$$

$$V^-\langle V^-\langle f,u\rangle, x\rangle = V^+\langle f - V^+\langle f,u\rangle, u-x\rangle =$$

$$V^+\langle f, min(u, u-x)\rangle - V^+\langle f,u\rangle \ ;$$

2) $\alpha(f_{\{v\}}) \& \alpha(f_{\{1,v\}}) \& \alpha(f_{\{2,v\}})$ ,

(3) $f_{\{v\}} = f(0) + f_{\{1,v\}} - f_{\{2,v\}}$ ,

$V^{+}\langle f_{\{v\}}, 0\rangle = f_{\{1,v\}}$ , $V^{-}\langle f_{\{v\}}, 0\rangle = f_{\{2,v\}}$ ,

$\forall i\, x\, y\, (1 \leq i \leq 2 \,\&\, x \leq y \supset 0 \leq f_{\{i,v\}}(y) -$

$- f_{\{i,v\}}(x) \leq v.(y-x))$

и, следовательно, $\forall x\, y\, (|f_{\{v\}}(y) - f_{\{v\}}(x)| \leq v.|y-x|)$;

3) функции $f_{\{v\}}$ , $f_{\{1,v\}}$ и $f_{\{2,v\}}$ абсолютно непрерывны на $0 \Delta 1$ ;

4) функция $f$ абсолютно непрерывна на $0 \Delta 1$ тогда и только тогда, когда

(4) $(V^{+}\langle f, m\rangle(0 \Delta 1) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0) \& (V^{-}\langle f, -m\rangle(0 \Delta 1) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0)$ ;

5) если последовательности КДЧ $\{V^{+}\langle f, m\rangle(0 \Delta 1)\}_m$ и $\{V^{-}\langle f, -m\rangle(0 \Delta 1)\}_m$ сходятся, то существуют неубывающие неотрицательные функции $f_{\{+\}}$ и $f_{\{-\}}$ такие, что

(5) $(V^{+}\langle f, m\rangle \searrow_{m\to\infty} f_{\{+\}}) \& (V^{-}\langle f, -m\rangle \searrow_{m\to\infty} f_{\{-\}})$ ,

функция $f - f_{\{+\}} + f_{\{-\}}$ абсолютно непрерывна на $0 \Delta 1$ , выполнено $\alpha(f_{\{+\}} - f_{\{-\}})$ , $\alpha(f_{\{+\}})$ , $\alpha(f_{\{-\}})$ и

$\forall x\, (V\langle f_{\{+\}}, x\rangle = f_{\{+\}} + h_{|x|} \,\&\, V\langle f_{\{-\}}, x\rangle = f_{\{-\}} + h_{|x|})$ .

Доказательство. В следующем (✱) обозначает ссылку на лемму 3 из [8] и замечание 3.

I) Согласно (✱) из $\alpha(f)$ следует $\alpha(f - V^{+}\langle f, u\rangle) \& \alpha(f + V^{-}\langle f, u\rangle)$ и ввиду

$f = f(0) + h_u + V^+\langle f, u\rangle - V^-\langle f, u\rangle$ и замечания 1 верно 1).

II) На основании I) получаем $\alpha(f + V^-\langle f, -v\rangle)$,

$$(6) \qquad V^+\langle f + V^-\langle f, -v\rangle, v\rangle = V^+\langle f, v\rangle$$

и, следовательно, $\alpha(f_{\{v\}})$. Из $f = f(0) + V^+\langle f, 0\rangle - V^-\langle f, 0\rangle$ следует (3). Согласно 1), (ж) и (6) верно

$$V^+\langle f_{\{v\}}, 0\rangle = V^+\langle f + V^-\langle f, -v\rangle - V^+\langle f + V^-\langle f, -v\rangle, v\rangle, 0\rangle =$$

$$= V^+\langle f + V^-\langle f, -v\rangle, 0\rangle - V^+\langle f + V^-\langle f, -v\rangle, v\rangle =$$

$$= V^+\langle f, 0\rangle - V^+\langle f, v\rangle = f_{\{1,v\}} .$$

Аналогично можно доказать $V^-\langle f_{\{v\}}, 0\rangle = f_{\{2,v\}}$. Отсюда мы ввиду $\alpha(f_{\{v\}})$ и 1) получаем $\alpha(f_{\{1,v\}})\,\&$ $\&\ \alpha(f_{\{2,v\}})$.

Пусть $x$ и $y$ КДЧ, $0 \leq x < y \leq 1$. Тогда согласно (ж) и 1)

$$V^+\langle f, 0\rangle(x \Delta y) - v.(y - x) \leq (V^+\langle f, 0\rangle(x \Delta y) -$$

$$- v.(y - x))^+ \leq V^+\langle V^+\langle f, 0\rangle, v\rangle(x \Delta y) =$$

$$= V^+\langle f, v\rangle(x \Delta y),\ V^+\langle f, v\rangle(x \Delta y) \leq V^+\langle f, 0\rangle(x \Delta y)$$

и, следовательно, $0 \leq f_{\{1,v\}}(y) - f_{\{1,v\}}(x) \leq v.(y - x)$. Аналогично выполнено $0 \leq f_{\{2,v\}}(y) - f_{\{2,v\}}(x) \leq v.(y - x)$. Таким образом, мы доказали 2). Часть 3) утверждения леммы непосредственно следует из 2) и теоремы из [8].

III) a) Если $f$ абсолютно непрерывна, то согласно теореме из [8] и (ж) верно (4).

б) Пусть верно (4). Тогда мы ввиду 3) и того, что для всякого НЧ $m$ выполнено

$$V\langle f - f_{\{m\}}, 0\rangle(0\Delta 1) = V\langle V^{+}\langle f,m\rangle - V^{-}\langle f,-m\rangle, 0\rangle(0\Delta 1)$$
$$\leq V^{+}\langle f,m\rangle(0\Delta 1) + V^{-}\langle f,-m\rangle(0\Delta 1),$$

сразу получаем, что $f$ абсолютно непрерывна.

IY) Согласно (ж) $\{V^{+}\langle f,m\rangle\}_m$ и $\{V^{-}\langle f,-m\rangle\}_m$ невозрастающие последовательности неубывающих неотрицательных функций. Пусть сходятся последовательности КДЧ $\{V^{+}\langle f,m\rangle(0\Delta 1)\}_m$ и $\{V^{-}\langle f,-m\rangle(0\Delta 1)\}_m$. Тогда существуют неубывающие неотрицательные функции $f_{\{+\}}$ и $f_{\{-\}}$ такие, что (5). Ввиду (ж) для любого НЧ $m$ функции $V^{+}\langle f,m\rangle - f_{\{+\}}$ и $V^{-}\langle f,-m\rangle - f_{\{-\}}$ являются неубывающими и, следовательно, если $\{c_i\}_{i=0}^{\tau}$ В-система РЧ, то

$$W(f - f_{\{+\}} + f_{\{-\}} - f_{\{m\}}, \{c_i\}_{i=0}^{\tau}) = W(V^{+}\langle f,m\rangle - f_{\{+\}} -$$
$$- (V^{-}\langle f,-m\rangle - f_{\{-\}}), \{c_i\}_{i=0}^{\tau}) \leq (V^{+}\langle f,m\rangle(0\Delta 1) -$$
$$- (f_{\{+\}}(1) - f_{\{+\}}(0))) +$$
$$+ (V^{-}\langle f,-m\rangle(0\Delta 1) - (f_{\{-\}}(1) - f_{\{-\}}(0))) .$$

Таким образом, из 3) и (5) следует абсолютная непрерывность функции $f - f_{\{+\}} + f_{\{-\}}$ и согласно замечанию 1) верно $\alpha(f_{\{+\}} - f_{\{-\}})$ .

