Osvald Demuth

Теоремы о среднем значении для конструктивного интеграла

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 11 (1970), No. 2, 249--269

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105277

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

11, 2 (1970)

ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ ДЛЯ КОНСТРУКТИВНОГО ИНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА

Освальд ДЕМУТ , Прага

В настоящей статье доказаны теоремы о среднем значении для конструктивного интеграла Лебега и показано, что конструктивные аналоги монотонных функций, определенных почти всюду на сегменте $0 \Delta 1$, являются конструктивно измеримыми.

В дальнейшем мы пользуемся определениями и обозначениями из [4]. Буквы k, l, m, n, p служат переменными для натуральных чисел (НЧ), буквы i, j переменными для целых чисел а буквы $u, v, w, x, y, z, \xi, \eta$ - для конструктивных действительных чисел (КДЧ).

Теорема 1 (первая теорема о среднем значении). Пусть $\{F_l\}_l$ и $\{G_l\}_l$ последовательности ступенчатых остовов а M и N КДЧ такие, что $\{F_l\}_l \in L_1 \,\&\, \{G_l\}_l \in S \,\&\, 0 \leq \{F_l\}_l \,\&\, \{0 \gamma 1 \sigma M\}_l \leq \{G_l\}_l \leq \{0 \gamma 1 \sigma N\}_l$. Тогда существует последовательность ступенчатых остовов $\{K_l\}_l$, для которой выполнено $\{K_l\}_l \in L_1 \,\&\, \{K_l\}_l = \{F_l\}_l \cdot \{G_l\}_l$ и, следовательно, $M \cdot \{F_l\}_l \leq \{K_l\}_l \leq N \cdot \{F_l\}_l$ и

$$\forall y z \, (0 \leq y < z \leq 1 \supset M \cdot \int_y^z \{F_l\}_l \leq \int_y^z \{K_l\}_l \leq N \cdot \int_y^z \{F_l\}_l).$$

Доказательство. Теорема является непосредственным следствием частей 4а) и 5) леммы 1 и следствия теоремы 6 из [4].

Обозначения. Пусть f функция, $Q(x)$ однопараметрическая формула с параметром x, $\{G_\ell\}_\ell$ – последовательность ступенчатых остовов, $\{{}^m\mathcal{G}\}_m$ – последовательность ${}^{(1)}S_\sigma$ -множеств, u и v КДЧ, $0 \leq u \leq 1$ а $\divideontimes$ один из знаков $\leq$, $\geq$. Тогда

1) $D(v, f, u)$ обозначает: v является значением производной от f в точке u (определение см. [2], стр.363),

2) $\wedge x(Q(x))$ обозначает: множество всех КДЧ x, для которых верно $Q(x)$,

3) $\mathrm{Inf}(v, \wedge x(Q(x))$ обозначает: v является инфимумом множества $\wedge x(Q(x))$,

$\mathrm{Sup}(v, \wedge x(Q(x))$ обозначает: v является супремумом множества $\wedge x(Q(x))$,

4) $P(\{G_\ell\}_\ell, u, v)$ обозначает: последовательность КДЧ $\{\vartheta(G_\ell u)\}_\ell$ определена и сходится к v и

5) $A_\divideontimes(\{G_\ell\}_\ell, \{{}^m\mathcal{G}\}_m)$ обозначает: для всякого НЧ m ${}^{(1)}S_\sigma$ -множество ${}^{m+1}\mathcal{G}$ является частью ${}^m\mathcal{G}$, мера ${}^m\mathcal{G}$ меньше чем $\frac{1}{2^m}$ и выполнено

$$\forall xy(0 \leq x \leq y \leq 1 \,\&\, \neg(x \in {}^m\mathcal{G}) \,\&\, \neg(y \in {}^m\mathcal{G}) \supset$$
$$\supset \exists wz(P(\{G_\ell\}_\ell, x, w) \,\&\, P(\{G_\ell\}_\ell, y, z) \,\&\, w \divideontimes z)).$$

Замечание. Последовательности ступенчатых остовов $\{G_\ell\}_\ell$, о которых говорится в предположении теоремы 2, являются конструктивными аналогами монотонных функций, определенных почти всюду на сегменте $0 \Delta 1$.

<u>Теорема 2</u>. Пусть $\{G_\ell\}_\ell$ последовательность ступенчатых остовов а $\varkappa$ один из знаков $\leq$ и $\geq$ такие, что существует последовательность ${}^{(1)}S_\sigma$ -множеств $\{{}^m\mathcal{Y}\}_m$, для которой выполнено $A_\varkappa(\{G_\ell\}_\ell, \{{}^m\mathcal{Y}\}_m)$.

