Ştefan Cruceanu

Régularisation pour les problèmes à opérateurs monotones et la méthode de Galerkin

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 12 (1971), No. 1, 1--13

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/105321`

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
12,1 (1971)

REGULARISATION POUR LES PROBLÈMES À OPÉRATEURS MONOTONES ET LA MÈTHODE DE GALERKINE

Stefan CRUCEANU, Bucuresti

L'objet de cette Note est l'étude d'une méthode de régularisation pour les équations à operateurs monotones (non-potentiels).

L'idée du départ c'est d'employer en tant que facteur régularisant un opérateur monotone de type potentiel.

Ainsi on peut, outre les concepts topologiques usités d'habitude pour assurer l'existence des solutions des équations à opérateurs monotones, utiliser aussi des concepts variationnels qui permettent la localisation d'une solution de l'équation initiale vers laquelle converge dans la norme la suite des solutions régularisantes.

Le critère de régularité par rapport auquel on justifie l'applicabilité de la méthode - c'est la résolution par la méthode de Galerkine.

1. Préliminaires

On va d'abord établir les notations et on va rappeler certaines définitions.

Soit X un espace de Banach réel et soit X^* son dual. La dualité entre les deux espaces sera notée par $\langle\ ,\ \rangle$.

AMS, Primary 47H05,47H15,49D15 Ref.Ž. 7.978.4
Secondary 47H10

On utilisera les symboles " $\longrightarrow$ " et " $\rightharpoonup$ " pour désigner la convergence forte et faible dans X.

Soit $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite croissante de sous-espaces de dimensions finies de X, ainsi que $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n} = X$ et soit $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ la suite des projeteurs correspondants ($P_n \in L(X)$, $P_n^2 = P_n$ et $P_n(X) = X_n$) ainsi que $\|P_n\| \leq C$ $(\forall)\, n = 1, 2, \dots$.

Si P_n^* est l'adjoint de l'opérateur P_n, on notera par $Y_n = P_n^*(X^*)$.

Le quadruple de suites $\Gamma_n = (\{X_n\}, \{Y_n\}; \{P_n\}, \{P_n^*\})$ s'appelle "schéma d'approximation Galerkine" ([2], [8]).

Soit l'application $T: X \longrightarrow X^*$. L'équation

$$Tx = f \;;\; f \in X^*$$

s'appelle resolvable par approximation ([8]) (faiblement résolvable par approximation) par rapport à Γ_n si elle admet une solution unique x_0 et si pour chaque $n \in N$ l'équation

$$P_n^* Tx = P_n^* f \;; \quad x \in X_n$$

admet une solution unique $x_n \in X_n$ ainsi que $x_n \longrightarrow x_0$ ($x_n \rightharpoonup x_0$) lorsque $n \longrightarrow \infty$.

L'opérateur $T: X \longrightarrow X^*$ s'appelle monotone si

$$\langle Tx - Ty, x - y \rangle \geq 0 \quad (\forall) \quad x, y \in X .$$

Si dans l'inégalité en haut on a le signe $>$ pour tous les $x \neq y$ alors l'opérateur T s'appelle strictement monotone.

S'il y a la fonction $\omega : R_+ \longrightarrow R_+$, monotone avec $\omega(0) = 0$ ainsi que

$$\langle Tx - Ty, x - y \rangle \geq \omega(\|x - y\|) \;(\forall)\; x, y \in X$$

alors l'opérateur T s'appelle uniformement monotone.

Une fonctionnelle $g: X \longrightarrow R$ s'appelle strictement convexe si

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{1}{2} g(x) + \frac{1}{2} g(y) \quad (\forall)\ x, y \in X,\ x \neq y.$$

S'il y a une fonction $\omega : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, monotone avec $\omega(0) = 0$ ainsi que

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2} g(x) + \frac{1}{2} g(y) - \omega(\|x-y\|) \ (\forall) x, y \in X$$

alors la fonctionnelle g s'appelle uniformement convexe.

