Osvald Demuth

Необходимое и достаточное условие абсолютной непрерывности конструктивных функций

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 11 (1970), No. 4, 705--726

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105309

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
11,4 (1970)

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ АБСОЛЮТНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ КОНСТРУКТИВНЫХ ФУНКЦИЙ

О. ДЕМУТ, Прага

В классической математике функция является абсолютно непрерывной тогда и только тогда, когда обладает ниже определенным свойством $\mathcal{a}$. И.Д. Заславский построил конструктивную функцию, которая удовлетворяет условию Липшица (и тем более обладает свойством $\mathcal{a}$) и вместе с тем не является абсолютно непрерывной.

В настоящей работе показано, что конструктивная функция φ абсолютно непрерывна на сегменте $0 \Delta 1$ в том и только том случае, если а) φ обладает свойством $\mathcal{a}$ и

б) для всякой линейной функции h $-(\varphi - h)$ является функцией ограниченной вариации на $0 \Delta 1$.

В дальнейшем натуральными числами (НЧ) называем положительные целые числа, конструктивными действительными числами (КДЧ) - вещественные дуплексы ([1],стр.77).

Буквы k, l, m и n служат переменными для НЧ, i и j - переменными для целых чисел, a и b - переменными для рациональных чисел (РЧ), а u, v, w, x, y и z - переменными для КДЧ.

Точное дизъюнктное рациональное сегментное покрытие сегмента $0 \Delta 1$ - Φ ([4],стр.461-2) назовем просто <u>покрытием</u>, если $Эл(\Phi_1) = 0$ & $Эm(\Phi_2) = 1$. Везде определенную конструктивную функцию действительной переменной f назовем функцией, если

$$\forall x((x \le 0 \supset f(x) = f(0)) \& (1 \le x \supset f(x) = f(1))).$$

Для функции f и покрытия Φ обозначим через f/Φ функцию такую, что

$$\forall k x (x \in \Phi_k \supset f/\Phi(x) = f(\text{Эл}(\Phi_k)) + \frac{f(\text{Эп}(\Phi_k)) - f(\text{Эл}(\Phi_k))}{|\Phi_k|} \cdot (x - \text{Эл}(\Phi_k))).$$

Заметим, что согласно теореме Г.С. Цейтина всякая функция непрерывна в каждой точке ([2], стр.342).

Определения. Пусть f функция, x, y и z КДЧ, $0 \le x \le \le y \le 1$, а $*$ один из знаков $+$ и $-$.

1) Систему РЧ $\{a_i\}_{i=0}^{n}$ назовем В-системой, если $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = 1$.

2) Для любой В-системы $\{a_i\}_{i=0}^{n}$ обозначим

а) $W(f, \{a_i\}_{i=0}^{n}, x \Delta y) \rightleftharpoons \sum_{j=1}^{n} |f(max(min(a_j, y), x)) - f(max(min(a_{j-1}, y), x))|$, $W^*(f, \{a_i\}_{i=0}^{n}, x \Delta y) \rightleftharpoons \rightleftharpoons \sum_{j=1}^{n} (f(max(min(a_j, y), x)) - f(max(min(a_{j-1}, y), x)))^*$

и

б) $W(f, \{a_i\}_{i=0}^{n}) \rightleftharpoons W(f, \{a_i\}_{i=0}^{n}, 0 \Delta 1)$,

$W^*(f, \{a_i\}_{i=0}^{n}) \rightleftharpoons W^*(f, \{a_i\}_{i=0}^{n}, 0 \Delta 1)$.

3) Мы обозначим $Var(z, f, x \Delta y)$ (соотв. $Var^*(z, f, x \Delta y)$), если а) для всякой В-системы $\{a_i\}_{i=0}^{n}$ выполнено $W(f, \{a_i\}_{i=0}^{n}, x \Delta y) \le z$ (соотв. $W^*(f, \{a_i\}_{i=0}^{n}, x \Delta y) \le z$) и

б) для всякого НЧ n существует В-система $\{c_i^n\}_{i=0}^{m_n}$ такая, что $z - \frac{1}{n} < W(f, \{c_i^n\}_{i=0}^{m_n}, x \Delta y)$ (соотв. $z - \frac{1}{n} < W^*(f, \{c_i^n\}_{i=0}^{m_n}, x \Delta y)$).

4) Скажем, что f является функцией ограниченной вариации на $x \Delta y$, если $\exists u\,(Var\,(u, f, x \Delta y))$.

5) f назовем абсолютно непрерывной (на сегменте $0 \Delta 1$), если для всякого НЧ n существует полигональная функция $\mathcal{F}_n$ такая, что для любой В-системы $\{a_i\}_{i=0}^{p}$ выполнено $W(f - \mathcal{F}_n, \{a_i\}_{i=0}^{p}) < \frac{1}{n}$.

6) Скажем, что f обладает свойством $\mathcal{a}$ и обозначим $\mathcal{a}(f)$, если для всякого НЧ n существует НЧ l_n такое, что для любой системы неперекрывающихся сегментов, содержащихся в $0 \Delta 1$, - $\{u_i \Delta v_i\}_{i=1}^{t}$ верно

$$\left(\sum_{i=1}^{t} |u_i \Delta v_i| < \frac{1}{l_n} \supset \sum_{i=1}^{t} |f(v_i) - f(u_i)| < \frac{1}{n}\right).$$

7) Посредством h_z обозначим функцию такую, что $\forall x\,(h_z(x) = z \cdot max\,(min\,(x, 1), 0))$.

8) $\alpha(f) \rightleftharpoons \forall a \exists u\,(Var\,(u, f - h_a, 0 \Delta 1))$.

<u>Замечание 1</u>. Для всяких КДЧ u и v выполнено $|u| = u^+ + u^-$, $(u+v)^+ \le u^+ + v^+$ и $(u+v)^- \le u^- + v^-$. На этом основании легко доказать, что для любых функции f и КДЧ x и y, $0 \le x < y \le 1$, верно

$$(\exists z\,(Var\,(z, f, x \Delta y)) \equiv \exists w z\,(Var^+(w, f, x \Delta y) \,\&\, Var^-(z, f, x \Delta y))) \,\&$$
$$\&\, \forall w z\,(Var^+(w, f, x \Delta y) \,\&\, Var^-(z, f, x \Delta y) \supset Var\,(w+z, f, x \Delta y)).$$

<u>Теорема</u>. Функция φ абсолютно непрерывна (на $0 \Delta 1$) тогда и только тогда, когда выполнено $\mathcal{a}(\varphi) \,\&\, \alpha(\varphi)$.

Сначала мы докажем несколько лемм.

<u>Лемма 1</u>. Пусть f функция, Φ покрытие. Тогда

1) $\alpha(f) \supset \forall y \exists z\,(Var\,(z, f - h_y, 0 \Delta 1)) \,\&\, \alpha(f/\Phi)$

и

2) $\mathcal{A}(f) \supset \mathcal{A}(f/\Phi)$.

<u>Доказательство</u>. 1)а) Пусть y КДЧ, $\{a_n\}_n$ возрастающая последовательность РЧ, а $\{v_n\}_n$ последовательность КДЧ такие, что

$$\forall n \left(y - \frac{1}{2^n} < a_n < y \ \& \ \mathrm{Var}(v_n, f - h_{a_n}, 0 \Delta 1)\right) .$$

Тогда для всякой В-системы $\{e_i\}_{i=0}^{r}$ и любых НЧ n и m выполнено $|W(f-h_{a_n}, \{e_i\}_{i=0}^{r}) - W(f-h_{a_{n+m}}, \{e_i\}_{i=0}^{r})| \le$ $\le |a_n - a_{n+m}| < \frac{1}{2^n}$ и $W(f-h_{a_n}, \{e_i\}_{i=0}^{r}) - \frac{1}{2^n} <$ $< W(f-h_y, \{e_i\}_{i=0}^{r}) < W(f-h_{a_n}, \{e_i\}_{i=0}^{r}) + \frac{1}{2^n}$.

Из этого непосредственно следует, что последовательность КДЧ $\{v_n\}_n$ сходится и ее предел является вариацией функции $f - h_y$ на $0 \Delta 1$.

б) Пусть d РЧ и v КДЧ такое, что $\mathrm{Var}(v, f - h_d, 0 \Delta 1)$. Тогда существуют последовательность В-систем $\{\{a_i^n\}_{i=0}^{m_n}\}_n$ и возрастающая последовательность НЧ $\{k_n\}_n$, для которых для всякого НЧ n выполнено

$v - \frac{1}{2^n} < W(f-h_d, \{a_i^n\}_{i=0}^{m_n}) \le v \ \& \ \forall i\, (0 \le i \le m_n \supset \exists k\, (1 \le k \le$ $\le k_n + 1 \ \& \ a_i^n \in \Phi_k)) \ \& \ \forall k\, b\, (1 \le k \le k_n + 1 \ \& \ (b = \exists_\lambda(\Phi_k) \vee b =$ $= \exists_m(\Phi_k)) \supset \exists i\, (0 \le i \le m_n \ \& \ b = a_i^n)) \ \&$

$\& \ \forall i\, (0 \le i \le m_n \supset \exists j\, (0 \le j \le m_{n+1} \ \& \ a_i^n = a_j^{n+1}))$.