Ввиду 1) для всякого НЧ $m$ выполнено

$$V^{+}\langle V^{+}\langle f,0\rangle, m\rangle = V^{+}\langle f,m\rangle, V^{+}\langle V^{-}\langle f,0\rangle, m\rangle =$$
$$= V^{-}\langle f,-m\rangle, V^{-}\langle V^{+}\langle f,0\rangle,-m\rangle = V^{-}\langle V^{-}\langle f,0\rangle,-m\rangle = 0$$

и, следовательно, $(V^+\langle f,0\rangle)_{\{+\}}=f_{\{+\}}$,
$(V^+\langle f,0\rangle)_{\{-\}}=0$, $(V^-\langle f,0\rangle)_{\{+\}}=f_{\{-\}}$ $(V^-\langle f,0\rangle)_{\{-\}}=0$.
Отсюда мы по выше доказанному получаем $\alpha(f_{\{+\}})\ \&$
$\&\ \alpha(f_{\{-\}})$.

Согласно (ж) и 1) для всякого НЧ $m$ и КДЧ $x$ выполнено

$$V\langle V^+\langle f,m\rangle,x\rangle = V^+\langle V^+\langle f,m\rangle,x\rangle +$$
$$+V^-\langle V^+\langle f,m\rangle,x\rangle = V^+\langle f,max(m,m+x)\rangle + h_{x-}+$$
$$+V^-\langle f,max(m,m+x)\rangle - V^-\langle f,m\rangle =$$
$$=V^+\langle f,max(m,m+x)\rangle + h_{x-} - f + h_{max(m,m+x)}+$$
$$+V^+\langle f,max(m,m+x)\rangle + f - h_m - V^+\langle f,m\rangle =$$
$$=V^+\langle f,m\rangle + h_{|x|} + 2.(V^+\langle f,max(m,m+x)\rangle - V^+\langle f,m\rangle)$$

и, следовательно,

$$|V\langle f_{\{+\}},x\rangle - f_{\{+\}} - h_{|x|}| \le |V\langle V^+\langle f,m\rangle,x\rangle -$$
$$-V^+\langle f,m\rangle - h_{|x|}| + 2.(V^+\langle f,m\rangle - f_{\{+\}}) \le$$
$$\le 2.|V^+\langle f,max(m,m+x)\rangle - V^+\langle f,m\rangle| + 2.(V^+\langle f,m\rangle -$$
$$-f_{\{+\}}) \le 2.(V^+\langle f,max(m,m+x)\rangle - f_{\{+\}}) + 4.(V^+\langle f,m\rangle - f_{\{+\}}).$$

Отсюда мы сразу получаем $\forall x\,(V\langle f_{\{+\}},x\rangle = f_{\{+\}} + h_{|x|})$.
Ввиду доказанного и $(V^-\langle f,0\rangle)_{\{+\}} = f_{\{-\}}$ верно также $\forall x\,(V\langle f_{\{-\}},x\rangle = f_{\{-\}} + h_{|x|})$.

<u>Определения</u>. 1) Пусть $\varphi$ функция, $t$ и $m$ НЧ, а $\mathcal{S}$ $S$-множество. Тогда мы посредством $C(\varphi,t,\mathcal{S},m)$

обозначим: мера $\mathcal{S}$ меньше чем $\frac{1}{3^t}$ и выполнено

$$\forall xy\,(x \in 0 \Delta 1 \;\&\; \neg (x \in \mathcal{S}) \;\&\; |y - x| < \frac{1}{n} \supset$$

$$\supset |\varphi(y) - \varphi(x)| \leq \frac{1}{t} \cdot |y - x|).$$

2) Функцию $\varphi$ назовем сингулярной, если $\varphi$ – функция ограниченной вариации на $0 \Delta 1$ и для любого НЧ $t$ существуют НЧ $n_t$ и $S$-множество $\mathcal{S}^t$ такие, что $C(\varphi, t, \mathcal{S}^t, n_t)$.

Замечание 4. Если $\varphi_1$ и $\varphi_2$ сингулярные функции и $\varphi_1 - \varphi_2$ функция ограниченной вариации на $0 \Delta 1$, то по замечанию 1 из [6] $\varphi_1 - \varphi_2$ сингулярная функция.

Лемма 2. Если $\varphi$ сингулярная функция, то

1) для почти всех КДЧ $x$ из $0 \Delta 1$ верно $D(0, \varphi, x)$ и

2) выполнено $\alpha(\varphi)$ и для любой абсолютно непрерывной функции $g$ верно $\alpha(\varphi + g)$ и $V\langle \varphi + g, 0\rangle =$ $= V\langle \varphi, 0\rangle + V\langle g, 0\rangle$. В частности,

(7) $$\forall x\,(V\langle \varphi, x\rangle = V\langle \varphi, 0\rangle + h_{|x|}).$$

Доказательство. а) Часть 1) утверждения непосредственно следует из определения сингулярной функции и замечания 1 из [6].

б) Пусть $w$ и $z$ КДЧ, а $m$ НЧ, $Var(w, \varphi, 0 \Delta 1)\;\&$ $\& \; |z| < m$.