Тогда существует последовательность ступенчатых остовов $\{H_\ell\}_\ell$ и последовательность ${}^{(1)}S_\sigma$ -множеств $\{{}^m\mathcal{C}\}_m$ такие, что имеет место

1) $\{H_\ell\}_\ell \in S \& \{H_\ell\}_\ell = \{G_\ell\}_\ell \& A_\varkappa(\{H_\ell\}_\ell, \{{}^m\mathcal{C}\}_m)$,

2) $\forall m x y (0 \leq x \leq y \leq 1 \& !\vartheta(H_m x) \& !\vartheta(H_m y) \supset$
$\supset \vartheta(H_m x) \varkappa \vartheta(H_m y) \& \exists u k (0 < u < 1 \& \neg(u \in {}^k\mathcal{Y}) \& P(\{G_\ell\}_\ell, u,$
$\vartheta(H_m x))))$,

3) $\forall m p x v (0 \leq x \leq 1 \& \neg(x \in {}^m\mathcal{C}) \& P(\{H_\ell\}_\ell, x, v) \supset$
$\supset \exists k u w y z (0 < u < x < y < 1 \& \neg(u \in {}^k\mathcal{Y}) \& \neg(y \in {}^k\mathcal{Y}) \&$
$\& P(\{G_\ell\}_\ell, u, w) \& P(\{G_\ell\}_\ell, y, z) \& v - \frac{1}{2^p} < min(w, z) \leq$
$\leq max(w, z) < v + \frac{1}{2^p}))$,

4) для всяких НЧ m, КДЧ x и v таких, что $0 \leq$ $\leq x \leq 1 \& \neg(x \in {}^m\mathcal{C}) \& P(\{H_\ell\}_\ell, x, v)$, выполнено $0 < x < 1$,

$Inf(v, \wedge z(\exists k y (0 \leq y \leq 1 \& x \varkappa y \& \neg(x = y) \& \neg(y \in {}^k\mathcal{Y}) \&$
$\& P(\{G_\ell\}_\ell, y, z))))$,
$Sup(v, \wedge z(\exists k y (0 \leq y \leq 1 \& y \varkappa x \& \neg(x = y) \& \neg(y \in {}^k\mathcal{Y}) \&$
$\& P(\{G_\ell\}_\ell, y, z))))$,
и, следовательно, верно $(\exists k(\neg(x \in {}^k\mathcal{Y})) \supset P(\{G_\ell\}_\ell, x, v))$ и

5) если существует НЧ p такое, что $\{0 \gamma 1 \delta - p\}_\ell \leq$ $\leq \{G_\ell\}_\ell \leq \{0 \gamma 1 \delta p\}_\ell$, то $\{H_{\ell+p+1}\}_\ell \in L_1$.

Доказательство. Пусть $\{{}^m\mathcal{Y}\}_m$ последовательность ${}^{(1)}S_\sigma$ -множеств такая, что $A_{\varkappa}(\{G_\ell\}_\ell, \{{}^m\mathcal{Y}\}_m)$.

а) Мы построим возрастающую последовательность НЧ $\{k_m\}_m$, последовательность НЧ $\{p_n\}_n$ и последовательности КДЧ $\{x_i^n\}_n$, $\{z_i^n\}_n$ $(i = 1, 2)$.

Определим $k_0 \rightleftharpoons 7$. Пусть n НЧ и пусть уже построено НЧ k_{n-1}, $k_{n-1} > n + 5$. Ввиду того, что мера ${}^{(1)}S_\sigma$ -множества ${}^{k_{n-1}+2}\mathcal{Y}$ меньше чем $\frac{1}{2^{k_{n-1}+2}}$, существуют КДЧ x_1^n и x_2^n такие, что

$$0 \leq x_1^n \leq \frac{1}{2^{k_{n-1}+2}} \,\&\, 1 - \frac{1}{2^{k_{n-1}+2}} \leq x_2^n \leq 1 \,\&\, \neg(x_1^n \in {}^{k_{n-1}+2}\mathcal{Y}) \,\&$$
$$\& \,\neg(x_2^n \in {}^{k_{n-1}+2}\mathcal{Y})$$

(см. доказательство теоремы 2.4, [2], стр. 470-3). Но тогда ввиду $A_{\varkappa}(\{G_\ell\}_\ell, \{{}^m\mathcal{Y}\}_m)$ существуют КДЧ z_1^n и z_2^n и НЧ p_n, для которых выполнено

$$(1)\; P(\{G_\ell\}_\ell, x_1^n, z_1^n) \,\&\, P(\{G_\ell\}_\ell, x_2^n, z_2^n) \,\&\, |z_1^n - z_2^n| < 2^{p_n}.$$

Мы определим $k_n \rightleftharpoons 2 \cdot k_{n-1} + p_n + 2\cdot(n+4)$. Ясно, что $k_n > n + 6$.