Для любого НЧ n мы построим В-систему $\{c_j^n\}_{j=0}^{r_n}$ и систему плюсов и минусов $\{\varepsilon_j^n\}_{j=1}^{r_n}$ такие, что

$$\forall b\, (\exists j\, (0 \le j \le r_n \ \& \ b = c_j^n) \equiv \exists k\, (1 \le k \le k_n + 1 \ \&$$

$$\& \ (b = \exists\lambda(\Phi_k) \vee b = \exists m(\Phi_k)))) \ \& \ \forall j\, (1 \le j \le r_n \supset (\varepsilon_j^n \mathtt{x} + \equiv$$

$$\equiv \exists k\, (1 \le k \le k_n + 1 \ \& \ c_{j-1}^n = \exists\lambda(\Phi_k) \ \& \ c_j^n = \exists m(\Phi_k)))) .$$

Тогда для всякого НЧ n выполнено

$$\forall j\, (1 \le j \le r_n \ \& \ \varepsilon_j^n \mathtt{x} - \supset \exists i\, (1 \le i \le m_n \ \& \ a_{i-1}^n = c_{j-1}^n \ \& \ a_i^n = c_j^n)),$$

$$W(f-h_d, \{c_j^n\}_{j=0}^{p_n}) = W(f/\Phi - h_d, \{c_j^n\}_{j=0}^{p_n}) \quad \text{и}$$

$$\frac{1}{2^n} > W(f-h_d, \{a_i^{n+1}\}_{i=0}^{m_{n+1}}) - W(f-h_d, \{a_i^n\}_{i=0}^{m_n}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{k_n+1} \sum_{\text{Эл}(\Phi_k) \le a_{i-1}^n < a_i^n \le \text{Эm}(\Phi_k)} \Big(\Big(\sum_{a_{i-1}^n \le a_{j-1}^{n+1} < a_j^{n+1} \le a_i^n} |f(a_j^{n+1}) - f(a_{j-1}^{n+1}) -$$

$$- d\cdot(a_j^{n+1} - a_{j-1}^{n+1})|\Big) - |f(a_i^n) - f(a_{i-1}^n) - d\cdot(a_i^n - a_{i-1}^n)|\Big) +$$

$$+ \sum_{\substack{1 \le i \le p_n \\ \varepsilon_i^n \equiv -}} \Big(\sum_{c_{i-1}^n \le a_{j-1}^{n+1} < a_j^{n+1} \le c_i^n} |f(a_j^{n+1}) - f(a_{j-1}^{n+1}) - d\cdot(a_j^{n+1} - a_{j-1}^{n+1})| -$$

$$- |f(c_i^n) - f(c_{i-1}^n) - d\cdot(c_i^n - c_{i-1}^n)| \ge$$

$$\ge \sum_{\substack{1 \le i \le p_n \\ \varepsilon_i^n \equiv -}} \Big(\sum_{c_{i-1}^n \le c_{j-1}^{n+1} < c_j^{n+1} \le c_i^n} |f(c_j^{n+1}) - f(c_{j-1}^{n+1}) - d\cdot(c_j^{n+1} - c_{j-1}^{n+1})| -$$

$$- |f(c_i^n) - f(c_{i-1}^n) - d\cdot(c_i^n - c_{i-1}^n)|\Big) = W(f-h_d, \{c_j^{n+1}\}_{j=0}^{p_{n+1}}) -$$

$$- W(f-h_d, \{c_i^n\}_{i=0}^{p_n}) = W(f/\Phi - h_d, \{c_j^{n+1}\}_{j=0}^{p_{n+1}}) -$$

$$- W(f/\Phi - h_d, \{c_i^n\}_{i=0}^{p_n}) \ge 0 .$$

Таким образом, последовательность КДЧ $\{W(f/\Phi - h_d, \{c_i^n\}_{i=0}^{p_n})\}_n$ сходится. Ее предел, очевидно, является вариацией функции $f/\Phi - h_d$ на сегменте $0 \Delta 1$.

2) Пусть $\{\ell_n\}_n$ возрастающая последовательность НЧ и пусть для всяких НЧ n и системы неперекрывающихся сегментов $\{a_i \Delta b_i\}_{i=1}^{p}$ выполнено $(\sum_{i=1}^{p} |a_i \Delta b_i| < \frac{1}{\ell_n} \supset \sum_{i=1}^{p} |f(b_i) - f(a_i)| < \frac{1}{n})$.

На основании свойств покрытий ([4], стр.461-2) ясно, что можно построить НЧ k_0, B-систему $\{e_i\}_{i=0}^{p}$ и систему плюсов и минусов $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{p}$ такие, что $\forall a (\exists i (0 \le i \le p \,\&\, a = e_i) \equiv$ $\equiv \exists k (1 \le k \le k_0 + 1 \,\&\, (a = \text{Эл}(\Phi_k) \vee a = \text{Эm}(\Phi_k)))) \,\&$ $\& \forall i (1 \le i \le p \supset (\varepsilon_i \equiv + \equiv \exists k (1 \le k \le k_0 + 1 \,\&\, e_{i-1} = \text{Эл}(\Phi_k) \,\&$ $\& e_i = \text{Эm}(\Phi_k)))) \,\&\, \max\limits_{\substack{1 \le i \le p \\ \varepsilon_i \equiv -}} |e_{i-1} \Delta e_i| < \frac{1}{\ell_1}$.

Существует НЧ q_0, для которого выполнено

$$\max_{1\le k\le k_0+1} \frac{|f(\text{Э}n(\Phi_k))-f(\text{Э}\lambda(\Phi_k))|}{|\Phi|} < q_0 \;\&\; \frac{1}{q_0} < \min_{1\le k\le k_0+1} |\Phi_k| .$$

Пусть n НЧ, $t_n \rightleftharpoons 4npq_0 \cdot l_{4n}$ и пусть $\{a_i \Delta b_i\}_{i=1}^{s_1}$ система неперекрывающихся рациональных сегментов, содержащихся в $0 \Delta 1$, для которой выполнено $\sum\limits_{i=1}^{s_1} |a_i \Delta b_i| < \frac{1}{t_n}$.

Мы построим систему неперекрывающихся рациональных сегментов $\{c_j \Delta d_j\}_{j=1}^{s_2}$ и систему НЧ $\{æ_j\}_{j=1}^{s_2}$ такие, что

$$\forall j (1 \le j \le s_2 \supset 1 \le æ_j \le 3 \;\&\; \exists i (1 \le i \le s_1 \;\&\; c_j \Delta d_j \subseteq a_i \Delta b_i) \;\&$$

$$\& \;\exists k l (c_j \Delta d_j \subseteq \Phi_k \;\&\; (1 \le k \le k_0 + 1 \;\&\; æ_j = 1 \vee k_0 + 1 < k \;\&$$

$$\& \;æ_j = 2) \vee k \ne l \;\&\; c_j = \text{Э}\lambda(\Phi_k) \;\&\; d_j = \text{Э}n(\Phi_l) \;\&\; æ_j = 3)) \;\&$$

$$\& \;\forall i (1 \le i \le s_1 \supset \exists k l (1 \le k \le l \le s_2 \;\&\; a_i = c_k \;\&\; b_i = d_l \;\&$$

$$\& \;\forall j (k \le j < l \supset d_j = c_{j+1}))) .$$

Тогда $\sum\limits_{j=1}^{s_2} |c_j \Delta d_j| = \sum\limits_{i=1}^{s_1} |a_i \Delta b_i| < \frac{1}{t_n}$ и

$$\sum_{i=1}^{s_1} |f/\Phi(b_i) - f/\Phi(a_i)| \le \sum_{j=1}^{s_2} |f/\Phi(d_j) - f/\Phi(c_j)| =$$

$$(1) \qquad = \sum_{\substack{1 \le j \le s_2 \\ æ_j = 1}} |f/\Phi(d_j) - f/\Phi(c_j)| + \sum_{\substack{1 \le j \le s_2 \\ æ_j = 2}} |f/\Phi(d_j) -$$

$$- f/\Phi(c_j)| + \sum_{\substack{1 \le j \le s_2 \\ æ_j = 3}} |f(d_j) - f(c_j)| .$$

Мы получаем

$$(2) \qquad \sum_{\substack{1 \le j \le s_2 \\ æ_j = 1}} |f/\Phi(d_j) - f/\Phi(c_j)| \le q_0 \cdot \sum_{j=1}^{s_2} |c_j \Delta d_j| < \frac{q_0}{t_n} \le \frac{1}{4n}$$

и ввиду $t_n > l_{4n}$

$$(3) \qquad \sum_{\substack{1 \le j \le s_2 \\ æ_j = 3}} |f(d_j) - f(c_j)| < \frac{1}{4n} .$$

Пусть $\forall j k (D(j,k) \rightleftharpoons 1 \le j \le s_2 \;\&\; æ_j = 2 \;\&\; c_j \Delta d_j \subseteq \Phi_k)$, $\{k_l\}_{l=1}^{m}$ возрастающая система всех НЧ k таких, что $\exists j (D(j,k))$, а $\{\lambda_l\}_{l=1}^{m}$ система плюсов и минусов, для которой выполнено

$\forall \ell (1 \leq \ell \leq m \supset (\lambda_\ell \mathbf{I} + \supset \frac{1}{4m \cdot p} \cdot |\Phi_{k_\ell}| < \sum_{D(j,k_\ell)} |c_j \Delta d_j|)$ &

& $(\lambda_\ell \mathbf{I} - \supset \sum_{D(j,k_\ell)} |c_j \Delta d_j| \leq \frac{1}{4m \cdot p} \cdot |\Phi_{k_\ell}|))$

(заметим, что m может оказаться равным нулю).