Существуют $S$-множество $\mathcal{S}$ и НЧ $n$ и $\ell$ такие, что $C(\varphi, 6m, \mathcal{S}, n)$ и для $n_1 \geq 8 \cdot 3^{n+\ell+6m}$ выполнено

(8) $$w - \frac{1}{6m} < W(\varphi, \{\frac{i}{n_1}\}_{i=0}^{n_1}).$$

Тогда $\sum_{i=1}^{m_1} \nu\langle \mathcal{G}\rangle (\frac{i-1}{m_1} \Delta \frac{i}{m_1}) = \nu \langle \mathcal{G}\rangle (0 \Delta 1) < \frac{1}{3^{6m}}$

и, следовательно, согласно теореме 1.3 из [3] существуют дизъюнктные возрастающие системы НЧ $\mathcal{D}$ и $\mathcal{E}$ такие, что $\mathcal{E}$ содержит не больше чем $m_1 \cdot \frac{9}{8 \cdot 3^{6m}}$ НЧ и выполнено

$$\forall i ((1 \le i \le m_1 \equiv (i \in \mathcal{D} \vee i \in \mathcal{E})) \;\&$$
$$\& \; (i \in \mathcal{D} \supset \nu \langle \mathcal{G} \rangle (\frac{i-1}{m_1} \Delta \frac{i}{m_1}) < \frac{1}{m_1}) \;\&$$
$$(i \in \mathcal{E} \supset \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{m_1} < \nu \langle \varphi \rangle (\frac{i-1}{m_1} \Delta \frac{i}{m_1}))) \; .$$

Согласно замечанию 2 мы получаем

$$\sum_{i \in \mathcal{D}} |x| \cdot \frac{1}{m_1} \le \sum_{i \in \mathcal{D}} | \varphi(\frac{i}{m_1}) - \varphi(\frac{i-1}{m_1}) - x \,\cdot$$
$$\cdot (\frac{i}{m_1} - \frac{i-1}{m_1}) | + 2 \cdot \sum_{i \in \mathcal{D}} \frac{2}{6m} \cdot \frac{1}{m_1} - \sum_{i \in \mathcal{D}} |\varphi(\frac{i}{m_1}) - \varphi(\frac{i-1}{m_1})| ,$$
$$\sum_{i \in \mathcal{E}} |\varphi(\frac{i}{m_1}) - \varphi(\frac{i-1}{m_1})| \le \sum_{i \in \mathcal{E}} |\varphi(\frac{i}{m_1}) - \varphi(\frac{i-1}{m_1}) -$$
$$- x \cdot (\frac{i}{m_1} - \frac{i-1}{m_1})| + |x| \cdot \sum_{i \in \mathcal{E}} \frac{1}{m_1} < \sum_{i \in \mathcal{E}} |\varphi(\frac{i}{m_1}) -$$
$$- \varphi(\frac{i-1}{m_1}) - x \cdot (\frac{i}{m_1} - \frac{i-1}{m_1})| - \sum_{i \in \mathcal{E}} |x| \cdot \frac{1}{m_1} + \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{3^{6m}} \cdot m$$

и, следовательно, по (8)

$$w + |x| - \frac{1}{m} < W(\varphi - h_x, \{\frac{i}{m_1}\}_{i=0}^{m_1}) \; .$$

С другой стороны, для любой В-системы РЧ $\{c_i\}_{i=0}^{r}$ верно

$$W(\varphi - h_x, \{c_i\}_{i=0}^{r}) \le W(\varphi, \{c_i\}_{i=0}^{r}) + |x| \le w + |x| \; .$$

Итак, $\mathrm{Var}\,(w + |x|, \varphi - h_x, 0 \Delta 1)$ .

Мы доказали $\alpha(\varphi)$ и для любого КДЧ $x$ –

$V\langle \varphi, x \rangle (0 \Delta 1) = V \langle \varphi, 0 \rangle (0 \Delta 1) + |x|$ . Но тогда ввиду $\forall x y\,(0 \le x < y \le 1 \supset V\langle\varphi, x\rangle(x \Delta y) \le V\langle\varphi, 0\rangle(x \Delta y) + |x| \cdot (y - x))$ и теоремы 6.8 из [3] верно

$$V\langle\varphi, x\rangle = V\langle\varphi, 0\rangle + h_{|x|} .$$

Из доказанного нами (7) следует по замечанию 1 остаток 2).

<u>Теорема 1</u>. Функция $\varphi$ является сингулярной тогда и только тогда, когда $\alpha(\varphi)$ и

(9) $\forall x\,(V\langle\varphi; x\rangle(0 \Delta 1) = V\langle\varphi, 0\rangle(0 \Delta 1) + |x|)$ .

<u>Замечание 5</u>. В классической математике для всякой сингулярной функции $\varphi$ верно (9).

<u>Лемма 3</u>. Пусть $\psi$ неубывающая функция, $\alpha(\psi)$, $k$ целое число, $0 \le k$, а $p$ и $s$ НЧ такие, что $1 \le s \le 3^k$ и

$$\psi\left(\frac{s}{3^k}\right) - \psi\left(\frac{s-1}{3^k}\right) + \frac{1}{3^{2p+9}} \cdot \frac{1}{3^k} =$$
$$= V\left\langle\psi, \frac{1}{3^{2p+9}}\right\rangle\left(\frac{s-1}{3^k} \Delta \frac{s}{3^k}\right) .$$

Тогда можно построить НЧ $l_0$, $p+4 < l_0$, такое, что для любого НЧ $l$, $l_0 \le l$, существует возрастающая система НЧ $\mathcal{C}$, для которй выполнено

$$\forall i\,(i \in \mathcal{C} \supset (s-1) \cdot 3^l + 1 < i < s \cdot 3^l \;\&$$

(10) $$\&\, \forall j\,(i - 1 \le j \le i + 1 \supset \psi\left(\frac{j}{3^{k+l}}\right) - \psi\left(\frac{j-1}{3^{k+l}}\right) <$$
$$< \frac{1}{3^{2p+8}} \cdot \frac{1}{3^{k+l}})) \;\&\; \sum_{i \in \mathcal{C}} \left|\frac{i-1}{3^{k+l}} \Delta \frac{i}{3^{k+l}}\right| = \left(1 - \frac{1}{3^{p+2}}\right) \cdot \frac{1}{3^k} .$$

<u>Доказательство</u>. Существует НЧ $l_0$, $p+4 < l_0$, такое, что для всякого НЧ $l$, $l_0 \le l$, верно

$$\psi\left(\frac{s}{3^k}\right) - \psi\left(\frac{s-1}{3^k}\right) + \frac{1}{3^{2n+9}} \cdot \frac{1}{3^k} -$$

$$- \frac{1}{3^{3n+13+k}} < \sum_{i=(s-1)\cdot 3^\ell+1}^{s\cdot 3^\ell} \left| \psi\left(\frac{i}{3^{k+\ell}}\right) - \psi\left(\frac{i-1}{3^{k+\ell}}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{3^{2n+9}} \cdot \left(\frac{i}{3^{k+\ell}} - \frac{i-1}{3^{k+\ell}}\right)\right| .$$

Пусть $\ell$ НЧ, $\ell_0 \leq \ell$ . Мы определим $i_1 \rightleftharpoons (s-1) \cdot 3^\ell + 1$ и $i_2 \rightleftharpoons s \cdot 3^\ell$ .

Допустим, что

$$\forall i\,(i_1 \leq i \leq i_2 \supset (A(i) \vee B(i))) , \tag{11}$$

где $\forall i\,((A(i) \rightleftharpoons i_1 \leq i \leq i_2 \,\&\, (\psi(\frac{i}{3^{k+\ell}}) - \psi(\frac{i-1}{3^{k+\ell}}) < < \frac{1}{3^{2n+9}} \cdot \frac{1}{3^{k+\ell}})) \,\&\, (B(i) \rightleftharpoons i_1 \leq i \leq i_2 \,\&\, \neg A(i)))$ .