б) Пусть n НЧ. Ввиду $A_{\varkappa}(\{G_\ell\}_\ell, \{{}^m\mathcal{Y}\}_m)$ и того, что мера ${}^{(1)}S_\sigma$ -множества ${}^{k_n+2}\mathcal{Y}$ меньше чем $\frac{1}{2^{k_n+2}}$, существуют системы КДЧ $\{\xi_j^n\}_{j=1}^{2^{k_n}}$ и $\{\eta_j^n\}_{j=1}^{2^{k_n}}$ такие, что выполнено

$$\forall j\, (1 \leq j \leq 2^{k_n} \supset \frac{j-1}{2^{k_n}} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^{k_n}} \leq$$
$$\leq \xi_j^n \leq \frac{1}{2^{k_n}} - \frac{1}{3}\cdot\frac{j}{2^{k_n}} \,\&\, \neg(\xi_j^n \in {}^{k_n+2}\mathcal{Y}) \,\&\, P(\{G_\ell\}_\ell, \xi_j^n, \eta_j^n)).$$

Но тогда $x_1^{n+1} < \xi_1^n < \xi_2^n < \ldots < \xi_{2^{k_n}}^n < x_2^{n+1}$,

$$x_1^n < \xi^n_{2^{k_n - k_{n-1}} - 1} < \xi^n_{2^{k_n} - 2^{k_n - k_{n-1}} + 1} < x_2^n$$

и, следовательно,

$$(2)\quad x_1^{n+1} * \eta_1^n * \eta_2^n * \ldots * \eta_{2^{k_n}}^n * x_2^{n+1} \; \&$$

$$\& \; x_1^n * \eta^n_{2^{k_n - k_{n-1}}-1} * \eta^n_{2^{k_n}-2^{k_n - k_{n-1}}+1} * x_2^n \; .$$

Мы определим $H_n \rightleftharpoons 0 \gamma \frac{1}{2^{k_n}} \gamma \frac{2}{2^{k_n}} \ldots \gamma \frac{2^{k_n}-1}{2^{k_n}} \gamma 1 \delta \eta_1^n \gamma \eta_2^n \ldots$

$\ldots \gamma \eta^n_{2^{k_n}-1} \gamma \eta^n_{2^{k_n}}$. Согласно теореме 1.3 из [2], стр. 399, существует алгорифм $\mathfrak{A}_n$ такой, что

$$\forall x \, (! \mathfrak{A}_n(x) \; \& \; (\mathfrak{A}_n(x) = \Lambda \supset x < \frac{1}{2^{n+1}}) \; \&$$

$$\& \; (\mathfrak{A}_n(x) \neq \Lambda \supset \frac{1}{2^{n+2}} < x)) \; .$$

Пусть $\mathfrak{E}_1^n$ (соответственно $\mathfrak{E}_2^n$) возрастающая система всех четных (соответственно нечетных) НЧ j таких, что $2^{k_n - k_{n-1}} \leq j \leq 2^{k_n} - 2^{k_n - k_{n-1}} \; \& \; \mathfrak{A}_n(|\eta^n_{j-1} - \eta^n_{j+1}|) \neq \Lambda$,

а пусть q_λ^n число элементов системы $\mathfrak{E}_\lambda^n$ $(\lambda = 1, 2)$.

Тогда ввиду (1) и (2) для $\lambda = 1, 2$ выполнено

$$\frac{q_\lambda^n}{2^{n+2}} < \sum_{j \in \mathfrak{E}_\lambda^n} |\eta^n_{j-1} - \eta^n_{j+1}| \leq |x_1^n - x_2^n| < 2^{r_n}$$

и, следовательно, $q_\lambda^n < 2^{r_n + n + 2}$. Таким образом, число НЧ j , для которых верно

$$(3)\quad 2^{k_n - k_{n-1}} \leq j \leq 2^{k_n} - 2^{k_n - k_{n-1}} \; \& \; \mathfrak{A}_n(|\eta^n_{j-1} - \eta^n_{j+1}|) = \Lambda \; \&$$

$$\& \; \neg \exists i \left(\frac{j-1}{2^{k_n}} \leq \frac{i}{2^{k_{n-1}}} \leq \frac{j}{2^{k_n}} \right) ,$$

больше чем $2^{k_n} - 2 \cdot 2^{k_n - k_{n-1}} - 2 \cdot 2^{r_n + n + 2} -$

$$- 2 \cdot 2^{k_{n-1}} > 2^{k_n} \cdot (1 - 2^{-k_{n-1}+2}) > 2^{k_n} \cdot (1 - \frac{1}{2^{n+3}}) \; .$$

Пусть $\mathfrak{D}^n$ возрастающая система $2^{k_n} \cdot (1 - \frac{1}{2^{n+3}})$ выбранных нами НЧ j , для которых верно (3), а $\{ j_\ell^n \}_{\ell=1}^{2^{k_n - n - 3}}$ возрастающая система всех НЧ j таких, что $1 \leq j \leq 2^{k_m} \,\&\, \neg (j \in \mathcal{D}^n)$. Тогда

$$(4) \quad \forall p i \left(1 \leq p < m \,\&\, 0 \leq i \leq 2^{k_p} \supset \exists \ell \left(1 \leq \ell \leq \right.\right.$$
$$\left.\left. \leq 2^{k_m - m - 3} \,\&\, \frac{j_\ell^m - 1}{2^{k_m}} \leq \frac{i}{2^{k_p}} \leq \frac{j_\ell^m}{2^{k_m}} \right)\right) .$$

Заметим, что для построенной нами последовательности $\{H_\ell\}_\ell$ выполнено 2).