Мы определим $\forall j ((D_1(j) \rightleftharpoons \exists \ell (1 \leq \ell \leq m \,\&\, D(j, k_\ell)\,\&$

$\&\, \lambda_\ell \mathbf{I} +)) \,\&\, (D_2(j) \rightleftharpoons \exists \ell (1 \leq \ell \leq m \,\&\, D(j,k_\ell) \,\&\, \lambda_\ell \mathbf{I} -)))\,\&$

$\&\, \forall i \ell (E(i,\ell) \rightleftharpoons 1 \leq i \leq p \,\&\, 1 \leq \ell \leq m \,\&\, \lambda_\ell \mathbf{I} - \,\&$

$\&\, \Phi_{k_\ell} \subseteq e_{i-1} \Delta e_i)$.

Тогда $\forall i \ell (E(i,\ell) \supset \varepsilon_i \mathbf{I} -)$ и $\sum_{\substack{1 \leq j \leq s_2 \\ \varkappa_j = 2}} |f/\Phi(d_j) - f/\Phi(c_j)| =$

$= \sum_{D_1(j)} |f/\Phi(d_j) - f/\Phi(c_j)| + \sum_{D_2(j)} |f/\Phi(d_j) - f/\Phi(c_j)| \leq \sum_{\substack{1 \leq \ell \leq m \\ \lambda_\ell \mathbf{I} +}} |f(\exists m(\Phi_{k_\ell})) -$

$- f(\exists \lambda(\Phi_{k_\ell}))| + \frac{1}{4m \cdot p} \cdot \sum_{i=1}^{p} \sum_{E(i,\ell)} |f(\exists m(\Phi_{k_\ell})) - f(\exists \lambda(\Phi_{k_\ell}))|$.

Заметим, что $\sum_{\substack{1 \leq \ell \leq m \\ \lambda_\ell \mathbf{I} +}} |\Phi_{k_\ell}| < 4m \cdot p \cdot \sum_{j=1}^{s_2} |c_j \Delta d_j| < \frac{4m \cdot p}{t_m} \leq \frac{1}{\ell_{4m}}$

и $\forall i (1 \leq i \leq p \supset \sum_{E(i,\ell)} |\Phi_{k_\ell}| \leq |e_{i-1} \Delta e_i| < \frac{1}{\ell_1})$.

Таким образом,

$\sum_{\substack{1 \leq \ell \leq m \\ \lambda_\ell \mathbf{I} +}} |f(\exists m(\Phi_{k_\ell})) - f(\exists \lambda(\Phi_{k_\ell}))| < \frac{1}{4m}, \frac{1}{4m \cdot p} \cdot \sum_{i=1}^{p} \sum_{E(i,\ell)} |f(\exists m(\Phi_{k_\ell})) -$

$- f(\exists \lambda(\Phi_{k_\ell}))| < \frac{1}{4m \cdot p} \cdot \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ \varepsilon_i \mathbf{I} -}} 1 \leq \frac{1}{4m}$

и, следовательно, $\sum_{\substack{1 \leq j \leq s_2 \\ \varkappa_j = 2}} |f/\Phi(d_j) - f/\Phi(c_j)| < \frac{1}{2m}$.

Итак, мы ввиду (1) - (3) пришли к $\sum_{i=1}^{s_1} |f/\Phi(b_i) -$

$- f/\Phi(a_i)| < \frac{1}{m}$.

<u>Замечание 2</u>. Пусть f функция такая, что $\alpha(f)$. Тогда согласно лемме 1, замечанию 1 и теореме 6.8 из [3], стр. 451, выполнено

$\forall x y (0 \leq x \leq 1 \supset \exists u v z (Var(u, f - h_y, 0 \Delta x)\,\&$

$\&\, Var^+(v, f - h_y, 0 \Delta x) \,\&\, Var^-(z, f - h_y, 0 \Delta x) \,\&\, u = v + z))$ и , следовательно, существуют везде определенные конструктивные функции двух действительных переменных (КФ2ДП) g, g_1 и g_2 такие, что

$$\begin{aligned} &\forall x y ((0 \le x \le 1 \supset Var(g(y \square x), f - h_y, 0 \Delta x) \,\&\, Var^+(g_1(y \square x), \\ &f - h_y, 0 \Delta x) \,\&\, Var^-(g_2(y \square x), f - h_y, 0 \Delta x) \,\&\, g(y \square x) = \\ (4) \quad &= g_1(y \square x) + g_2(y \square x)) \,\&\, (x \le 0 \supset g(y \square x) = g_1(y \square x) = \\ &= g_2(y \square x) = 0) \,\&\, (1 \le x \supset g(y \square x) = g(y \square 1) \,\& \\ &\& \, g_1(y \square x) = g_1(y \square 1) \,\&\, g_2(y \square x) = \\ &= g_2(y \square 1))) \quad . \end{aligned}$$

Для всякой функции f, $\alpha(f)$, о которой будет в следующем речь, мы зафиксируем тройку КФ2ДП g, g_1 и g_2 такую, что (4), и для всяких КДЧ x, y и z, $x \le z$, обозначим

$$\begin{aligned} &V\langle f, y\rangle(x) \rightleftharpoons g(y \square x), \; V^+\langle f, y\rangle(x) \rightleftharpoons g_1(y \square x), \\ &V^-\langle f, y\rangle(x) \rightleftharpoons g_2(y \square x), \; V\langle f, y\rangle(x \Delta z) \rightleftharpoons V\langle f, y\rangle(z) - \\ &- V\langle f, y\rangle(x), \; V^+\langle f, y\rangle(x \Delta z) \rightleftharpoons V^+\langle f, y\rangle(z) - V^+\langle f, y\rangle(x), \\ &V^-\langle f, y\rangle(x \Delta z) \rightleftharpoons V^-\langle f, y\rangle(z) - V^-\langle f, y\rangle(x) \; . \end{aligned}$$

Заметим, что для всякого КДЧ y – $V\langle f, y\rangle$, $V^+\langle f, y\rangle$ и $V^-\langle f, y\rangle$ – неубывающие функции и верно $V\langle f, y\rangle = V^+\langle f, y\rangle + V^-\langle f, y\rangle \,\&\, V\langle f, y\rangle(0) = V^+\langle f, y\rangle(0) = V^-\langle f, y\rangle(0) = 0$.

Легко доказать следующее утверждение.

<u>Лемма 2</u>. Пусть f и g функции, Φ покрытие, a и b РЧ, а $*$ один из знаков $\le$, $=$, $\ge$, такие, что $f = f/\Phi \,\&\, g = g/\Phi \,\&\, 0 \le a < b \le 1 \,\&\, \forall k (max(Эл(\Phi_k), a) < min(Эп(\Phi_k), b) \supset (f(Эп(\Phi_k)) - f(Эл(\Phi_k))) * (g(Эп(\Phi_k)) - g(Эл(\Phi_k))))$.
Тогда $\forall x (x \in a \Delta b \supset (f(x) - f(a)) * (g(x) - g(a)))$.

<u>Лемма 3</u>. Пусть f функция и Φ покрытие такие, что $\alpha(f) \,\&\, f = f/\Phi$, а v и w КДЧ. Тогда

1) а) $V^+\langle f,v\rangle = V^+\langle f,v\rangle/\Phi$ & $V^-\langle f,v\rangle =$

$= V^-\langle f,v\rangle/\Phi$,

б) $V\langle f,v\rangle = V^+\langle f,v\rangle + V^-\langle f,v\rangle$,

$f = h_v + V^+\langle f,v\rangle - V^-\langle f,v\rangle + f(0)$,

$\forall a\, b\, (0 \le a < b \le 1 \,\&\, w \le v \supset V^+\langle f,v\rangle(a \triangle b) \le$

$\le V^+\langle f,w\rangle(a \triangle b) \,\&\, V^-\langle f,w\rangle(a \triangle b) \le$

$\le V^-\langle f,v\rangle(a \triangle b))$,

2) $\alpha(f - V^+\langle f,v\rangle)$,

(5) $V^+\langle f - V^+\langle f,v\rangle, w\rangle = V^+\langle f, min(v,w)\rangle - V^+\langle f,v\rangle$,

(6) $V^-\langle f - V^+\langle f,v\rangle, w\rangle = V^-\langle f, min(v,w)\rangle + h_{(w-v)^+}$,

3) $\alpha(f + V^-\langle f,v\rangle)$,

$V^+\langle f + V^-\langle f,v\rangle, w\rangle = V^+\langle f, max(v,w)\rangle + h_{(w-v)^-}$,

$V^-\langle f + V^-\langle f,v\rangle, w\rangle = V^-\langle f, max(v,w)\rangle - V^-\langle f,v\rangle$ и

4) если $a(f)$, то $V^+\langle f,m\rangle(0 \triangle 1) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ и $V^-\langle f,-m\rangle(0 \triangle 1) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$.