Тогда мы получаем

$$\psi\left(\frac{s}{3^k}\right) - \psi\left(\frac{s-1}{3^k}\right) + \frac{1}{3^{2n+9}} \cdot \frac{1}{3^k} - \frac{1}{3^{3n+13+k}} <$$

$$< \sum_{B(i)} \left(\psi\left(\frac{i}{3^{k+\ell}}\right) - \psi\left(\frac{i-1}{3^{k+\ell}}\right)\right) - \sum_{B(i)} \frac{1}{3^{2n+9}} \cdot \frac{1}{3^{k+\ell}} +$$

$$+ \sum_{A(i)} \frac{1}{3^{2n+9}} \cdot \frac{1}{3^{k+\ell}} - \sum_{A(i)} \left(\psi\left(\frac{i}{3^{k+\ell}}\right) - \psi\left(\frac{i-1}{3^{k+\ell}}\right)\right)$$

и, следовательно,

$$0 \leq 2 \cdot \sum_{A(i)} \left(\psi\left(\frac{i}{3^{k+\ell}}\right) - \psi\left(\frac{i-1}{3^{k+\ell}}\right)\right) + 2 \cdot \frac{1}{3^{2n+9}} \cdot$$

$$\cdot \sum_{B(i)} \frac{1}{3^{k+\ell}} < \frac{1}{3^{3n+13+k}}$$

и

$$\sum_{A(i)} \frac{1}{3^{k+\ell}} = \frac{1}{3^k} - \sum_{B(i)} \frac{1}{3^{k+\ell}} > \frac{1}{3^k}\left(1 - \frac{1}{3^{n+4}}\right) .$$

Как мы знаем, верно двойное отрицание (11). Согласно принципу А. Маркова и {18} из [2] существуют возрастающие системы НЧ $\mathscr{C}_0$ , $\mathscr{C}_1$ , $\mathscr{C}_2$ и $\mathscr{C}_3$ такие, что

$$\forall i\,(i \in \mathscr{C}_0 \supset A(i))\ \&\ \sum_{i \in \mathscr{C}_0} \frac{1}{3^{k+l}} > \frac{1}{3^k}\cdot\left(1-\frac{1}{3^{p+4}}\right)\ \&$$

$$\&\ \forall i j\,(1 \le j \le 3 \supset$$

$$\supset (i \in \mathscr{C}_j \equiv (i_1 < i < i_2\ \&\ i \in \mathscr{C}_0\ \&\ \exists m\,(i+j = 3m)))).$$

Пусть $\lambda$ число элементов $\mathscr{C}_0$ и для НЧ $j$, $1 \le j \le$ $\le 3$, $\lambda_j$ - число элементов $\mathscr{C}_j$, а $\tau_j$ число тех НЧ $i$ из $\mathscr{C}_j$, для которых верно $i-1 \in \mathscr{C}_0\ \&\ i+1 \in \mathscr{C}_0$. Тогда мы имеем $3^l\cdot\left(1-\frac{1}{3^{p+4}}\right) < \lambda \le \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+2$,

$\forall j\,(1 \le j \le 3 \supset \lambda_j - \tau_j \le 3^l - \lambda)$ и, следовательно,

$\tau_1+\tau_2+\tau_3 > 3^l\cdot\left(1-\frac{1}{3^{p+2}}\right)$. Итак, существует требуемая система $\mathscr{C}$.

<u>Лемма 4</u>. Пусть $\psi$ неубывающая функция, $k$, $l$, $p$ и $s$ НЧ, а $\mathscr{C}$ возрастающая система НЧ такие, что

$$p+4 < l\ \&\ 1 < s < 3^k,\quad \forall m\,\left(s-1 \le m \le s+1 \supset \psi\left(\frac{m}{3^k}\right)-\right.$$

$$\left.-\psi\left(\frac{m-1}{3^k}\right) < \frac{1}{3^{2p+6}}\cdot\frac{1}{3^k}\right)$$ и (10). Тогда существуют дизъюнктные возрастающие системы НЧ $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ такие, что

$$\forall i\,((i \in \mathscr{E}_1 \supset i \in \mathscr{C})\ \&\ ((s-1)\cdot 3^l + 1 \le i \le s\cdot 3^l \equiv$$

$$\equiv (i \in \mathscr{E}_1 \vee i \in \mathscr{E}_2)))\ \&\ \sum_{i \in \mathscr{E}_2}\left|\frac{i-1}{3^{k+l}} \Delta \frac{i}{3^{k+l}}\right| = \frac{1}{3^{p+1}}\cdot\frac{1}{3^k}\ \&$$

$$\&\ \forall i x y\,\left(i \in \mathscr{E}_1\ \&\ \frac{s-2}{3^k} \le x \le \frac{i-1}{3^{k+l}} < \frac{i}{3^{k+l}} \le y \le\right.$$

$$\left.\le \frac{s+1}{3^k} \supset 0 \le \psi(y)-\psi(x) < \frac{1}{3^p}\cdot(y-x)\right).$$

Доказательство. Для всяких НЧ $i$ и $j$, $0 \le j \le 3$, и ЦЧ $q$ и $t$ мы обозначим

$$u_j \rightleftharpoons (s-2+j)\cdot 3^{\ell} ,$$

$$(u_0 < i \le u_3 \supset \xi_i \rightleftharpoons 3^{k+\ell}\cdot(\psi(\frac{i}{3^{k+\ell}}) - \psi(\frac{i-1}{3^{k+\ell}}))) ,$$

$$Z(i,q,t) \rightleftharpoons i \in \mathcal{C} \,\&\, u_0 < q \le i \le t \le u_3 ,$$

$$(Z(i,q,t) \supset \eta_{i,q,t} \rightleftharpoons \frac{1}{t-q+1}\cdot\sum_{n=q}^{t} \xi_n) \text{ и}$$

$$(i \in \mathcal{C} \supset \zeta_i \rightleftharpoons \max_{Z(i,q,t)} \eta_{i,q,t}) .$$

Систему $\mathcal{C}$ можно согласно теореме 1.3 из [3] разделить в две группы $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ такие, что

$$\forall i\, ((i \in \mathcal{B}_1 \supset \zeta_i < \frac{1}{3^{p+1}}) \,\&\, (i \in \mathcal{B}_2 \supset \frac{1}{3^{p+2}} < \zeta_i)) .$$

Пусть $\lambda_j$ число элементов $\mathcal{B}_j$ $(1 \le j \le 2)$. Ввиду (10) выполнено $\lambda_1 + \lambda_2 = 3^{\ell}\cdot(1 - \frac{1}{3^{p+2}})$ .