в) Пусть n, j и i НЧ такие, что $j \in \mathcal{D}^n \,\&$ $\& \frac{j-1}{2^{k_n}} < \frac{i}{2^{k_{n+1}}} \leq \frac{j}{2^{k_n}}$. Тогда $\eta_{j-1}^n \ast \eta_j^n \ast \eta_{j+1}^n \,\&$ $\& \eta_{j-1}^n \ast \eta_i^{n+1} \ast \eta_{j+1}^n \,\&\, \mathfrak{Ol}_n (|\eta_{j-1}^n - \eta_{j+1}^n|) \mathrel{\underline{\mathrel{\tau}}} \Lambda$ и, следовательно, $|\eta_j^n - \eta_i^{n+1}| \leq |\eta_{j-1}^n - \eta_{j+1}^n| < \frac{1}{2^{n+1}}$.

Таким образом, мы имеем ввиду $\forall x (\omega(x) < 1)$ для любого НЧ m

$$\int_0^1 \omega_0 (H_m \mathbin{\bar{\tau}} H_{m+1}) = \sum_{\ell=1}^{2^{k_m - m - 3}} \int_{\frac{j_\ell^m - 1}{2^{k_m}}}^{\frac{j_\ell^m}{2^{k_m}}} \omega_0 (H_m \mathbin{\bar{\tau}} H_{m+1}) +$$

$$+ \sum_{j \in \mathcal{D}^m} \int_{\frac{j-1}{2^{k_m}}}^{\frac{j}{2^{k_m}}} \omega_0 (H_m \mathbin{\bar{\tau}} H_{m+1}) < 2^{k_m - m - 3} \cdot \frac{1}{2^{k_m}} + \frac{1}{2^{m+1}} < \frac{1}{2^m}$$

и, следовательно, $\{H_\ell\}_\ell \in S$.

г) Для любого НЧ m мы построим последовательность неперекрывающихся рациональных сегментов ${}^m\mathcal{Y}$ так, что

α) на первом шаге в ${}^m\mathcal{Y}$ включим все сегменты системы $\left\{ \frac{j_\ell^m - 1}{2^{k_m}} \,\Delta\, \frac{j_\ell^m}{2^{k_m}} \right\}_{\ell=1}^{2^{k_m - m - 3}}$ и

β) для НЧ p если мы сделали уже p шагов, то на $(p+1)$-том шаге в ${}^m\mathcal{Y}$ включим те из сегментов системы $\{\frac{j_\ell^{m+p}-1}{2^{k_{m+p}}} \Delta \frac{j_\ell^{m+p}}{2^{k_{m+p}}}\}_{\ell=1}^{2^{k_{m+p}-m-p-3}}$, которые не содержатся в сегментах, включенных в ${}^{m}\mathcal{Y}$ на предыдущих шагах.

Заметим, что для НЧ ℓ сумма длин сегментов, включенных в ${}^{m}\mathcal{Y}$ на ℓ-ом шаге, не больше чем

$$\frac{1}{2^{k_{m+\ell-1}}} \cdot 2^{k_{m+\ell-1}-(m+\ell-1)-3} = \frac{1}{2^{m+\ell+2}} \,.$$

Ясно, что для всякого НЧ m – ${}^{m}\mathcal{Y}$ ${}^{(1)}S_{\sigma}$ -множество, мера которого меньше чем $\frac{1}{2^m}$ и ${}^{m+1}\mathcal{Y}$ является частью ${}^{m}\mathcal{Y}$.

д) Пусть m НЧ а x и y КДЧ такие, что $0 \leq \leq x \leq y \leq 1 \,\&\, \neg(x \in {}^{m}\mathcal{Y}) \,\&\, \neg(y \in {}^{m}\mathcal{Y})$. Тогда ввиду того, что для всякого НЧ n выполнено (4), мы имеем $\forall p j\, (0 \leq j \leq 2^{k_p} \supset \neg(x = \frac{j}{2^{k_p}}) \,\&\, \neg(y = \frac{j}{2^{k_p}}))$ – в частности – $0 < x \leq y < 1$. Следовательно, существуют последовательности НЧ $\{i_n^x\}_n$ и $\{i_n^y\}_n$ такие, что $\forall n\, (1 \leq i_n^x \leq i_n^y \leq 2^{k_n} \,\&\, \frac{i_n^x-1}{2^{k_n}} < x < \frac{i_n^x}{2^{k_n}} \,\&\, \&\, \frac{i_n^y-1}{2^{k_n}} < y < \frac{i_n^y}{2^{k_n}} \,\&\, (m \leq n \supset i_n^x \in \mathfrak{D}^n \,\&\, i_n^y \in \mathfrak{D}^n))$.
Выполнено

(5) $\forall n (\vartheta(H_n x) \simeq \eta_{i_n^x}^n \,\&\, \vartheta(H_n y) \simeq \eta_{i_n^y}^n \,\&\, \vartheta(H_n x) \not> \vartheta(H_n y))$.