<u>Доказательство</u>. I) Легко усмотреть, что для всяких НЧ k и КДЧ x, $x \in \Phi_k$, выполнено $V\langle f,v\rangle(x) = V\langle f,v\rangle(\text{Эл}(\Phi_k)) + \left|\frac{f(\text{Эп}(\Phi_k)) - f(\text{Эл}(\Phi_k))}{|\Phi_k|} - v\right| \cdot (x - \text{Эл}(\Phi_k))$, $V^+\langle f,v\rangle(x) = V^+\langle f,v\rangle(\text{Эл}(\Phi_k)) + \left(\frac{f(\text{Эп}(\Phi_k)) - f(\text{Эл}(\Phi_k))}{|\Phi_k|} - v\right)^+ \cdot (x - \text{Эл}(\Phi_k))$, $V^-\langle f,v\rangle(x) = V^-\langle f,v\rangle(\text{Эл}(\Phi_k)) + \left(\frac{f(\text{Эп}(\Phi_k)) - f(\text{Эл}(\Phi_k))}{|\Phi_k|} - v\right)^- \cdot (x - \text{Эл}(\Phi_k))$ и

$\left(w \le v \supset \left(\frac{f(\text{Эп}(\Phi_k)) - f(\text{Эл}(\Phi_k))}{|\Phi_k|} - v\right)^+ \le \left(\frac{f(\text{Эп}(\Phi_k)) - f(\text{Эл}(\Phi_k))}{|\Phi_k|} - w\right)^+ \right.$ &

$\left.\&\left(\frac{f(\text{Эп}(\Phi_k)) - f(\text{Эл}(\Phi_k))}{|\Phi_k|} - w\right)^- \le \left(\frac{f(\text{Эп}(\Phi_k)) - f(\text{Эл}(\Phi_k))}{|\Phi_k|} - v\right)^-\right)$.

Отсюда мы ввиду $\forall y\,(|y| = y^+ + y^- \,\&\, y = y^+ - y^-)$ и на основании леммы 2 получаем часть 1) утверждения.

II) Прямым подсчетом можно убедиться в том, что

$$(7)\qquad \begin{aligned} &\forall y\,((y-(y-v)^+-w)^+ = (y-\min(v,w))^+ - (y-v)^+ \;\& \\ &\& \;(y-(y-v)^+-w)^- = (y-\min(v,w))^- + (w-v)^+). \end{aligned}$$

а) Мы докажем

(8) $Var^+(V^+\langle f,\min(v,w)\rangle(0\Delta 1) - V^+\langle f,v\rangle(0\Delta 1), f - V^+\langle f,v\rangle - h_w, 0\Delta 1)$.

Пусть $\{e_i\}_{i=0}^{p}$ В- система. Для всякого НЧ n можно построить В-систему $\{c_j^n\}_{j=0}^{q_n}$ такую, что $V^+\langle f,v\rangle(0\Delta 1) -$
$- \frac{1}{n} < W^+(f-h_v, \{c_j^n\}_{j=0}^{q_n}) \le V^+\langle f,v\rangle(0\Delta 1)$ &
& $\forall i\,(0\le i\le p \supset \exists j\,(0\le j\le q_n \,\&\, e_i = c_j^n))$
и, следовательно, ввиду (7) выполнено

$$\begin{aligned} &W^+(f-V^+\langle f,v\rangle - h_w, \{e_i\}_{i=0}^{p}) \le W^+(f-V^+\langle f,v\rangle - h_w, \\ &\{c_j^n\}_{j=0}^{q_n}) \le \sum_{j=1}^{q_n}(f(c_j^n) - f(c_{j-1}^n) - (f(c_j^n) - f(c_{j-1}^n) - \\ &- v\cdot(c_j^n - c_{j-1}^n))^+ - w\cdot(c_j^n - c_{j-1}^n))^+ + \\ &+ \sum_{j=1}^{q_n}((f(c_j^n) - f(c_{j-1}^n) - v\cdot(c_j^n - c_{j-1}^n))^+ - V^+\langle f,v\rangle(c_{j-1}^n \Delta c_j^n))^+ = \\ &= W^+(f-h_{\min(v,w)}, \{c_j^n\}_{j=0}^{q_n}) - W^+(f-h_v, \{c_j^n\}_{j=0}^{q_n}) < \\ &< V^+\langle f,\min(v,w)\rangle(0\Delta 1) - V^+\langle f,v\rangle(0\Delta 1) + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Таким образом, верно $W^+(f - V^+\langle f,v\rangle - h_w, \{e_i\}_{i=0}^{p}) \le$
$\le V^+\langle f,\min(v,w)\rangle(0\Delta 1) - V^+\langle f,v\rangle(0\Delta 1)$.

Пусть n НЧ. Существует В-система $\{a_i\}_{i=0}^{s}$ такая, что $V^+\langle f,\min(v,w)\rangle(0\Delta 1) - \frac{1}{n} < W^+(f - h_{\min(v,w)},$
$\{a_i\}_{i=0}^{s}) \le V^+\langle f,\min(v,w)\rangle(0\Delta 1)$.
Мы получаем $W^+(f - V^+\langle f,v\rangle - h_w, \{a_i\}_{i=0}^{s}) \ge$

$$\begin{aligned} &\ge \sum_{i=1}^{s}(f(a_i) - f(a_{i-1}) - (f(a_i) - f(a_{i-1}) - v\cdot(a_i - a_{i-1}))^+ - w\,\cdot \\ &\cdot\,(a_i - a_{i-1}))^+ - \sum_{i=1}^{s}(V^+\langle f,v\rangle(a_{i-1}\Delta a_i) - (f(a_i) - f(a_{i-1}) - \\ &- v\cdot(a_i - a_{i-1}))^+)^+ = W^+(f - h_{\min(v,w)}, \{a_i\}_{i=0}^{s}) - \\ &- W^+(f-h_v, \{a_i\}_{i=0}^{s}) + W^+(f-h_v, \{a_i\}_{i=0}^{s}) - \end{aligned}$$

$$- V^+ \langle f, v \rangle (0 \Delta 1) > V^+ \langle f, \min(v, w) \rangle (0 \Delta 1) -$$

$$- V^+ \langle f, v \rangle (0 \Delta 1) - \frac{1}{n} \quad .$$

Итак, (8) выполнено. При помощи 1),(7) и леммы 2 легко убедиться в том, что имеет место (5).

б) Аналогичным образом можно доказать $Var^-(V^- \langle f, \min(v,w) \rangle (0 \Delta 1) + (w-v)^+, f - V^+ \langle f, v \rangle - h_w, 0 \Delta 1)$ и (6).

в) Из а) и б) следует $\exists x (Var(x, f - V^+ \langle f, v \rangle - h_w, 0 \Delta 1))$. Ввиду того, что на КДЧ w не налагаются никакие условия, выполнено $\alpha(f - V^+ \langle f, v \rangle)$.

г) Часть 3) утверждения леммы доказывается аналогично. При этом используется верность формулы

$$\forall y ((y + (y - v)^- - w)^+ = (y - \max(v, w))^+ + (w - v)^- \ \&$$

$$\& \ (y + (y - v)^- - w)^- = (y - \max(v, w))^- - (y - v)^-) .$$

III) Предположим $\mathfrak{a}(f)$. Пусть n НЧ. Тогда существует НЧ ℓ_0 такое, что для любой системы неперекрывающихся сегментов $\{a_i \Delta b_i\}_{i=1}^{p}$ выполнено

$$(\sum_{i=1}^{p} |a_i \Delta b_i| < \frac{1}{\ell_0} \supset \sum_{i=1}^{p} |f(b_i) - f(a_i)| < \frac{1}{2n}) .$$

Мы построим НЧ m_0 , для которого верно $m_0 > \ell_0 \cdot (V^+ \langle f, 0 \rangle (0 \Delta 1) + 1)$, и B-систему $\{c_i\}_{i=0}^{r}$ такую, что $V^+ \langle f, m_0 \rangle (0 \Delta 1) \geq W^+(f - h_{m_0}, \{c_i\}_{i=0}^{r}) > V^+ \langle f, m_0 \rangle (0 \Delta 1) - \frac{1}{2n}$.

Мы покажем, что

(9) $$V^+ \langle f, m_0 \rangle (0 \Delta 1) < \frac{1}{n} \quad .$$

Ввиду теоремы 1.3 из [3], стр.399, имеем

$$V^+ \langle f, m_0 \rangle (0 \Delta 1) < \frac{1}{n} \vee V^+ \langle f, m_0 \rangle (0 \Delta 1) > \frac{3}{4n} \quad .$$

Если установлена верность (9), то мы готовы.

Если установлено $V^+\langle f, m_o\rangle (0 \Delta 1) > \frac{3}{4m}$,
то мы построим систему НЧ $\mathcal{D}$ такую, что
$\forall i (i \in \mathcal{D} \supset 1 \leq i \leq p \,\&\, (f(c_i) - f(c_{i-1}) - m_o \cdot (c_i - c_{i-1}))^+ > 0) \,\&\, \sum_{i \in \mathcal{D}} (f(c_i) - f(c_{i-1}) - m_o \cdot (c_i - c_{i-1}))^+ > V^+\langle f, m_o\rangle (0 \Delta 1) - \frac{1}{2m}$.

Тогда мы имеем $V^+\langle f, 0\rangle (0 \Delta 1) \geq V^+\langle f, m_o\rangle (0 \Delta 1) > 0$,
$V^+\langle f, 0\rangle (0 \Delta 1) \geq \sum_{i \in \mathcal{D}} (f(c_i) - f(c_{i-1}) - m_o \cdot (c_i - c_{i-1}))^+ + m_o \cdot \sum_{i \in \mathcal{D}} (c_i - c_{i-1}) > \ell_o \cdot V^+\langle f, 0\rangle (0 \Delta 1) \cdot \sum_{i \in \mathcal{D}} (c_i - c_{i-1})$

и, следовательно, $\sum_{i \in \mathcal{D}} | c_{i-1} \Delta c_i | < \frac{1}{\ell_o}$. Согласно свойствам системы $\mathcal{D}$ и НЧ ℓ_o получаем
$V^+\langle f, m_o\rangle (0 \Delta 1) - \frac{1}{2m} < \sum_{i \in \mathcal{D}} (f(c_i) - f(c_{i-1}) - m_o \cdot (c_i - c_{i-1}))^+ \leq \sum_{i \in \mathcal{D}} | f(c_i) - f(c_{i-1}) | < \frac{1}{2m}$.
Итак, мы опять пришли к (9).