Заметим, что $\forall i\, q\, t\, x\, y\, (Z(i,q,t) \,\&\, \frac{q-1}{3^{k+\ell}} \le x \le$

$$\le \frac{q}{3^{k+\ell}} < \frac{i}{3^{k+\ell}} \le \frac{t-1}{3^{k+\ell}} \le y \le \frac{t}{3^{k+\ell}} \supset 0 \le \frac{\psi(y)-\psi(x)}{y-x} \le$$

$$\le \eta_{i,q,t}\cdot\frac{y-x+\frac{2}{3^{k+\ell}}}{y-x} \le 3\cdot\eta_{i,q,t} \le 3\cdot\zeta_i )$$

и, следовательно,

$$\forall i\, x\, y\, (i \in \mathcal{C} \,\&\, \frac{s-2}{3^{k}} \le x \le \frac{i-1}{3^{k+\ell}} < \frac{i}{3^{k+\ell}} \le y \le$$

$$\le \frac{s+1}{3^{k}} \supset 0 \le \frac{\psi(y)-\psi(x)}{y-x} \le 3\cdot\zeta_i ) .$$

Таким образом, для завершения доказательства достаточно показать, что $\lambda_2 \le 3^{\ell}\cdot\frac{1}{3^{p+2}}$ .

Допустим, что $\mathcal{B}_2$ непустая система. Тогда можно построить систему троек НЧ $\{ i_j \,\square\, q_j \,\square\, t_j \}_{j=1}^{r}$ такую, что $\{ t_j - q_j + 1 \}_{j=1}^{r}$ – невозрастающая система НЧ,

$$\forall j ( 1 \leq j \leq r \supset Z( i_j, q_j, t_j ) \;\&$$

$$\& \; \frac{1}{3^{p+2}} < \eta_{i_j, q_j, t_j} \;\&\; ( j < r \supset$$

$$\supset \forall m ( 1 \leq m \leq j \supset \neg ( q_m - ( t_m - q_m + 1 ) \leq$$

$$\leq i_{j+1} \leq t_m + ( t_m - q_m + 1 ))))) \;\&$$

$$\& \; \forall i ( i \in \mathcal{C} \;\&\; \forall j ( 1 \leq j \leq r \supset \neg ( q_j - ( t_j - q_j + 1 ) \leq$$

$$\leq i \leq t_j + ( t_j - q_j + 1 ))) \supset i \in \mathcal{B}_1 ) .$$

Тогда $\{ \frac{q_j - 1}{3^{k+l}} \,\Delta\, \frac{t_j}{3^{k+l}} \}_{j=1}^{r}$ система дизъюнктных сегментов, выполнено

$$\sum_{m=1}^{r} \frac{t_m - q_m + 1}{3^{p+2}} < \sum_{m=1}^{r} \sum_{j=q_m}^{t_m} \xi_j \leq \sum_{j=u_1+1}^{u_3} \xi_j =$$

$$= 3^{k+l} \cdot ( \psi ( \frac{b+1}{3^k} ) - \psi ( \frac{b-2}{3^k} )) < 3^l \cdot \frac{3}{3^{2p+6}}$$

и, следовательно, $\lambda_2 \leq 3 . \sum_{m=1}^{r} ( t_m - q_m + 1 ) < 3^l \cdot \frac{1}{3^{p+2}}$ .

<u>Доказательство теоремы 1</u>. I) Если $\varphi$ сингулярная функция, то по лемме 2 выполнено $\alpha(\varphi)$ и (9).

II) Пусть верно $\alpha(\varphi)$ и (9). Тогда, как показано в доказательстве леммы 2, выполнено (7). Согласно лемме 1 $\alpha ( V^+ \langle \varphi, 0 \rangle ) \;\&\; \alpha ( V^- \langle \varphi, 0 \rangle )$ . Если $x$ КДЧ, то мы на основании (7) и леммы 1 получаем

$$V \langle V^+ \langle \varphi, 0 \rangle, x \rangle = V^+ \langle V^+ \langle \varphi, 0 \rangle, x \rangle +$$

$$+ V^-\langle V^+\langle \varphi, 0\rangle, x\rangle = V^+\langle \varphi, x^+\rangle + h_{x^-} +$$

$$+ V^-\langle \varphi, x^+\rangle - V^-\langle \varphi, 0\rangle = V\langle \varphi, x^+\rangle + h_{x^-} -$$

$$- V^-\langle \varphi, 0\rangle = V\langle \varphi, 0\rangle + h_{x^+} + h_{x^-} - V^-\langle \varphi, 0\rangle =$$

$$= V^+\langle \varphi, 0\rangle + h_{|x|}$$

и, аналогично, $V\langle V^-\langle \varphi, 0\rangle, x\rangle = V^-\langle \varphi, 0\rangle + h_{|x|}$ .

Ввиду замечания 4 для завершения доказательства достаточно показать, что если $\psi$ неубывающая функция, для которой верно $\alpha(\psi) \,\&\, \forall x (V\langle \psi, x\rangle = V\langle \psi, 0\rangle + h_{|x|})$ , то $\psi$ является сингулярной.

Пусть $t$ НЧ. Мы построим $S$-множество $\mathcal{S}$ и НЧ $m$ такие, что $C(\psi, t, \mathcal{S}, m)$ .

1) Определим $k_1 \rightleftharpoons 0$, $p_1 \rightleftharpoons t+1$ и $s_1 \rightleftharpoons 1$. Тогда согласно лемме 3 существуют НЧ $\ell_1$, $p_1 + 4 < \ell_1$, и возрастающая система НЧ $a_1$ такие, что

$$\forall i \,(i \in a_1 \supset 1 < i < 3^{\ell_1} \,\&\, \forall j \,(i-1 \le j \le i+1 \supset$$

$$\supset \psi\left(\frac{j}{3^{\ell_1}}\right) - \psi\left(\frac{j-1}{3^{\ell_1}}\right) < \frac{1}{3^{2t+10}} \cdot \frac{1}{3^{\ell_1}})) \,\&$$

$$\& \sum_{i \in a_1} \left| \frac{i-1}{3^{\ell_1}} \,\Delta\, \frac{i}{3^{\ell_1}} \right| \ge 1 - \frac{1}{3^{t+2}} \quad .$$

В $\mathcal{S}$ мы на первом шаге включим все сегменты

$$\frac{i-1}{3^{\ell_1}} \,\Delta\, \frac{i}{3^{\ell_1}} , \quad 1 \le i \le 3^{\ell_1} \,\&\, \neg\,(i \in a_1) ,$$

и определим $k_2 \rightleftharpoons k_1 + \ell_1$ .