Но тогда согласно в) для всякого НЧ n, $m \leq n$, имеет место $|\vartheta(H_n x) - \vartheta(H_{n+1} x)| \leq |\eta_{i_n^x-1}^n - \eta_{i_n^x+1}^n| < \frac{1}{2^{n+1}}$

и, следовательно, существует КДЧ x^x такое, что

$P(\{H_\ell\}_\ell, x, x^x)$.

Для любого НЧ m, $m \leq n$, выполнено

$$x^x - \frac{1}{2^{n-1}} < \vartheta(H_m x) - \frac{1}{2^n} = \eta^m_{i^x_m} - \frac{1}{2^n} <$$
$$< min(\eta^m_{i^x_m-1}, \eta^m_{i^x_m+1}) \leq max(\eta^m_{i^x_m-1}, \eta^m_{i^x_m+1}) <$$
$$< \eta^m_{i^x_m} + \frac{1}{2^n} = \vartheta(H_m x) + \frac{1}{2^m} < x^x + \frac{1}{2^{n-1}} \quad .$$

Итак, мы доказали 3). Заметим, что ввиду $A_{\varkappa}(\{G_\ell\}_\ell, \{{}^m\mathcal{G}\}_m)$ утверждение 4) является непосредственным следствием 3).

Аналогично существует КДЧ x^y, для которого верно $P(\{H_\ell\}_\ell, y, x^y)$. Мы ввиду (5) получаем $x^x \varkappa x^y$.

Таким образом, нами доказано $A_{\varkappa}(\{H_\ell\}_\ell, \{{}^m\mathcal{Y}\}_m)$. Для завершения доказательства утверждения 1) достаточно заметить, что мы доказали в части в) $\{H_\ell\}_\ell \in S$ и что из 4) непосредственно следует $\{H_\ell\}_\ell = \{G_\ell\}_\ell$.

е) Если для НЧ p выполнено $\{0 \gamma 1 \sigma - p\}_\ell \leq \{G_\ell\}_\ell \leq \{0\gamma 1 \sigma p\}_\ell$, то мы ввиду (2) имеем

$$\forall m x (x \in 0 \Delta 1 \; \& \; !\vartheta(H_m x) \supset -p \leq \vartheta(H_m x) \leq p).$$

Таким образом, $\forall \ell (0 \leq ((2p+1) \mathbin{\overset{\circ}{\cdot}} \omega_0 (H_{\ell+p+1} \mathbin{\overset{\circ}{-}} H_{\ell+p+2}) \mathbin{\overset{\circ}{-}} |H_{\ell+p+1} \mathbin{\overset{\circ}{-}} H_{\ell+p+2}|_0))$ и ввиду аддитивности и монотонности интеграла $\int$ из $\{H_\ell\}_\ell \in S$ следует $\{H_{\ell+p+1}\}_\ell \in L_1$ и 5) доказано.

Теорема 3. Пусть $\{F_\ell\}_\ell$ и $\{G_\ell\}_\ell$ последовательности ступенчатых остовов, $\{F_\ell\}_\ell \in L_1$, M и N КДЧ а $*$ один из знаков $\leq$, $\geq$. Пусть существует последовательность ${}^{(1)}S_6$ -множеств $\{{}^m\mathcal{Y}\}_m$ такая, что $A_*(\{G_\ell\}_\ell, \{{}^m\mathcal{Y}\}_m) \& \forall m x z (0 < x < 1 \& \neg(x \in {}^m\mathcal{Y}) \& \& P(\{G_\ell\}_\ell, x, z) \supset M * z * N)$. Тогда существует последовательность ступенчатых остовов $\{K_\ell\}_\ell$ такая, что

1) $\{K_\ell\}_\ell \in L_1 \& \{K_\ell\}_\ell = \{F_\ell\}_\ell \cdot \{G_\ell\}_\ell$,

2) $\lambda_1 \leq \int_0^1 \{K_\ell\}_\ell \leq \lambda_2$, где λ_1 и λ_2 КДЧ, для которых верно

$$Inf(\lambda_1, \wedge z(\exists x(0 \leq x \leq 1 \& z = M \cdot \int_0^x \{F_\ell\}_\ell + N \cdot \int_x^1 \{F_\ell\}_\ell))) \&$$
$$\& Sup(\lambda_2, \wedge z(\exists x(0 \leq x \leq 1 \& z = M \cdot \int_0^x \{F_\ell\}_\ell + N \cdot \int_x^1 \{F_\ell\}_\ell)))$$ и

3) выполнено

$$(6) \neg\neg \exists \xi (0 \leq \xi \leq 1 \& \int_0^1 \{K_\ell\}_\ell = M \cdot \int_0^\xi \{F_\ell\}_\ell + N \cdot \int_\xi^1 \{F_\ell\}_\ell).$$