Согласно части 1 настоящей леммы выполнено
$\forall m (m_o \leq m \supset V^+\langle f, m\rangle (0 \Delta 1) \leq V^+\langle f, m_o\rangle (0 \Delta 1) < \frac{1}{m})$.
$V^-\langle f, -m\rangle (0 \Delta 1) \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$ доказывается аналогичным образом.

<u>Лемма 4</u>. Пусть Φ покрытие, f и g функции, m, ℓ и p НЧ, $\{e_i\}_{i=0}^t$ В-система, $\{\gamma_i'\}_{i=1}^t$ и $\{\gamma_i''\}_{i=1}^t$ системы КДЧ, а $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^t$ система плюсов и минусов такие, что

1) $f = f/\Phi$, $g = g/\Phi$, $\alpha(g)$ и для всякой В-системы $\{c_j\}_{j=0}^q$ выполнено $W(f - g, \{c_j\}_{j=0}^q) < \frac{1}{4m} \cdot (1 - \frac{1}{2^\ell})$;

2) $\forall i (1 \leq i \leq t \supset \exists k (1 \leq k \leq p + 1 \,\&\, \exists n (\Phi_k) = e_i))$;

3) $\forall i (1 \leq i \leq t \,\&\, \varepsilon_i \mathrm{I} + \supset \gamma_i' = \gamma_i'' = \frac{g(e_i) - g(e_{i-1})}{e_i - e_{i-1}})$

и
$$\sum_{\substack{1\le i\le t\\ \varepsilon_i \mathrm{I}+}} V\langle g, \frac{g(e_i)-g(e_{i-1})}{e_i-e_{i-1}}\rangle(e_{i-1}\Delta e_i) < \frac{5}{8n}\cdot\sum_{\substack{1\le i\le t\\ \varepsilon_i \mathrm{I}+}} |e_{i-1}\Delta e_i| + \frac{1}{8n}\cdot\left(1-\frac{1}{2^l}\right) \quad \text{и}$$

4) $\forall i(1\le i\le t \,\&\, \varepsilon_i \mathrm{I}- \supset \frac{1}{2n}\cdot|e_{i-1}\Delta e_i| < V\langle g, \frac{g(e_i)-g(e_{i-1})}{e_i-e_{i-1}}\rangle(e_{i-1}\Delta e_i) \,\&\, \forall k(\Phi_k \subseteq e_{i-1}\Delta e_i \supset \gamma_i' \le$

$$\le \frac{g(\exists n(\Phi_k))-g(\exists l(\Phi_k))}{|\Phi_k|} \le \gamma_i''))\,.$$

Тогда можно построить функцию $\bar{g}$, НЧ $\bar{p}$, В-систему $\{\bar{e}_j\}_{j=1}^{\bar{t}}$, системы КДЧ $\{\bar{\gamma}_j'\}_{j=1}^{\bar{t}}$ и $\{\bar{\gamma}_j''\}_{j=1}^{\bar{t}}$ и систему плюсов и минусов $\{\bar{\varepsilon}_j\}_{j=0}^{\bar{t}}$ такие, что

I) $\bar{g} = \bar{g}/\Phi$, $\alpha(\bar{g})$ и для любой В-системы $\{c_j\}_{j=0}^{l}$ верно
$$W(f-\bar{g}, \{c_j\}_{j=0}^{l}) < \frac{1}{4n}\cdot\left(1-\frac{1}{2^{l+1}}\right);$$

II) $p < \bar{p} \,\&\, \forall j(1\le j\le \bar{t} \supset \exists k(1\le k\le \bar{p}+1 \,\&$

$\&\, \exists n(\Phi_k) = \bar{e}_j)) \,\&$

$\&\, \forall i(0\le i\le t \supset \exists j(0\le j\le \bar{t} \,\&\, e_i = \bar{e}_j)) \,\&$

$\&\, \forall i(1\le i\le t \,\&\, \varepsilon_i \mathrm{I}+ \supset \exists j(1\le j\le \bar{t} \,\&\, e_{i-1} =$

$= \bar{e}_{j-1} \,\&\, e_i = \bar{e}_j))$;

III) $\forall ij(1\le i\le t \,\&\, 1\le j\le \bar{t} \,\&\, \varepsilon_i \mathrm{I}+ \,\&\, e_{i-1} < \bar{e}_j \le$

$\le e_i \supset \bar{\varepsilon}_j \mathrm{I}+) \,\&\, \forall j(1\le j\le \bar{t} \,\&\, \bar{\varepsilon}_j \mathrm{I}+ \supset \bar{\gamma}_j' = \bar{\gamma}_j'' =$

$= \frac{\bar{g}(\bar{e}_j)-\bar{g}(\bar{e}_{j-1})}{\bar{e}_j-\bar{e}_{j-1}})$

и
$$\sum_{\substack{1\le j\le \bar{t}\\ \bar{\varepsilon}_j \mathrm{I}+}} V\langle \bar{g}, \frac{\bar{g}(\bar{e}_j)-\bar{g}(\bar{e}_{j-1})}{\bar{e}_j-\bar{e}_{j-1}}\rangle(\bar{e}_{j-1}\Delta \bar{e}_j) < \frac{5}{8n}\cdot\sum_{\substack{1\le j\le \bar{t}\\ \bar{\varepsilon}_j \mathrm{I}+}} |\bar{e}_{j-1}\Delta \bar{e}_j| + \frac{1}{8n}\cdot\left(1-\frac{1}{2^{l+1}}\right) \quad \text{и}$$

IV) $\forall j\,(1 \le j \le \bar t \;\&\; \bar{\mathcal{E}}_j \,\mathtt{I}- \supset \frac{1}{2n}\cdot|\bar e_{j-1} \Delta \bar e_j| < V < \bar g,$

$$\frac{\bar g(\bar e_j) - \bar g(\bar e_{j-1})}{\bar e_j - \bar e_{j-1}} > (\bar e_{j-1} \Delta \bar e_j) \;\&$$

$$\& \forall k\,(\Phi_k \subseteq \bar e_{j-1} \Delta \bar e_j \supset \bar\gamma_j' \le \frac{\bar g(\mathrm{Э}n(\Phi_k)) - \bar g(\mathrm{Э}л(\Phi_k))}{|\Phi_k|} \le$$

$$\le \bar\gamma_j'')\,\&\, \exists i\,(1 \le i \le t \,\&\, e_{i-1} \le \bar e_{j-1} < \bar e_j \le e_i \,\&\, \mathcal{E}_i \,\mathtt{I} - \&$$

$$\& \,\gamma_i' \le \bar\gamma_j' \le \bar\gamma_j'' \le \gamma_j'' \,\&\, \bar\gamma_j'' - \bar\gamma_j' < \gamma_i'' - \gamma_i' - \frac{1}{4n})) .$$

Замечание 3. В следующем доказательстве будет показано, что из предположений леммы 4 следует
$\forall i\,(1 \le i \le t \,\&\, \mathcal{E}_i \,\mathtt{I} - \supset \frac{1}{2n} < \gamma_i'' - \gamma_i')$.

Доказательство. Ввиду $\alpha(g)$ существует НЧ $\bar p$ и В-система $\{\bar e_j\}_{j=0}^{\bar t}$ такие, что выполнено II) и для всякого НЧ i, $1 \le i \le t \,\&\, \mathcal{E}_i \,\mathtt{I} -$, верно

$$(10)\quad V\langle g, \frac{g(e_i) - g(e_{i-1})}{e_i - e_{i-1}}\rangle (e_{i-1} \Delta e_i) - \frac{1}{2^{\ell+5}\cdot n}\cdot|e_{i-1}\Delta e_i| <$$

$$< \sum_{\substack{1 \le j \le t \\ e_{i-1} < \bar e_j \le e_i}} |\beta_{i,j}|\cdot|\bar e_{j-1} \Delta \bar e_j| \le V\langle g, \frac{g(e_i) - g(e_{i-1})}{e_i - e_{i-1}}\rangle (e_{i-1}\Delta e_i),$$

где $\forall j\,(1 \le j \le \bar t \,\&\, e_{i-1} < \bar e_j \le e_i \supset \beta_{i,j} \rightleftharpoons$
$$\rightleftharpoons \frac{g(\bar e_j) - g(\bar e_{j-1})}{\bar e_j - \bar e_{j-1}} - \frac{g(e_i) - g(e_{i-1})}{e_i - e_{i-1}}) .$$

Пусть i НЧ, $1 \le i \le t \,\&\, \mathcal{E}_i \,\mathtt{I} -$. Согласно теореме 1.3 из [3], стр. 399, можно множество всех НЧ j таких, что $1 \le j \le \bar t \,\&\, e_{i-1} < \bar e_j \le e_i$, разделить в группы $\mathcal{C}_{i,1}$, $\mathcal{C}_{i,2}$ и $\mathcal{C}_{i,3}$, для которых выполнено

$$(11)\quad \forall j\,((j \in \mathcal{C}_{i,1} \supset |\beta_{i,j}| < \frac{5}{8n}) \,\&\, (j \in \mathcal{C}_{i,2} \supset \beta_{i,j} < -\frac{1}{2n}) \,\&\, (j \in \mathcal{C}_{i,3} \supset \frac{1}{2n} < \beta_{i,j})) .$$