2) Пусть $m$ НЧ, $1 < m$ , пусть уже построены НЧ $k_m$ и возрастающая система НЧ $a_{m-1}$ такие, что сегменты системы $\{\frac{s-1}{3^{k_m}} \,\Delta\, \frac{s}{3^{k_m}}\}_{s \in a_{m-1}}$ не перекрываются

с сегментами пока включенными в $\mathcal{J}$ и вместе с ними покрывают $0 \Delta 1$ и выполнено

$$\forall i \, (i \in \mathcal{a}_{m-1} \supset 1 < i < 3^{k_m} \; \&$$

$$\& \; \forall j \, (i-1 \leq j \leq i+1 \supset \psi(\frac{j}{3^{k_m}}) - \psi(\frac{j-1}{3^{k_m}}) <$$

$$< \frac{1}{3^{2t+2m+6}} \cdot \frac{1}{3^{k_m}})) \& \sum_{i \in \mathcal{a}_{m-1}} |\frac{i-1}{3^{k_m}} \Delta \frac{i}{3^{k_m}}| \geq 1 - \frac{3^{m-1}-1}{2 \cdot 3^{t+m}} \; .$$

Мы определим $r_m \rightleftharpoons t + m$ и для всякого НЧ $s$, $s \in \mathcal{a}_{m-1}$, к $\psi$, $k_m$, $r_m$ и $s$ применим леммы 3 и 4. Мы получим НЧ $l_m$, $t+m+4 < l_m$, и для всякого $s \in \mathcal{a}_{m-1}$ дизъюнктные возрастающие системы НЧ $\mathcal{E}_{m,s,1}$ и $\mathcal{E}_{m,s,2}$ такие, что

$$\forall i \, (i \in \mathcal{E}_{m,s,1} \supset (s-1) \cdot 3^{l_m} + 1 < i < s \cdot 3^{l_m} \; \&$$

$$\& \; \forall j \, (i-1 \leq j \leq i+1 \supset \psi(\frac{j}{3^{k_{m+1}}}) - \psi(\frac{j-1}{3^{k_{m+1}}}) <$$

$$< \frac{1}{3^{2t+2m+8}} \cdot \frac{1}{3^{k_{m+1}}}) \; \& \; \forall x y \, (\frac{s-2}{3^{k_m}} \leq x \leq \frac{i-1}{3^{k_{m+1}}} <$$

$$< \frac{i}{3^{k_{m+1}}} \leq y \leq \frac{s+1}{3^{k_m}} \supset 0 \leq \psi(y) - \psi(x) <$$

$$< \frac{1}{3^{t+m}} \cdot (y-x))) \; \& \; \forall i \, ((s-1) \cdot 3^{l_m} + 1 \leq i \leq s \cdot 3^{l_m} \equiv$$

$$\equiv (i \in \mathcal{E}_{m,s,1} \vee i \in \mathcal{E}_{m,s,2})) \; \&$$

$$\& \sum_{i \in \mathcal{E}_{m,s,2}} |\frac{i-1}{3^{k_{m+1}}} \Delta \frac{i}{3^{k_{m+1}}}| = \frac{1}{3^{t+m+1}} \cdot \frac{1}{3^{k_m}} \; ,$$

где $k_{m+1} \rightleftharpoons k_m + l_m$ .

В $\mathcal{J}$ мы на этом шаге включим все сегменты

$\frac{i-1}{3^{k_{m+1}}} \Delta \frac{i}{3^{k_{m+1}}}$, где $\exists s \, (s \in \mathcal{a}_{m-1} \; \& \; i \in \mathcal{E}_{m,s,2})$

Сумма длин этих сегментов не больше чем $\frac{1}{3^{t+m+1}}$ и, следовательно, если мы посредством $a_m$ обозначим возрастающую систему НЧ, которая является объединением систем $\mathscr{E}_{m,s,1}$ , $s \in a_{m-1}$ , то

$$\sum_{i \in a_m} \left| \frac{i-1}{3^{k_{m+1}}} \Delta \frac{i}{3^{k_{m+1}}} \right| \geq 1 - \frac{3^{m-1}-1}{2 \cdot 3^{t+m}} - \frac{1}{3^{t+m+1}} = 1 - \frac{3^m - 1}{2 \cdot 3^{t+m+1}} .$$

Заметим, что сегменты пока включенные в $\mathscr{G}$ не перекрываются с сегментами системы

$\{\frac{i-1}{3^{k_{m+1}}} \Delta \frac{i}{3^{k_{m+1}}}\}_{i \in a_m}$ и вместе с ними покрывают $0 \Delta 1$ .

Итак, $\mathscr{G}$ $S$ -множество меры меньшей чем $\frac{1}{3^t}$ .

Пусть $x$ КДЧ, $x \in 0 \Delta 1$ & $\neg (x \in \mathscr{G})$ . Тогда существует последовательность НЧ $\{i_m\}_m$ такая, что

$$\forall m \left( \frac{i_m - 1}{3^{k_{m+1}}} < x < \frac{i_m}{3^{k_{m+1}}} \ \& \ i_m \in a_m \right) .$$

Пусть $x$ и $y$ КДЧ, $x < x < y$ & $|y - x| < \frac{1}{3^{k_2}}$ .

Если существует НЧ $m$ такое, что $\frac{1}{3^{k_{m+1}}} \leq y - x < \frac{1}{3^{k_m}}$ , то $2 \leq m$ & $i_m \in a_m$ и, следовательно,

$$0 \leq \psi(y) - \psi(x) \leq \psi\left(\max\left(\frac{i_m}{3^{k_{m+1}}}, y\right)\right) -$$

$$- \psi\left(\min\left(x, \frac{i_m - 1}{3^{k_{m+1}}}\right)\right) < \frac{1}{3^{t+m}} \cdot \left(y - x + \frac{1}{3^{k_{m+1}}}\right) \leq$$

$$\leq \frac{2}{3^{t+m}} \cdot (y - x) \leq \frac{2}{3^{t+2}} \cdot (y - x) .$$

Ввиду

$\neg\neg \exists m \left(\frac{1}{3^{k_{m+1}}} \leq y - x < \frac{1}{3^{k_m}}\right) \ \& \ \forall v w \left(v \leq w \equiv \neg\neg (v \leq w)\right)$

верно $0 \leq \psi(y) - \psi(x) \leq \frac{1}{3^{t+1}} \cdot (y - x)$ .

Согласно теореме Г. Цейтина [2] $\psi$ непрерывна и мы получаем

$$\forall x y \left( x \le z \le y \;\&\; |y - x| < \frac{1}{3^{k_2}} \supset \right.$$
$$\left. \supset 0 \le \psi(y) - \psi(x) \le \frac{1}{3^{t+1}} \cdot (y - x) \right) .$$

Таким образом, выполнено $C(\psi, t, \mathcal{Y}, 3^{k_2})$ .

<u>Теорема 2</u>. Функция $\psi$ представима в виде $\varphi + g$ , где $\varphi$ сингулярная функция, а $g$ абсолютно непрерывная функция, тогда и только тогда, когда верно $\alpha(\psi)$ и сходятся последовательности КДЧ $\{V^+\langle\psi, m\rangle(0 \Delta 1)\}_m$ и $\{V^-\langle\psi, -m\rangle(0 \Delta 1)\}_m$ .