Si la fonctionnelle g est différentiable Gâteaux à gradient G alors sa convexité stricte est équivalente à la monotonie stricte de l'opérateur G et sa convexité uniforme est équivalente à la monotonie uniforme de l'opérateur G ([7]).

2. Hypothèses

Soit D un ensemble convexe borné et fermé de l'espace de Banach réel, reflexif et séparable X. On suppose que $\theta \in \operatorname{int} D$.

Soit $T : X \longrightarrow X^*$ un opérateur monotone, continu qui satisfait à la condition:

$\langle Tx, x \rangle \geq 0 \quad (\forall)\ x \in \partial D$ (la frontière de D).

Quoique dans les hypothèses en haut l'équation

(1) $$Tx = \theta$$

admet dans D (cf.[6]) au moins une solution, pourtant en général elle n'est pas résolvable par l'approximation.

Si $\Gamma_n = (\{X_n\}, \{Y_n\} ; \{P_n\}, \{P_n^*\})$ est un schéma d'approximation Galerkine, alors tout ce qu'on peut affirmer sur la résolvabilité par approximation de l'équation (1) est que l'équation approximante

$$P_n^* Tx = \theta \qquad n = 1, 2, \dots \qquad x \in X_n$$

admet une solution (en général pas unique) dans l'ensemble $D_n = D \cap X_n$, et lorsque $n \longrightarrow \infty$ toute sous-suite faiblement convergente formée des solutions des équations approximantes a pour limite une solution de l'équation (1)([5]).

Pour construire une solution de l'équation (1) on lui rattachera une famille d'équations dépendantes d'un paramètre $\varepsilon > 0$ ainsi que chacune des équations de la famille soit résolvable par approximation par rapport à Γ_m.

On démontrera que lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$ la suite des solutions des équations de la famille convergera fortement vers une certaine solution de l'équation initiale.

Soit g une fonctionnelle strictement convexe, différentiable Fréchet à gradient G. On suppose que G est continu et borné (applique les ensembles bornés de X dans des ensembles bornés de X^*) et $G\theta = \theta$ (si la fonctionnelle g ne satisfait pat à cette dernière condition alors elle peut être remplacée par la fonctionelle $g(x) - \langle G\theta, x \rangle$).

3. La résolvabilité par approximation des équations régularisantes

Pour chaque $\varepsilon > 0$ on considère l'équation régularisante:

(2) $$Tx + \varepsilon Gx = \theta \quad .$$

Théorème 1. a) Pour chaque $\varepsilon > 0$ l'équation (2) est faiblement resolvable par approximation.

b) Si la fonctionnelle g est uniformement convexe, alors l'équation (2) est resolvable par approximation.

Démonstration: a) Pour $(\forall)\, x \in \partial D$ on a

(3) $$\langle Tx + \varepsilon Gx, x \rangle = \langle Tx, x \rangle + \varepsilon \langle Gx - G\theta, x - \theta \rangle > 0 \quad .$$

Soit $D_n = D \cap X_n$. De la relation (3) il résulte pour $x \in \partial D_n$

(4) $\langle P_n^* Tx + \varepsilon P_n^* Gx, x\rangle = \langle Tx + \varepsilon Gx, P_n x\rangle = \langle Tx + \varepsilon Gx, x\rangle \geq 0.$

En identifiant les espaces finies dimensionels X_n et Y_n de l'inégalité (4) (cf.[6],p.127) il résulte qu'il existe l'élément $x_n^\varepsilon \in D_n$ ainsi que

(4a) $$P_n^* Tx_n^\varepsilon + \varepsilon P_n^* Gx_n^\varepsilon = \theta \quad .$$

L'opérateur $P_n^* T + \varepsilon P_n^* G$ étant strictement monotone sur X_n il résulte que x_n^ε est la solution unique dans X_n de l'équation $P_n^* Tx + \varepsilon P_n^* Gx = \theta$.