На основании (10) и свойств вариации получаем

$$\sum_{\substack{1\le j\le \bar t\\ e_{i-1}<\bar e_j\le e_i}} V\langle g,\frac{g(e_i)-g(e_{i-1})}{e_i-e_{i-1}}\rangle(\bar e_{j-1}\Delta\bar e_j)-\frac{1}{2^{\ell+5}m}\cdot|e_{i-1}\Delta e_i| =$$

$$= V\langle g,\frac{g(e_i)-g(e_{i-1})}{e_i-e_{i-1}}\rangle(e_{i-1}\Delta e_i)-\frac{1}{2^{\ell+5}m}\cdot|e_{i-1}\Delta e_i| <$$

$$<\sum_{j\in\mathcal{C}_{i,1}}|\beta_{i,j}|\cdot|\bar e_{j-1}\Delta\bar e_j|+\sum_{(j\in\mathcal{C}_{i,2}\vee j\in\mathcal{C}_{i,3})}V\langle g,\frac{g(e_i)-g(e_{i-1})}{e_i-e_{i-1}}\rangle(\bar e_{j-1}\Delta\bar e_j)\le$$

$$\le\sum_{\substack{1\le j\le \bar t\\ e_{i-1}<\bar e_j\le e_i}} V\langle g,\frac{g(e_i)-g(e_{i-1})}{e_i-e_{i-1}}\rangle(\bar e_{j-1}\Delta\bar e_j)$$

и, следовательно, ввиду (11) выполнено

$$(12)\quad \sum_{j\in\mathcal{C}_{i,1}} V\langle g,\frac{g(e_i)-g(e_{i-1})}{e_i-e_{i-1}}\rangle(\bar e_{j-1}\Delta\bar e_j)<$$

$$<\frac{5}{8\cdot m}\cdot\sum_{j\in\mathcal{C}_{i,1}}|\bar e_{j-1}\Delta\bar e_j|+\frac{1}{2^{\ell+5}\cdot m}\cdot|e_{i-1}\Delta e_i|\,.$$

Аналогично предыдущему мы на основании части 1 леммы 3 получаем

$$\sum_{(j\in\mathcal{C}_{i,2}\vee j\in\mathcal{C}_{i,3})}V\langle g,\frac{g(e_i)-g(e_{i-1})}{e_i-e_{i-1}}\rangle(\bar e_{j-1}\Delta\bar e_j)-\frac{1}{2^{\ell+5}\cdot n}\cdot$$

$$\cdot|e_{i-1}\Delta e_i|=\sum_{(j\in\mathcal{C}_{i,2}\vee j\in\mathcal{C}_{i,3})}(V^+\langle g,\frac{g(e_i)-g(e_{i-1})}{e_i-e_{i-1}}\rangle(\bar e_{j-1}\Delta\bar e_j)+$$

$$+V^-\langle g,\frac{g(e_i)-g(e_{i-1})}{e_i-e_{i-1}}\rangle(\bar e_{j-1}\Delta\bar e_j))-\frac{1}{2^{\ell+5}\cdot m}\cdot|e_{i-1}\Delta e_i|<$$

$$<\sum_{j\in\mathcal{C}_{i,2}}V^-\langle g,\frac{g(e_i)-g(e_{i-1})}{e_i-e_{i-1}}\rangle(\bar e_{j-1}\Delta\bar e_j)+$$

$$+\sum_{j\in\mathcal{C}_{i,3}}V^+\langle g,\frac{g(e_i)-g(e_{i-1})}{e_i-e_{i-1}}\rangle(\bar e_{j-1}\Delta\bar e_j)$$

и следовательно,

$$(13)\quad \sum_{j\in\mathcal{C}_{i,2}}V^+\langle g,\frac{g(e_i)-g(e_{i-1})}{e_i-e_{i-1}}\rangle(\bar e_{j-1}\Delta\bar e_j)+$$

$$+\sum_{j\in\mathcal{C}_{i,3}}V^-\langle g,\frac{g(e_i)-g(e_{i-1})}{e_i-e_{i-1}}\rangle(\bar e_{j-1}\Delta\bar e_j)<\frac{1}{2^{\ell+5}\cdot m}\cdot|e_{i-1}\Delta e_i|\,.$$

Мы построим функцию $\bar g$ такую, что $\bar g(0)=g(0)$ и для всяких НЧ i и j и КДЧ x, $1\le i\le t\,\&\,1\le j\le\bar t\,\&\,e_{i-1}\le$ $\le\bar e_{j-1}\le x\le\bar e_j\le e_i$, выполнено

$$(\mathcal{E}_i\,\mathrm{I}+\supset\bar g(x)-\bar g(e_{i-1})=g(x)-g(e_{i-1}))\,\&\,(\mathcal{E}_i\,\mathrm{I}-\,\&\,j\in\mathcal{C}_{i,1}\supset$$

$\supset \bar{g}(x)-\bar{g}(\bar{e}_{j-1})=g(x)-g(\bar{e}_{j-1}))\,\&\,(\varepsilon_i\,\mathfrak{X}-\&\,j\in\mathcal{C}_{i,2}\supset\bar{g}(x)-$

$-\bar{g}(\bar{e}_{j-1})=g(x)-g(\bar{e}_{j-1})-$

$-V^{+}\langle g,\dfrac{g(e_i)-g(e_{i-1})}{e_i-e_{i-1}}\rangle(\bar{e}_{j-1}\,\Delta\,x))\,\&\,(\varepsilon_i\,\mathfrak{X}-\&\,j\in\mathcal{C}_{i,3}\supset$

$\supset\bar{g}(x)-\bar{g}(\bar{e}_{j-1})=g(x)-g(\bar{e}_{j-1})+$

$+V^{-}\langle g,\dfrac{g(e_i)-g(e_{i-1})}{e_i-e_{i-1}}\rangle(\bar{e}_{j-1}\,\Delta\,x))$.

Ввиду того, что для любого НЧ i, $1\le i\le t\,\&\,\varepsilon_i\,\mathfrak{X}-$, выполнено (13), ввиду монотонности $V^{+}\langle g,y\rangle$ и $V^{-}\langle g,y\rangle$, предположения 1) и леммы 3 имеет место I).

Пусть i НЧ, $1\le i\le t\,\&\,\varepsilon_i\,\mathfrak{X}-$. Ввиду $\alpha(\bar{g})$ и теоремы 1.3 из [3], стр. 399, можно систему всех НЧ j, для которых выполнено $(j\in\mathcal{C}_{i,2}\vee j\in\mathcal{C}_{i,3})$, разделить в две группы $\mathcal{D}_{i,1}$ и $\mathcal{D}_{i,2}$ такие, что

$$\forall j\,((j\in\mathcal{D}_{i,1}\supset V\langle\bar{g},\frac{\bar{g}(\bar{e}_j)-\bar{g}(\bar{e}_{j-1})}{\bar{e}_j-\bar{e}_{j-1}}\rangle(\bar{e}_{j-1}\Delta\,\bar{e}_j)<\frac{5}{8m}\cdot$$

(14) $$\cdot|\bar{e}_{j-1}\,\Delta\,\bar{e}_j|)\,\&\,(j\in\mathcal{D}_{i,2}\supset$$

$$\supset V\langle\bar{g},\frac{\bar{g}(\bar{e}_j)-\bar{g}(\bar{e}_{j-1})}{\bar{e}_j-\bar{e}_{j-1}}\rangle(\bar{e}_{j-1}\Delta\,\bar{e}_j)>\frac{1}{2m}\cdot|\bar{e}_{j-1}\,\Delta\,\bar{e}_j|))\ .$$

Для всяких НЧ i и j, $1\le i\le t\,\&\,1\le j\le\bar{t}\,\&$ $\&\,e_{i-1}\le\bar{e}_{j-1}<\bar{e}_j\le e_i$, мы определим

$$(\bar{\varepsilon}_j\rightleftharpoons+)\,\&\,(\bar{\gamma}_j'\rightleftharpoons\bar{\gamma}_j''\rightleftharpoons\frac{\bar{g}(\bar{e}_j)-\bar{g}(\bar{e}_{j-1})}{\bar{e}_j-\bar{e}_{j-1}})\ ,$$

если

$(\varepsilon_i\,\mathfrak{X}+\vee\,\varepsilon_i\,\mathfrak{X}-\&\,(j\in\mathcal{C}_{i,1}\vee j\in\mathcal{D}_{i,1}))$,

$(\bar{\varepsilon}_j\rightleftharpoons-)\,\&\,(\bar{\gamma}_j'\rightleftharpoons\gamma_i')\,\&\,(\bar{\gamma}_j''\rightleftharpoons\dfrac{g(e_i)-g(e_{i-1})}{e_i-e_{i-1}})$, если

$\varepsilon_i\,\mathfrak{X}-\&\,j\in\mathcal{D}_{i,2}\,\&\,j\in\mathcal{C}_{i,2}$, а

$(\bar{\varepsilon}_j\rightleftharpoons-)\,\&\,(\bar{\gamma}_j'\rightleftharpoons\dfrac{g(e_i)-g(e_{i-1})}{e_i-e_{i-1}})\,\&\,(\bar{\gamma}_j''\rightleftharpoons\gamma_i'')$,

если $\varepsilon_i\,\mathfrak{X}-\&\,j\in\mathcal{D}_{i,2}\,\&\,j\in\mathcal{C}_{i,3}$.