<u>Доказательство</u>. I) Пусть $\psi = \varphi + g$ , где $\varphi$ и $g$ обладают описанными свойствами. Тогда согласно [8], лемме 2 и замечанию 3 выполнено $\alpha(g) \;\&\; \alpha(\psi)$ и для всякого КДЧ $v$ верно

$$V^+\langle\psi, v\rangle(0\Delta 1) + V^-\langle\psi, v\rangle(0\Delta 1) = V\langle\psi, v\rangle(0 \Delta 1) =$$
$$= V\langle\varphi + g - h_v, 0\rangle(0\Delta 1) = V\langle\varphi, 0\rangle(0\Delta 1) +$$
$$+ V\langle g, v\rangle(0\Delta 1) = V^+\langle\varphi, 0\rangle(0\Delta 1) + V^-\langle\varphi, 0\rangle(0\Delta 1) +$$
$$+ V^+\langle g, v\rangle(0\Delta 1) + V^-\langle g, v\rangle(0\Delta 1) \quad \text{и}$$
$$V^+\langle\psi, v\rangle(0\Delta 1) - V^-\langle\psi, v\rangle(0\Delta 1) = \psi(1) - \psi(0) - v =$$
$$= \varphi(1) - \varphi(0) + (g(1) - g(0) - v) =$$
$$= V^+\langle\varphi, 0\rangle(0\Delta 1) - V^-\langle\varphi, 0\rangle(0\Delta 1) +$$
$$+ V^+\langle g, v\rangle(0\Delta 1) - V^-\langle g, v\rangle(0\Delta 1) .$$

Но тогда

$$V^+\langle\psi, v\rangle(0\Delta 1) = V^+\langle\varphi, 0\rangle(0\Delta 1) + V^+\langle g, v\rangle(0\Delta 1)$$
$$\text{и } V^-\langle\psi, v\rangle(0\Delta 1) = V^-\langle\varphi, 0\rangle(0\Delta 1) + V^-\langle g, v\rangle(0\Delta 1) .$$

Отсюда мы на основании части 4) леммы 1 получаем

$V^+\langle\psi,m\rangle(0\Delta 1)\xrightarrow[m\to\infty]{} V^+\langle\varphi,0\rangle(0\Delta 1)$ и

$V^-\langle\psi,-m\rangle(0\Delta 1)\xrightarrow[n\to\infty]{} V^-\langle\varphi,0\rangle(0\Delta 1)$ .

II ) Пусть $\psi$ функция такая, что $\alpha(\psi)$ и сходятся последовательности КДЧ $\{V^+\langle\psi,m\rangle(0\Delta 1)\}_m$ и $\{V^-\langle\psi,-m\rangle(0\Delta 1)\}_m$ . Тогда согласно части 5 леммы 1 и теореме 1 существуют сингулярные функции $\psi_{\{+\}}$ и $\psi_{\{-\}}$ такие, что $\alpha(\psi_{\{+\}}-\psi_{\{-\}})$ и функция $\psi-\psi_{\{+\}}+\psi_{\{-\}}$ является абсолютно непрерывной на $0\Delta 1$ . На основании замечания 4 знаем, что $\psi_{\{+\}}-\psi_{\{-\}}$ - сингулярная функция.

<u>Следствие</u>. Пусть $\psi$ функция, для которой верно $\alpha(\psi)$ и сходятся последовательности КДЧ $\{V^+\langle\psi,m\rangle(0\Delta 1)\}_m$ и $\{V^-\langle\psi,-m\rangle(0\Delta 1)\}_m$ . Тогда существует $\{G_m\}_m\in L_1$ такое, что для почти всех КДЧ $x$ из $0\Delta 1$ выполнено $\exists z(P(z,\{G_m\}_m,x)\ \&$ $\&\ D(z,\psi,x))$ .

<u>Доказательство</u>. Достаточно использовать теорему 2, лемму 2 и теорему 2 из [5].

<u>Обозначение</u>. Для любых функции $\psi$, КДЧ $y$ и НЧ $m$ - $\beta\langle y,m\rangle$ функция такая, что $\forall x(\beta\langle y,m\rangle(x)=min(max(y-\frac{1}{m},0,x),1,y+\frac{1}{m}))$ , а $\psi*\beta\langle y,m\rangle$ - суперпозиция функций $\psi$ и $\beta\langle y,m\rangle$ .

<u>Лемма 5</u>. Пусть $\psi$ функция такая, что $(\mathcal{a}(\psi)\vee\forall y(0\le y\le 1\supset\neg\neg\exists m\ \mathcal{a}(\psi*\beta\langle y,m\rangle)))$ . Тогда $\psi$ представима в виде суммы сингулярной и абсо-

лютно непрерывной функции в том и только том случае, если $\psi$ абсолютно непрерывна на $0 \Delta 1$.

<u>Доказательство</u>. Заметим, что $(\mathfrak{a}(\psi) \supset$

$\supset \forall y m (0 \leq y \leq 1 \supset \mathfrak{a}(\psi * \beta \langle y, m \rangle))) \,\&\, (\alpha(\psi) \supset$

$\supset \forall y m (0 \leq y \leq 1 \supset \alpha(\psi * \beta \langle y, m \rangle)))$.

Пусть $\psi = \varphi + g$, где $\varphi$ сингулярная функция, а функция $g$ абсолютно непрерывна на $0 \Delta 1$. Тогда по теореме 2 из [5] и лемме 2 для всяких КДЧ $y$, $0 \leq y \leq 1$, и НЧ $m$ для почти всех КДЧ $x$ из сегмента

$max(y - \frac{1}{m}, 0) \Delta min(y + \frac{1}{m}, 1)$ верно

$\exists z (D(z, g, x) \,\&\, D(z, \psi, x))$. Следовательно, согласно теореме 2, [5] и теореме из [8]

(12) $\forall y (0 \leq y \leq 1 \supset \neg\neg \exists m \forall x (|x - y| \leq \frac{1}{m} \supset$

$\supset g(x) - g(y) = \psi(x) - \psi(y)))$.

Мы докажем $\psi = g + \psi(0) - g(0)$.

Допустим, что для КДЧ $x$, $0 < x \leq 1$, выполнено $\neg (g(x) - g(0) = \psi(x) - \psi(0))$. Тогда можно построить последовательность сегментов $\{u_m \Delta v_m\}_m$ и КДЧ $y$ такие, что

$\forall n (0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq y \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 1 \,\&\, \neg (g(v_n) - g(u_n) =$

$= \psi(v_n) - \psi(u_n)) \,\&\, |u_{n+1} \Delta v_{n+1}| = \frac{1}{2} \cdot |u_n \Delta v_n|)$.

Но это противоречит (12).

<u>Замечание 6</u>. 1) Каждая из неубывающих функций $\mathcal{F}$, построенных в примерах 1 - 3 из [7], удовлетворяет предположениям леммы 5, но не является абсолютно непрерывной

на $0 \Delta 1$ (см.[5]).