Доказательство. Пусть p НЧ такое, что $max(|M|, |N|) < p$. Тогда согласно теореме 2 существует последовательность ступенчатых остовов $\{H_\ell\}_\ell$ такая, что $\{H_\ell\}_\ell \in S \& \{H_\ell\}_\ell = \{G_\ell\}_\ell \& \{H_{\ell+p+1}\}_\ell \in L_1 \&$
$\& \forall \ell x z (\vartheta(H_\ell x) \simeq z \supset M * z * N \& \exists k y (0 < y < 1 \& \& \neg(y \in {}^k\mathcal{Y}) \& P(\{G_\ell\}_\ell, y, z)))$
и, следовательно, $\forall \ell (\lambda_0(H_\ell, p) \mp H_\ell)$. Как показано в части 5а) леммы 1 из [4], можно построить возрастающую последовательность НЧ $\{q_\ell\}_\ell$ такую, что

$\{H_{q_\ell} : F_{q_\ell}\}_\ell \in L_1$. Ясно, что $\{H_{q_\ell} : F_{q_\ell}\}_\ell =$ $=\{G_\ell\}_\ell \cdot \{F_\ell\}_\ell$. Мы определим $\forall \ell\,(K_\ell \rightleftharpoons H_{q_\ell} : F_{q_\ell})$. Тогда верно 1).

I) а) Пусть m НЧ. Ввиду $K_m \asymp H_{q_m} \cdot F_{q_m}$ существуют система рациональных чисел $\{a_i\}_{i=0}^{p}$ и системы КДЧ $\{v_i\}_{i=1}^{p}$ и $\{x_i\}_{i=1}^{p}$ такие, что

$$0=a_0 < a_1 < \ldots a_p = 1 \,\&\, K_m \asymp a_0 \gamma a_1 \gamma \ldots a_p \delta v_1 \gamma v_2 \ldots$$
$$\ldots \gamma v_p \,\&\, \forall i (1 \leq i \leq p \supset x_i \simeq$$
$$\simeq \vartheta(H_{q_m} \frac{a_{i-1}+a_i}{2}) \,\&\, v_i \simeq x_i \cdot \vartheta(F_{q_m} \frac{a_{i-1}+a_i}{2}))\ .$$

Выполнено

$$\int_0^1 K_m = \sum_{i=1}^{p} v_i \cdot (a_i - a_{i-1}) = \sum_{i=1}^{p} x_i \cdot \int_{a_{i-1}}^{a_i} F_{q_m} = (M - x_1)\cdot$$
$$\cdot \int_{a_0}^{a_0} F_{q_m} + \sum_{i=1}^{p-1} (x_i - x_{i+1}) \cdot \int_{a_0}^{a_i} F_{q_m} + (x_p - N) \cdot \int_{a_0}^{a_p} F_{q_m} + N \cdot \int_0^1 F_{q_m}\ .$$

Не могут не существовать целые числа j_1 и j_2 такие, что

$$0 \leq j_1 \leq p \,\&\, 0 \leq j_2 \leq p \,\&\, \forall i (0 \leq i \leq p \supset \int_{a_0}^{a_{j_2}} F_{q_m} \ast \int_{a_0}^{a_i} F_{q_m} \ast \int_{a_0}^{a_{j_1}} F_{q_m})$$

и, следовательно,

$$(M - x_1) \cdot \int_{a_0}^{a_{j_1}} F_{q_m} + \sum_{i=1}^{p-1} (x_i - x_{i+1}) \cdot \int_{a_0}^{a_{j_1}} F_{q_m} + (x_p - N) \cdot$$
$$\cdot \int_{a_0}^{a_{j_1}} F_{q_m} + N \cdot \int_0^1 F_{q_m} \leq \int_0^1 K_m \leq (M - x_1) \cdot \int_{a_0}^{a_{j_2}} F_{q_m} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{p-1} (x_i - x_{i+1}) \cdot \int_{a_0}^{a_{j_2}} F_{q_m} + (x_p - N) \cdot \int_{a_0}^{a_{j_2}} F_{q_m} + N \cdot \int_0^1 F_{q_m}$$

т.е.

$$M \cdot \int_0^{a_{j_1}} F_{q_m} + N \cdot \int_{a_{j_1}}^1 F_{q_m} \leq \int_0^1 K_m \leq M \cdot \int_0^{a_{j_2}} F_{q_m} + N \cdot \int_{a_{j_2}}^1 F_{q_m}\ .$$

Для всякого КДЧ x, $0 \leq x \leq 1$, по определению выполнено

$$M \cdot \int_0^x F_{q_m} + N \cdot \int_x^1 F_{q_m} = (M-N) \cdot (\mathscr{C}_{F_{q_m}}(x) - \mathscr{C}_{F_{q_m}}(0)) + N \cdot (\mathscr{C}_{F_{q_m}}(1) - \mathscr{C}_{F_{q_m}}(0)).$$

Таким образом, существует РЧ b_n такое, что $0 \leq b_n \leq$
≤ 1 и

$$(7) \qquad |\int_0^1 K_n - (M \cdot \int_0^{b_n} F_{2n} + N \cdot \int_{b_n}^1 F_{2n})| < \frac{1}{2^n} .$$