La suite $\{x_n^\varepsilon\}_{n=1}^\infty$ étant incluse dans l'ensemble borné D de l'espace reflexif X , contient une sous-suite $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ qui tend dans la topologie faible vers un certain élément x^ε .

L'ensemble D étant faiblement fermé (il est convexe et fermé) on trouve que $x^\varepsilon \in D$.

On montrera que x^ε est la solution de l'équation (2).

De la monotonie de l'opérateur $T^\varepsilon = T + \varepsilon G$ on a:

$$\langle T^\varepsilon P_{n_k} x - T^\varepsilon x_{n_k}^\varepsilon , P_{n_k} x - x_{n_k}^\varepsilon\rangle \geq 0 \quad (\forall)\ x \in X$$

c'est à dire

(5) $$\langle P_{n_k}^* T^\varepsilon P_{n_k} x - P_{n_k}^* T^\varepsilon x_{n_k}^\varepsilon , x - x_{n_k}^\varepsilon\rangle \geq 0 \quad .$$

Lorsque $k \longrightarrow \infty$, $x_{n_k}^\varepsilon \longrightarrow x^\varepsilon$, et parce que T^ε est continu on aura (cf.[2]) $P_{n_k}^* T^\varepsilon P_{n_k} x \longrightarrow Tx$.

Donc à la limite pour $k \longrightarrow \infty$, puisque $P_{n_k}^* T^\varepsilon x_{n_k}^\varepsilon = \theta$, la relation (5) devient

(6) $$\langle T^\varepsilon x , x - x^\varepsilon\rangle \geq 0 \quad (\forall)\ x \in X$$

ce qui représente une condition suffisante ([1]) pour que

$$T^{\varepsilon} x^{\varepsilon} = \theta \ .$$

Parce que l'opérateur $T^{\varepsilon} = T + \varepsilon G$ est strictement monotone l'équation (2) n'admet pour solution que x^{ε} . Donc toute sous-suite faiblement convergente de la suite $\{x_n^{\varepsilon}\}_{n=1}^{\infty}$ a pour limite l'élément x^{ε} .

Ainsi $x_n^{\varepsilon} \longrightarrow x^{\varepsilon}$ lorsque $n \longrightarrow \infty$.

b) L'opérateur G étant le gradient d'une fonctionnelle uniformement convexe on aura

$$\langle T^{\varepsilon} P_n x^{\varepsilon} - T^{\varepsilon} x_n^{\varepsilon} , P_n x^{\varepsilon} - x_n^{\varepsilon} \rangle \geq \varepsilon\, \omega(\| P_n x - x_n \|) \geq 0$$

ou puisque $P_n x_n^{\varepsilon} = x_n^{\varepsilon}$:

$$(7)\ \langle P_n^* T^{\varepsilon} P_n x^{\varepsilon} - P_n^* T^{\varepsilon} x_n^{\varepsilon} , x^{\varepsilon} - x_n^{\varepsilon} \rangle \geq \varepsilon\, \omega(\| P_n x^{\varepsilon} - x_n^{\varepsilon} \|) \geq 0 \ .$$

Mais $T_n^{\varepsilon} x_n^{\varepsilon} = \theta$, et lorsque $n \longrightarrow \infty$ il résulte $x_n^{\varepsilon} \longrightarrow x^{\varepsilon}$ et $P_n^* T^{\varepsilon} P_n x^{\varepsilon} \longrightarrow T^{\varepsilon} x^{\varepsilon} = \theta$.

Donc le premier membre de l'inégalité (7) tend vers zero.

On déduit que $\omega(\| P_n x - x_n \|) \longrightarrow 0$ c'est à dire $P_n x^{\varepsilon} - x_n^{\varepsilon} \longrightarrow \theta$ lorsque $n \longrightarrow \infty$.

D'autre part

$$P_n x^{\varepsilon} \longrightarrow x^{\varepsilon}$$

donc $x_n^{\varepsilon} \longrightarrow x^{\varepsilon}$ lorsque $n \longrightarrow \infty$.

Q.E.D.