2) Если $\psi$ функция, а $\Phi$ покрытие такие, что $\psi = \psi/\Phi$, то $\psi$ удовлетворяет предположениям леммы 5.

<u>Пример</u>. Существует неубывающая функция $\psi$ такая, что

1) для почти всех КДЧ $x$ из $0 \Delta 1$ верно $D(0, \psi, x)$,

2) $\psi$ не является сингулярной функцией, и

3) $\psi$ нельзя представить в виде суммы сингулярной и абсолютно непрерывной функции.

<u>Доказательство</u>. Пусть $f$ неубывающая функция, являющаяся конструктивным аналогом функции $\Theta$ из [1], стр. 232-3. Тогда $f(0) = 0 \;\&\; f(1) = 1$ и для всякого НЧ $n$ существует система дизъюнктных рациональных сегментов, содержащихся в $0 \Delta 1$, $\mathcal{D}_n$ такая, что сумма длин сегментов из $\mathcal{D}_n$ равна $(\frac{2}{3})^n$, $f$ является постоянной на всяком сегменте, который не перекрывается с сегментами из $\mathcal{D}_n$, и $0\Delta \frac{1}{3^n} \in \mathcal{D}_n \;\&\; \frac{3^n-1}{3^n} \Delta 1 \in \mathcal{D}_n$.

Пусть $\Phi$ покрытие, $\forall m \, (\sum_{i=1}^{m} |\Phi_i| < \frac{1}{2})$.

Легко построить неубывающую функцию $\psi$ такую, что

$$\forall k x \, (x \in \Phi_k \supset \psi(x) = \text{Эл}(\Phi_k) + |\Phi_k| \cdot f(\frac{x - \text{Эл}(\Phi_k)}{|\Phi_k|})).$$

Тогда выполнено

$$\forall x k \, ((x = \text{Эл}(\Phi_k) \vee x = \text{Эп}(\Phi_k)) \supset \psi(x) = x).$$

Для всяких НЧ $m$ и $p$ мы посредством $\mathcal{E}_{m,p}$ обозначим систему сегментов

$(\mathcal{Э}\ell(\Phi_p)+a\cdot|\Phi_p|)\Delta(\mathcal{Э}\ell(\Phi_p)+b\cdot|\Phi_p|)$, где $a\Delta b\in\mathcal{D}_m$ .

Для НЧ $t$ пусть $\mathcal{Y}^t$ $S$-множество, образованное сегментами систем $\mathcal{E}_{t+k,k}$, $1\le k$ . Тогда мера $\mathcal{Y}^t$ меньше чем $(\frac{2}{3})^t$ и выполнено $\forall x(x\in 0\Delta 1\ \&\ \neg(x\in\mathcal{Y}^t)\supset D(0,\psi,x))$. Итак, мы доказали 1).

Допустим, что $\psi$ сингулярная функция. Тогда для всякого НЧ $t$ существуют $S$-множество $\mathcal{Y}^t$ и НЧ $m_t$ такие, что $C(\psi,t,\mathcal{Y}^t,m_t)$ . Можно построить НЧ $k$ и систему дизъюнктных сегментов $\{e_{2i-1}\ \Delta\ e_{2i}\}_{i=1}^{\tau}$ такие, что сегменты объединения этой системы с системой $\{\Phi_j\}_{j=1}^{k+1}$ не перекрываются, содержатся в $0\Delta 1$ и покрывают сегмент $0\Delta 1$ и выполнено

$$\forall i\,(1\le i\le\tau\supset|e_{2i-1}\Delta e_{2i}|<\frac{1}{m_3})\,.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{\tau}|e_{2i-1}\ \Delta\ e_{2i}|>\frac{1}{2}\ \&$$

$$\&\ \forall\ell\,(1\le\ell\le 2\tau\supset\exists m\,(e_\ell=\mathcal{Э}m\,(\Phi_m)))\ \&$$

$$\&\ \forall i\,(1\le i\le\tau\supset|e_{2i-1}\Delta e_{2i}|=\psi(e_{2i})-\psi(e_{2i-1}))\,.$$

Пусть $i$ НЧ, $1\le i\le\tau$ . Если $\nu\langle\mathcal{Y}^3\rangle(e_{2i-1}\Delta e_{2i})<|e_{2i-1}\Delta e_{2i}|$, то мы ввиду $C(\psi,3,\mathcal{Y}^3,m_3)$ имеем

$$|e_{2i-1}\Delta e_{2i}|=\psi(e_{2i})-\psi(e_{2i-1})\le\frac{1}{3}\cdot(e_{2i}-e_{2i-1}),$$

что невозможно.

Итак,

$$\forall i\,(1 \le i \le r \supset \nu\langle \mathcal{Y}^3\rangle(e_{2i-1} \Delta e_{2i}) = |e_{2i-1} \Delta e_{2i}|)$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2} < \sum_{i=1}^{r} |e_{2i-1} \Delta e_{2i}| = \sum_{i=1}^{r} \nu\langle \mathcal{Y}^3\rangle(e_{2i-1} \Delta e_{2i}) \le$$
$$\le \nu\langle \mathcal{Y}^3\rangle(0 \Delta 1) < \frac{1}{3^3} .$$

Таким образом, верно 2).

На основании 1) и 2), леммы 2 и теоремы 6 из [5], сразу получаем 3).

Литература


[1] НАТАНСОН И.П.: Теория функций вещественной переменной, Москва, 1957.

[2] ЦЕЙТИН Г.С.: Алгорифмические операторы в конструктивных метрических пространствах, Проблемы конструктивного направления в математике 2 (сборник работ), Труды Мат.инст.им.В.А.Стеклова т. LXVII (1962), 295-361.

[3] ЗАСЛАВСКИЙ И.Д.: Некоторые свойства конструктивных вещественных чисел и конструктивных функций, там же, стр. 385-457.

[4] ЗАСЛАВСКИЙ И.Д. и ЦЕЙТИН Г.С.: О сингулярных покрытиях и связанных с ними свойствах конструктивных функций, там же, стр. 458-502.

[5] ДЕМУТ О.: Пространства $L_{\kappa}$ и $S$ в конструктивной математике, Comment.Math.Univ. Carolinae 10(1969), 261-284.

[6] ДЕМУТ О.: Об измеримости множеств по Лебегу в конструктивной математике, Comment.Math.Univ. Carolinae 10(1969),463-492.

[7] ДЕМУТ О.: Об интегрируемости производных от конструктивных функций,Comment.Math.Univ. Carolinae 11(1970),667-690.

[8] ДЕМУТ О.: Необходимое и достаточное условие абсолютной непрерывности конструктивных функций, Comment.Math.Univ.Carolinae 11(1970),705-725.

(Oblatum 24.2. 1971)

Matematicko-fyzikální fakulta
Karlova universita
Sokolovská 83, Praha Karlín
Československo