Тогда ввиду способа определения функции $\bar{g}$, предположения 3) и того, что для всякого НЧ i, $1 \le i \le t \mathbin{\&} \varepsilon_i \equiv -$, верно (12) и (14), выполнено Ш).

Кроме того $\forall j \, (1 \le j \le \bar{t} \mathbin{\&} \bar{\varepsilon}_j \equiv - \supset \frac{1}{2n} \cdot |\bar{e}_{j-1} \Delta \bar{e}_j| <$
$< V\langle \bar{g}, \frac{\bar{g}(\bar{e}_j) - \bar{g}(\bar{e}_{j-1})}{\bar{e}_j - \bar{e}_{j-1}} \rangle (\bar{e}_{j-1} \Delta \bar{e}_j) \mathbin{\&}$
$\mathbin{\&} \exists_i (1 \le i \le t \mathbin{\&} \varepsilon_i \equiv - \mathbin{\&} e_{i-1} \le \bar{e}_{j-1} < \bar{e}_j \le e_i))$.

Пусть i НЧ, $1 \le i \le t \mathbin{\&} \varepsilon_i \equiv -$. Тогда согласно предположению 4) и лемме 2 верно

$$\frac{1}{2m} \cdot |e_{i-1} \Delta e_i| < V\langle g, \frac{g(e_i) - g(e_{i-1})}{e_i - e_{i-1}} \rangle (e_{i-1} \Delta e_i) \le (\gamma_i'' - \gamma_i') \cdot$$
$$\cdot |e_{i-1} \Delta e_i|, \quad V^+\langle g, \frac{g(e_i) - g(e_{i-1})}{e_i - e_{i-1}} \rangle (e_{i-1} \Delta e_i) \le$$
$$\le (\gamma_i'' - \frac{g(e_i) - g(e_{i-1})}{e_i - e_{i-1}}) \cdot |e_{i-1} \Delta e_i|$$

и

$$V^-\langle g, \frac{g(e_i) - g(e_{i-1})}{e_i - e_{i-1}} \rangle (e_{i-1} \Delta e_i) \le (\frac{g(e_i) - g(e_{i-1})}{e_i - e_{i-1}} - \gamma_i') \cdot |e_{i-1} \Delta e_i|.$$

На основании этого и части 1 леммы 3 получаем

$$0 = V^+\langle g, \frac{g(e_i) - g(e_{i-1})}{e_i - e_{i-1}} \rangle (e_{i-1} \Delta e_i) -$$
$$- V^-\langle g, \frac{g(e_i) - g(e_{i-1})}{e_i - e_{i-1}} \rangle (e_{i-1} \Delta e_i) \quad \text{и}$$

$$\frac{1}{4m} \cdot |e_{i-1} \Delta e_i| < V^+\langle g, \frac{g(e_i) - g(e_{i-1})}{e_i - e_{i-1}} \rangle (e_{i-1} \Delta e_i) =$$
$$= V^-\langle g \frac{g(e_i) - g(e_{i-1})}{e_i - e_{i-1}} \rangle (e_{i-1} \Delta e_i).$$

Итак, верно

$$\frac{1}{4m} < \min (\gamma_i'' - \frac{g(e_i) - g(e_{i-1})}{e_i - e_{i-1}}, \frac{g(e_i) - g(e_{i-1})}{e_i - e_{i-1}} - \gamma_i').$$

Если j НЧ, $j \in \mathcal{C}_{i,2}$, то для всякого НЧ k, $\Phi_k \subseteq \bar{e}_{j-1} \Delta \bar{e}_j$, имеет место

$$\frac{1}{|\Phi_k|} \cdot (\bar{g}(\Im n(\Phi_k)) - \bar{g}(\Im \lambda(\Phi_k))) = \frac{1}{|\Phi_k|} \cdot (g(\Im n(\Phi_k)) - g(\Im \lambda(\Phi_k)) -$$

$$V^+\langle g, \frac{g(e_i)-g(e_{i-1})}{e_i-e_{i-1}}\rangle(\Phi_k)) = \frac{g(\exists n(\Phi_k)) - g(\exists л(\Phi_k))}{|\Phi_k|} -$$

$$-\left(\frac{g(\exists n(\Phi_k))-g(\exists л(\Phi_k))}{|\Phi_k|} - \frac{g(e_i)-g(e_{i-1})}{e_i-e_{i-1}}\right)^+ =$$

$$= \min\left(\frac{g(\exists n(\Phi_k))-g(\exists л(\Phi_k))}{|\Phi_k|}, \frac{g(e_i)-g(e_{i-1})}{e_i-e_{i-1}}\right)$$

и, следовательно, ввиду предположения 4) верно

$$\gamma_i' \le \frac{\bar{g}(\exists n(\Phi_k))-\bar{g}(\exists л(\Phi_k))}{|\Phi_k|} \le \frac{g(e_i)-g(e_{i-1})}{e_i-e_{i-1}} .$$

Аналогичным образом можно доказать

$$\forall j k (j \in \mathcal{C}_{i,3} \;\&\; \Phi_k \subseteq \bar{e}_{j-1} \vartriangle \bar{e}_j \supset$$

$$\supset \frac{g(e_i)-g(e_{i-1})}{e_i-e_{i-1}} \le \frac{\bar{g}(\exists n(\Phi_k))-\bar{g}(\exists л(\Phi_k))}{|\Phi_k|} \le \gamma_i'').$$

Таким образом, мы доказали IV).

Лемма 5. Пусть h функция и Φ покрытие такое, что $h = h/\Phi \;\&\; a(h) \;\&\; \alpha(h)$. Тогда h абсолютно непрерывна (на $0 \vartriangle 1$).

Доказательство. Пусть n НЧ. Согласно лемме 3 существует НЧ q_0, для которого выполнено

(15) $V^+\langle h, q_0\rangle(0\vartriangle 1) < \frac{1}{2n} \;\&\; V^-\langle h, -q_0\rangle(0\vartriangle 1) < \frac{1}{2n}$.

Мы определим $f \rightleftharpoons h - V^+\langle h, q_0\rangle + V^-\langle h, -q_0\rangle$. Согласно лемме 3 $V^-\langle h, -q_0\rangle = V^-\langle h - V^+\langle h, q_0\rangle, -q_0\rangle$ и, следовательно, верно $\alpha(h - V^+\langle h, q_0\rangle)$ и $\alpha(f)$. При этом ввиду леммы 3 $f = f/\Phi$ и для всякого НЧ k выполнено

$$\frac{f(\exists n(\Phi_k))-f(\exists л(\Phi_k))}{|\Phi_k|} = \frac{h(\exists n(\Phi_k))-h(\exists л(\Phi_k))}{|\Phi_k|} -$$

$$-\left(\frac{h(\text{Эт}(\Phi_k))-h(\text{Эл}(\Phi_k))}{|\Phi_k|}-q_0\right)^{+}+\left(\frac{h(\text{Эт}(\Phi_k))-h(\text{Эл}(\Phi_k))}{|\Phi_k|}+q_0\right)^{-}$$

и, следовательно, $-q_0 \le \dfrac{f(\text{Эт}(\Phi_k))-f(\text{Эл}(\Phi_k))}{|\Phi_k|} \le q_0$.

Мы определим

$g \rightleftharpoons f$, $(\ell \rightleftharpoons 1)\&(p \rightleftharpoons 1)$, $e_0 \rightleftharpoons 0$, $e_1 \rightleftharpoons \text{Эт}(\Phi_1)$,
$e_2 \rightleftharpoons \text{Эл}(\Phi_2)$, $e_3 \rightleftharpoons 1$, $t \rightleftharpoons 3$, $\varepsilon_1 \rightleftharpoons +$, $\varepsilon_3 \rightleftharpoons +$,

$$\gamma_1' \rightleftharpoons \gamma_1'' \rightleftharpoons \frac{f(e_1)-f(e_0)}{e_1-e_0}, \gamma_3' \rightleftharpoons \gamma_3'' \rightleftharpoons \frac{f(e_3)-f(e_2)}{e_3-e_2} .$$

Ввиду $\alpha(f)$ и теоремы 1.3 из [3], стр.399, можно алгорифмически установить верность одной из следующих двух формул:

$$(16)\quad V\left\langle f, \frac{f(e_2)-f(e_1)}{e_2-e_1}\right\rangle (e_1 \Delta e_2) < \frac{5}{8m}\cdot |e_1 \Delta e_2| ,$$

$$(17)\quad V\left\langle f, \frac{f(e_2)-f(e_1)}{e_2-e_1}\right\rangle (e_1 \Delta e_2) > \frac{1}{2m}\cdot |e_1 \Delta e_2| .$$

Если установелна верность (16), мы определим $\varepsilon_2 \rightleftharpoons +$, $\gamma_2' \rightleftharpoons \gamma_2'' \rightleftharpoons \dfrac{f(e_2)-f(e_1)}{e_2-e_1}$, а если установлена верность (17), мы определим $\varepsilon_2 \rightleftharpoons -$, $\gamma_2' \rightleftharpoons -q_0$, $\gamma_2'' \rightleftharpoons q_0$.