Согласно частям 2б) и 5б) леммы 1 из [4], выполнено

$$|\int_0^1 \{K_\ell\}_\ell - \int_0^1 K_n| \leq \|\{K_\ell\}_\ell - K_n\|_{L_1} < \frac{1}{2^{n-1}} ,$$

$$|\int_0^{b_n} \{F_\ell\}_\ell - \int_0^{b_n} F_{2n}| \leq \int_0^{b_n} |\{F_\ell\}_\ell - F_{2n}| \leq \|\{F_\ell\}_\ell - F_{2n}\|_{L_1} < \frac{1}{2^{2n-1}} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

и – аналогично –

$$|\int_{b_n}^1 \{F_\ell\}_\ell - \int_{b_n}^1 F_{2n}| < \frac{1}{2^{n-1}} .$$

Таким образом, из (7) следует

$$(8) \qquad |\int_0^1 \{K_\ell\}_\ell - (M \cdot \int_0^{b_n} \{F_\ell\}_\ell + N \cdot \int_{b_n}^1 \{F_\ell\}_\ell)| < \frac{1}{2^{n-1}} (2 + |M| + |N|) .$$

б) Согласно теореме 1 из [4] существует абсолютно непрерывная на $0 \Delta 1$ функция f такая, что

$$\forall x y.(0 \leq x \leq y \leq 1 \supset f(y) - f(x) = \int_x^y \{F_\ell\}_\ell) .$$

Мы построим функцию g, для которой выполнено

$$\forall x (0 \leq x \leq 1 \supset g(x) = (M-N) \cdot (f(x) - f(0)) + N \cdot (f(1) - f(0)))$$

и, следовательно,

$$\forall x (0 \leq x \leq 1 \supset g(x) = M \cdot \int_0^x \{F_\ell\}_\ell + N \cdot \int_x^1 \{F_\ell\}_\ell) .$$

Из абсолютной непрерывности функции f следует равномерная непрерывность функций f и g. Согласно теореме 5.4 из [2], стр. 435, существуют КДЧ λ_1, λ_2, ν_1 и ν_2 такие, что

$$\mathrm{Inf}(\lambda_1, \wedge z(\exists x(0 \leq x \leq 1 \,\&\, g(x) = z))) ,$$

$Sup(\lambda_2, \wedge z(\exists x(0 \leq x \leq 1 \& g(x) = z)))$,

$Inf(\nu_1, \wedge z(\exists x(0 \leq x \leq 1 \& f(x) - f(0) = z)))$ и

$Sup(\nu_2, \wedge z(\exists x(0 \leq x \leq 1 \& f(x) - f(0) = z)))$.

Тогда

$\nu_1 \leq min(f(0)-f(0), f(1)-f(0)) \leq max(f(0)-f(0), f(1)-f(0)) \leq \nu_2$.

Ввиду того, что по а) для всякого НЧ n существует РЧ b_n такое, что $0 \leq b_n \leq 1$ и (8), верно утверждение 2) теоремы.

II) В следующем мы будем предполагать, что $\not\leftarrow I \geq$. (Случай $\not\leftarrow I \leq$ рассматривается аналогично.) Тогда $M \geq N$ и $\lambda_i = (M - N) \cdot \nu_i + N \cdot (f(1) - f(0))$.

Следует сказать, что можно построить $\{F_\ell\}_\ell, \{F_\ell\}_\ell \in L_1$, такое, что $\forall x(0 \leq x \leq 1 \supset \nu_1 < f(x) - f(0) < \nu_2)$.

Не может не иметь место один из следующих четырех случаев. Если в каждом из них докажем (6), то верно двойное отрицание (6) и, следовательно, ввиду того, что формула (6) начинается с отрицания - верно (6).

а) $\lambda_1 < \int_0^1 \{K_\ell\}_\ell < \lambda_2$. Тогда - по определению - существуют КДЧ ξ_1 и ξ_2 из сегмента $0 \Delta 1$, для которых выполнено $g(\xi_1) < \int_0^1 \{K_\ell\}_\ell < g(\xi_2)$, и по следствию 3 из [2], стр.377, верно (6).

б) $M = N$. Тогда согласно 2) $N \cdot (f(1) - f(0)) = \lambda_1 \leq \int_0^1 \{K_\ell\}_\ell \leq \lambda_2 = N \cdot (f(1) - f(0))$, т.е. $\int_0^1 \{K_\ell\}_\ell = N \cdot (f(1) - f(0)) = M \cdot \int_0^0 \{F_\ell\}_\ell + N \cdot \int_0^1 \{F_\ell\}_\ell$ и (6) выполнено.

в) Имеет место

$$(9) \qquad M > N \mathbin{\&} \int_0^1 \{K_\ell\}_\ell = \lambda_2 \quad .$$

Тогда мы докажем

$$(10) \qquad \neg\neg \exists \xi (0 \leq \xi \leq 1 \mathbin{\&} f(\xi) - f(0) = \nu_2) \; .$$

Заметим, что из (10) сразу следует (6).