4. Le théorème de convergence

Soit

$$\mathcal{U}^* = \{ x / x \in \mathcal{D} \ ; \ Tx = \theta \}$$

comme on l'a déjà remarqué l'ensemble $\mathcal{U}^*$ est non-vide. Étant inclus dans l'ensemble $\mathcal{D}$, l'ensemble $\mathcal{U}^*$ est borné. Parce que l'opérateur T est continu et monotone il résulte que l'ensemble $\mathcal{U}^*$ est convexe et fermé ([1]). Ainsi la fonctionnelle g réalise son minimum sur $\mathcal{U}^*$ dans un point (unique) x^*_{min}

$$g(x^*_{min}) = \min_{x \in \mathcal{U}^*} g(x) .$$

Par suite la suivante proposition sera nécessaire:

<u>Lemme 1</u>(Demjanov et Rubinov [4]). <u>L'élément</u> $x^*_{min} \in \mathcal{U}^*$ <u>réalise le minimum de la fonctionnelle</u> g <u>sur l'ensemble</u> $\mathcal{U}^*$ <u>si et seulement si</u>

(8) $$\langle G x^*_{min} , x - x^*_{min} \rangle \geq 0 \quad (\forall)\ x \in \mathcal{U}^* .$$

Le théorème qui suit établit la liaison qui existe entre les solutions x^ε de la famille d'équations régularisantes (2) et les solutions de l'équation (1).

<u>Théorème 2</u>. a) <u>Si</u> $\varepsilon \to 0$ <u>alors</u> $x^\varepsilon \rightharpoonup x^*_{min}$.

b) <u>Si la fonctionnelle</u> g <u>est uniformement convexe alors de</u> $\varepsilon \to 0$ <u>il résulte</u> $x^\varepsilon \longrightarrow x^*_{min}$.

<u>Démonstration</u>: De la réflexivité de l'espace X et du fait que la famille $\{x^\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ est bornée (est incluse dans D) il résulte l'existence d'un élément $x_0 \in D$ et d'une suite $\varepsilon_n \to 0$ ($\varepsilon_n > 0$) ainsi que

$$x^{\varepsilon_n} \rightharpoonup x_0 .$$

On démontrera que $x_0 \in \mathcal{U}^*$. Pour cela il suffit de montrer que

(9) $$\langle Tx, x - x_0 \rangle \geq 0 \quad (\forall)\ x \in X .$$

Soit $x \in X$. De la monotonie de l'opérateur T on a

$$\langle Tx - Tx^{\varepsilon_n}, x - x^{\varepsilon_n} \rangle \geq 0 \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Parce que

$$Tx^{\varepsilon_n} + \varepsilon_n G x^{\varepsilon_n} = \theta$$

l'inégalité en haut devient

(10) $0 \leq \langle Tx+\varepsilon_n Gx^{\varepsilon_n}, x-x^{\varepsilon_n}\rangle = \langle Tx, x-x^{\varepsilon_n}\rangle + \varepsilon_n \langle Gx^{\varepsilon_n}, x-x^{\varepsilon_n}\rangle$.

Le second terme de la somme de droite tend vers zero lorsque $n \longrightarrow \infty$, car l'opérateur G étant borné on a

$$0 \leq |\langle \varepsilon_n G x^{\varepsilon_n}, x-x^{\varepsilon_n}\rangle| \leq \varepsilon_n \sup_{z \in D} \|Gz\| \cdot \sup_{z \in D} \|x-z\| \longrightarrow 0 .$$

Donc, à la limite l'inégalité (10) donne

$$\langle Tx, x - x_0 \rangle \geq 0$$

c'est à dire $x_0 \in \mathcal{U}^*$.