Видно, что выполнены предположения леммы 4 и что после не более чем $(2\cdot q_0 \cdot 4m)$ -кратного применения этой леммы мы построим функцию g^* , В-систему $\{e_i^*\}_{i=0}^{t^*}$ и систему $\{\varepsilon_i^*\}_{i=1}^{t^*}$ такие, что

1) $g^* = g^*/\Phi \;\&\; \alpha(g^*)$ и для всякой В-системы $\{c_j\}_{j=0}^{q}$ выполнено $W(f-g^*, \{c_j\}_{j=0}^{q}) < \dfrac{1}{4m}$ и

2) $\forall i \,(1 \leq i \leq t^* \supset \varepsilon_i^* \,\mathrm{I\!I}\, +)$ и

$$\sum_{i=1}^{t^*} V\langle g^*, \frac{g^*(e_i^*) - g^*(e_{i-1}^*)}{e_i^* - e_{i-1}^*} \rangle (e_{i-1}^* \,\Delta\, e_i^*) < \frac{3}{4n}$$

(см. замечание 3).

Мы построим полигональную функцию $\mathfrak{F}_n$ такую, что

$$\mathfrak{F}_n(0) = 0 \,\&\, \forall i x \,(1 \leq i \leq t^* \,\&\, e_{i-1}^* \leq x \leq e_i^* \supset \mathfrak{F}_n(x) - \mathfrak{F}_n(e_{i-1}^*) =$$

$$= \frac{g^*(e_i^*) - g^*(e_{i-1}^*)}{e_i^* - e_{i-1}^*} \cdot (x - e_{i-1}^*)) \;.$$

Тогда для всякой B-системы $\{c_j\}_{j=0}^{q}$ на основании 1) и 2) получаем $W(f - \mathfrak{F}_n \,, \{c_j\}_{j=0}^{q}) < \frac{1}{n}$ и, следовательно, ввиду (15)

$$W(h - \mathfrak{F}_n, \{c_j\}_{j=0}^{q}) \leq W(f - \mathfrak{F}_n, \{c_j\}_{j=0}^{q}) + V^+\langle h, q_0 \rangle (0 \,\Delta\, 1) +$$

$$+ V^-\langle h, -q_0 \rangle (0 \,\Delta\, 1) < \frac{2}{n} \;.$$

Таким образом, для всякого НЧ n существует полигональная функция $\mathfrak{F}_n$ такая, что для любой B-системы $\{c_j\}_{j=0}^{q}$ выполнено $W(h - \mathfrak{F}_n \,, \{c_j\}_{j=0}^{q}) < \frac{2}{n}$.

<u>Доказательство теоремы.</u> 1) Пусть φ функция абсолютно непрерывная на $0 \,\Delta\, 1$. Тогда, как легко доказать, выполнено $\mathcal{A}(\varphi)$.

Для всякого РЧ a функция $\varphi - h_a$ абсолютно непрерывна и, следовательно, $\exists z \,(\mathit{Var}\,(z,\, \varphi - h_a\,,\, 0 \,\Delta\, 1))$ (см. [5], стр.182). Таким образом, выполнено $\alpha(\varphi)$.

2) Пусть φ функция такая, что $\mathcal{A}(\varphi) \,\&\, \alpha(\varphi)$.

Пусть n НЧ. Существует НЧ l_n такое, что для любой системы неперекрывающихся сегментов $\{a_i \,\Delta\, b_i\}_{i=1}^{s}$ верно

$$(\sum_{i=1}^{s} |a_i \,\Delta\, b_i| < \frac{1}{l_n} \supset \sum_{i=1}^{s} |\varphi(b_i) - \varphi(a_i)| < \frac{1}{3n}) \;.$$

Согласно теореме 2.3 из [4], стр.469, существует покрытие Φ такое, что $\forall m \,(\sum_{k=1}^{m} |\Phi_k| < \frac{1}{l_n})$.

На основании леммы 1 и 5 знаем, что φ/Φ абсолютно непрерывная функция и, следовательно, существует полигональная функция $\mathcal{F}$ такая, что для всякой B-системы $\{c_i\}_{i=0}^{n}$ выполнено

$$\sum_{i=1}^{n} |\varphi/\Phi(c_i) - \varphi/\Phi(c_{i-1}) - (\mathcal{F}(c_i) - \mathcal{F}(c_{i-1}))| < \frac{1}{3m} .$$

Пусть $\{d_j\}_{j=0}^{q}$ B-система. Мы построим НЧ k_0, B-систему $\{e_i\}_{i=0}^{t}$ и систему неотрицательных целых чисел $\{\omega_i\}_{i=1}^{t}$, для которых выполнено

$$\forall j (0 \le j \le q \supset \exists k (1 \le k \le k_0 + 1 \,\&\, d_j \in \Phi_k)) \,\&$$

$$\& \forall a (\exists i (0 \le i \le t \,\&\, a = e_i) \equiv (\exists j (0 \le j \le q \,\&\, a = d_j) \vee$$

$$\vee \exists k (1 \le k \le k_0 + 1 \,\&\, (\exists \lambda (\Phi_k) = a \vee \exists m (\Phi_k) = a)))) \,\&$$

$$\& \forall j (1 \le j \le t \supset (1 \le \omega_j \supset \omega_j \le k_0 + 1 \,\&\, e_{j-1} \Delta e_j \subseteq \Phi_j) \,\&\, (\omega_j = 0 \supset$$

$$\supset \exists k \ell (k_0 + 1 < k \,\&\, k_0 + 1 < \ell \,\&\, e_{j-1} = \exists \lambda (\Phi_k) \,\&\, e_j = \exists m (\Phi_\ell)))).$$

Мы получаем

$$W(\varphi - \mathcal{F}, \{d_j\}_{j=0}^{q}) \le W(\varphi - \mathcal{F}, \{e_i\}_{i=0}^{t}) \le$$

$$\le W(\varphi/\Phi - \mathcal{F}, \{e_i\}_{i=0}^{t}) + W(\varphi - \varphi/\Phi, \{e_i\}_{i=0}^{t}) < \frac{1}{3m} +$$

$$+ \sum_{\substack{1 \le i \le t \\ \omega_i = 0}} |\varphi(e_i) - \varphi(e_{i-1}) - (\varphi/\Phi(e_i) - \varphi/\Phi(e_{i-1}))| + \sum_{k=1}^{k_0+1} \cdot \sum_{\substack{1 \le i \le t \\ \omega_i = k}} |\varphi(e_i) -$$

$$- \varphi(e_{i-1}) - (\varphi/\Phi(e_i) - \varphi(\Phi(e_{i-1}))| \le \frac{1}{3m} + \sum_{\substack{1 \le i \le t \\ \omega_i = 0}} |\varphi(e_i) - \varphi(e_{i-1}) -$$

$$- (\varphi/\Phi(e_i) - \varphi/\Phi(e_{i-1}))| + \sum_{k=1}^{k_0+1} \cdot \sum_{\substack{1 \le i \le t \\ \omega_i = k}} |\varphi(e_i) - \varphi(e_{i-1})| +$$

$$+ \sum_{k=1}^{k_0+1} |\varphi(\exists m(\Phi_k)) - \varphi(\exists \lambda(\Phi_k))| .$$

Ясно, что $\sum_{\substack{1 \le i \le t \\ \omega_i = 0}} |\varphi(e_i) - \varphi(e_{i-1}) - (\varphi/\Phi(e_i) - \varphi/\Phi(e_{i-1}))| = 0$.

Ввиду выше отмеченных свойств функции φ, покрытия Φ и НЧ ℓ_m выполнено $\sum_{k=1}^{k_0+1} \sum_{\substack{1 \le i \le t \\ \omega_i = k}} |e_{i-1} \Delta e_i| = \sum_{k=1}^{k_0+1} |\Phi_k| < \frac{1}{\ell_m}$

и, следовательно, $\sum_{k=1}^{k_0+1} \sum_{\substack{1 \le i \le t \\ \omega_i = k}} |\varphi(e_i) - \varphi(e_{i-1})| < \frac{1}{3m}$ и

$\sum_{k=1}^{k_0+1} |\varphi(\exists m(\Phi_k)) - \varphi(\exists \lambda(\Phi_k))| < \frac{1}{3m}$.

Итак, мы получили оценку

$$W(\varphi - \mathcal{F}, \{d_j\}_{j=0}^{q}) < \frac{1}{m} .$$

что и требовалось.

Замечание 4. Конструктивный аналог известной функции Кантора является примером функции, которая обладает свойством α, но не является абсолютно непрерывной.

Литература

[1] ШАНИН Н.А.: Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства, Проблемы конструктивного направления в математике 2 (сборник работ), Труды Мат.инст.им.В.А.Стеклова,т. LXVII(1962), 15-284.

[2] ЦЕЙТИН Г.С.: Алгорифмические операторы в конструктивных метрических пространствах, там же, стр.285-361.

[3] ЗАСЛАВСКИЙ И.Д.: Некоторые свойства конструктивных вещественных чисел и конструктивных функций, там же,стр. 385-457.

[4] ЗАСЛАВСКИЙ И.Д. и ЦЕЙТИН Г.С.: О сингулярных покрытиях и связанных с ними свойствах конструктивных функций, там же, стр.458-502.

[5] ЗАСЛАВСКИЙ И.Д.: О некоторых особенностях конструктивных функций вещественного переменного по сравнению с классическими,Труды 3-го Всесоюзного математического съезда,том 1, Москва 1956,стр.181-2.

Matematicko-fyzikální fakulta
Karlova universita
Praha 8 Karlín,Sokolovská 83
Československo

(Oblatum 3.6.1970)