Soit à présent $x \in \mathcal{U}^*$ arbitraire. Des égalités

$$Tx + \varepsilon_n Gx = \varepsilon_n Gx ,$$

$$Tx^{\varepsilon_n} + \varepsilon_n G x^{\varepsilon_n} = \theta ,$$

on obtient:

$$\langle Tx - Tx^{\varepsilon_n}, x-x^{\varepsilon_n}\rangle + \varepsilon_n \langle Gx - Gx^{\varepsilon_n}, x - x^{\varepsilon_n}\rangle = \varepsilon_n \langle Gx, x - x^{\varepsilon_n}\rangle .$$

Les opérateurs T et G étant monotones il résulte

$$\langle Gx, x - x^{\varepsilon_n}\rangle \geq 0 .$$

À la limite, lorsque $n \rightarrow \infty$, puisque $x^{\varepsilon_n} \longrightarrow x_0$ on obtient

(11) $\quad \langle Gx, x - x_0\rangle \geq 0 \qquad (\forall)\ x \in \mathcal{U}^*$.

L'ensemble $\mathcal{U}^*$ étant convexe, l'élément $x_t = (1-t)x + t x_0$ $\quad t \in (0, 1)$ appartient lui aussi à l'ensemble $\mathcal{U}^*$.

En écrivant la relation (11) pour x_t on obtient

$$(1-t)\langle Gx_t, x-x_t\rangle \geq 0 \qquad \text{ou}$$
$$\langle Gx_t, x-x_0\rangle \geq 0 \ .$$
A la limite lorsque $t \longrightarrow 1$, l'opérateur G étant continu il résulte
$$\langle Gx_0, x-x_0\rangle \geq 0 \ .$$
Du Lemme 1 on déduit que $x_0 = x^*_{min}$

Ainsi, lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$, toute suite faiblement convergente de la famille $\{x^\varepsilon\}_{\varepsilon > c}$ a pour limite l'élément x^*_{min} .

Donc $x^\varepsilon \longrightarrow x^*_{min}$ lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$.

b) Des égalités
$$Tx^*_{min} + \varepsilon G x^*_{min} = \varepsilon G x^*_{min} \ ,$$
$$Tx^\varepsilon + Gx^\varepsilon = \theta \ ,$$
on obtient:
$$\langle Tx^*_{min} - Tx^\varepsilon, x^*_{min} - x^\varepsilon\rangle + \varepsilon\langle Gx^*_{min} - Gx^\varepsilon, x^*_{min} - x^\varepsilon\rangle =$$
$$= \varepsilon\langle Gx^*_{min}, x^*_{min} - x^\varepsilon\rangle \ .$$
De là, l'opérateur T étant monotone, on déduit
$$0 \leq \omega(\| x^*_{min} - x\|) \leq \langle Gx^*_{min} - Gx^\varepsilon, x^*_{min} - x^\varepsilon\rangle \leq$$
$$\leq \langle Gx^*_{min}, x^*_{min} - x^\varepsilon\rangle \ .$$
A la limite, lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$, puisque $x^\varepsilon \longrightarrow x^*_{min}$ il résulte
$$\langle Gx^*_{min}, x^*_{min} - x^\varepsilon\rangle \longrightarrow 0$$
et de l'inégalité précédente on déduit
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \omega(\| x^*_{min} - x^\varepsilon\|) = 0 \quad ,$$
c'est à dire:

$$\| x^*_{min} - x^\varepsilon \| \longrightarrow 0 \qquad \text{lorsque} \quad \varepsilon \longrightarrow 0 .$$

Q.E.D.

<u>Remarques</u> 1. Si X est un espace de Hilbert alors le procédé indiqué en haut peut être utilisé pour construire les points fixes de ..taines classes d'opérateurs.

Ainsi, si $A : X \longrightarrow X$ est un opérateur continu, ainsi que l'opérateur $I - A$ (I - l'opérateur identité) est monotone et si A satisfait à la condition Leray-Schauder ([3])

$$\langle Ax, x \rangle \leq \| x \|^2 \qquad (\forall) \; x \in \partial D$$

alors pour chaque $\varepsilon > 0$ l'opérateur $A - \varepsilon G$ admet dans X un point fixe unique $x^\varepsilon \in D$. Si $\varepsilon \longrightarrow 0$ alors $x^\varepsilon \longrightarrow x^*_{min}$ (ou $x^\varepsilon \longrightarrow x^*_{min}$ si g est une fonctionnelle uniformement convexe) où x^*_{min} est ce point fixe de l'opérateur A, qui minimise la fonctionnelle g sur l'ensemble des points fixes de A qui appartiennent à l'ensemble D. On remarque que pour le cas particulier $G = I$ (l'opérateur identité est le gradient Fréchet de la fonctionnelle uniformement convexe $\frac{1}{2} \| x \|^2$) ce résultat a été obtenu par Browder et Petryshyn ([3]) et utilisé pour obtenir les points fixes des opérateurs non-linéaires par la méthode des approximations successives.

2. Si l'opérateur monotone et continu $U : X \longrightarrow X^*$ est coercif, c'est à dire

$$\frac{\langle Ux, x \rangle}{\| x \|} \longrightarrow \infty \qquad \text{lorsque} \quad \| x \| \longrightarrow \infty$$

alors étant donné $y \in X^*$ il existe une boule fermée

$S^{\nu}(\theta) = \{x \in X : \|x\| \leq R^{\nu}\}$ ainsi que

$$\langle Ux, x\rangle \geq \langle y, x\rangle \quad \text{pour } x \in \partial S^{\nu}(\theta) .$$

En prenant $Tx = Ux - y$, $x \in X$ et $D = S^{\nu}(\theta)$ les résultats obtenus en haut peuvent être appliqués pour construire la solution de l'équation

$$Ux = y .$$

3. On connait le résultat suivant, conséquence de la méthode de régularisation de Tychonov pour le problème du minimum des fonctionnelles convexes ([7]):

Si $T : X \longrightarrow X^*$ est un opérateur monotone et potentiel ainsi que l'équation

$$Tx = \theta$$

admet des solutions et si G est un opérateur strictement monotone et potentiel, la fonctionnelle g étant coércive, ($g(x) \longrightarrow \infty$ lorsque $\|x\| \longrightarrow \infty$) alors pour chaque $\varepsilon > 0$ l'équation

$$Tx + \varepsilon Gx = \theta$$

admet une solution unique x^{ε}. Si $\varepsilon \longrightarrow 0$ alors x^{ε} converge dans la topologie faible de X vers cette solution de l'équation $Tx = \theta$ qui minimise la fonctionnelle g

On peut considérer que la méthode qu'on vient d'étudier est l'équivalent non-variationnel de ce résultat.

B i b l i o g r a p h i e

[1] F.E. BROWDER: Problèmes non-linéaires. Les Presses de l'Université de Montréal,1966.

[2] F.E. BROWDER: Approximation - solvability of nonlinear

functional equations in normed linear spaces. Arch.Rat.Mech.Anal.26(1967),33-43.

[3] F.E. BROWDER, W.V. PETRYSHYN: Construction of fixed points of nonlinear mappings in Hilbert space. J.Math.Anal.Appl.20(1967),197-228.

[4] V.E. DEMJANOV, A.M. RUBINOV: The minimization of a smooth convex functional on a convex set. SIAM J.Control 5(1967),280-294.

[5] D.G. de FIGUEIREDO: Fixed-point theorems for nonlinear operators and Galerkin approximations. J.Diff.Eq.3(1967),271-281.

[6] R. KAČUROVSKIJ: Nelinejnye monotonnye operatory v banachovych prostranstvach. Usp.Mat.Nauk XIII (1968),121-168.

[7] E.S. LEVITIN, B.T. POLJAK: O schodimosti minimizirujuščich posledovatel'nostej v zadačach na uslovnyj ekstremum. Dokl.Akad.Nauk SSSR 168, 5,1966.

[8] W.V. PETRYSHYN: Projection methods in nonlinear numerical functional analysis. J.Math.Mech.17 (1967),353-372.

Centrul de Calcul Econòmic si Cibernetica Economica
Bucuresti
Str.M. Eminescu Nr.5-7
Romania

(Oblatum 19.8.1970)