Допустим, что (10) неверно. Тогда выполнено

$$(11) \qquad \forall \xi (0 \leq \xi \leq 1 \supset f(\xi) - f(0) < \nu_2)$$

и, следовательно, $0 < \nu_2 \mathbin{\&} f(1) - f(0) < \nu_2$.

в1) Мы покажем, что

$$Sup(M, \wedge z (\exists k x (0 < x < 1 \mathbin{\&} \neg (x \in {}^k\mathcal{Y}) \mathbin{\&} P(\{G_\ell\}_\ell, x, z)))) ,$$

$$Inf(N, \wedge z (\exists k x (0 < x < 1 \mathbin{\&} \neg (x \in {}^k\mathcal{Y}) \mathbin{\&} P(\{G_\ell\}_\ell, x, z)))).$$

Действительно, допустим, что существуют КДЧ M_0 и N_0, для которых верно

$$\forall k x z (0 < x < 1 \mathbin{\&} \neg (x \in {}^k\mathcal{Y}) \mathbin{\&} P(\{G_\ell\}_\ell, x, z) \supset M \geq M_0 \geq$$
$$\geq z \geq N_0 \geq N) \mathbin{\&} (M = M_0 \equiv N_0 > N) \; .$$

Тогда $M - N > M_0 - N_0$ и согласно части I) нашего доказательства (с заменой M и N соответственно на M_0 и N_0) $\int_0^1 \{K_\ell\}_\ell \leq (M_0 - N_0) \cdot \nu_2 +$ $+ N_0 \cdot (f(1) - f(0)) < (M - N) \cdot \nu_2 + N \cdot (f(1) - f(0)) = \lambda_2$, что противоречит (9).

в2) Для всяких КДЧ u_1, u_2, v_1 и v_2 и НЧ k определим

$$C(u_1, u_2, v_1, v_2, k) \rightleftharpoons (0 < u_1 < u_2 < 1 \mathbin{\&} \neg (u_1 \in {}^k\mathcal{Y}) \mathbin{\&}$$
$$\mathbin{\&} \neg (u_2 \in {}^k\mathcal{Y}) \mathbin{\&} P(\{G_\ell\}_\ell, u_1, v_1) \mathbin{\&} P(\{G_\ell\}_\ell, u_2, v_2) \mathbin{\&} v_1 > v_2).$$

Мы построим последовательности КДЧ $\{u_i^n\}_n$ и $\{v_i^n\}_n$ $(i = 1, 2)$ такие, что

$$\forall n(0 < u_1^n \leq u_1^{n+1} < u_2^{n+1} \leq u_2^n < 1 \,\&\, P(\{G_\ell\}_\ell, u_1^n, v_1^n) \,\&$$
$$\&\, P(\{G_\ell\}_\ell, u_2^n, v_2^n) \,\&\, v_1^n > v_2^n \,\&\, u_2^{n+1} - u_1^{n+1} \leq \frac{2}{3} \cdot (u_2^n - u_1^n)).$$

Ввиду $M > N$, свойств инфимума и супремума и $A_\geq(\{G_\ell\}_\ell, \{{}^m\mathcal{Y}\}_m)$ существуют КДЧ u_1^1, u_2^1, v_1^1 и v_2^1 и НЧ k_1 такие, что $C(u_1^1, u_2^1, v_1^1, v_2^1, k_1)$.

Пусть n НЧ и пусть уже построены КДЧ u_1^n, u_2^n, v_1^n и v_2^n и НЧ k_n такие, что $C(u_1^n, u_2^n, v_1^n, v_2^n, k_n)$. Мы построим НЧ k_{n+1}, $k_{n+1} > k_n \,\&\, \frac{1}{2^{k_{n+1}}} < \frac{1}{3} \cdot (u_2^n - u_1^n)$. Мера ${}^{(1)}S_\sigma$ -множества ${}^{k_{n+1}}\mathcal{Y}$ меньше чем $\frac{1}{2^{k_{n+1}}}$ и, следовательно, существуют КДЧ u и v такие, что

$$u_1^n + \frac{1}{3} \cdot (u_2^n - u_1^n) \leq u \leq u_2^n - \frac{1}{3} \cdot (u_2^n - u_1^n) \,\&$$
$$\&\, \neg(u \in {}^{k_{n+1}}\mathcal{Y}) \,\&\, P(\{G_\ell\}_\ell, u, v).$$

Ввиду $A_\geq(\{G_\ell\}_\ell, \{{}^m\mathcal{Y}\}_m)$ и $v_1^n > v_2^n$ выполнено $v_1^n \geq v \geq v_2^n \,\&\, (v_1^n > v \vee v > v_2^n)$, причем существует алгорифм $\mathfrak{A}$ такой, что $!\mathfrak{A}(\Lambda) \,\&\, (\mathfrak{A}(\Lambda) = \Lambda \supset v_1^n > v) \,\&\, (\mathfrak{A}(\Lambda) \neq \Lambda \supset v > v_2^n)$. Мы определим $u_1^{n+1} \rightleftharpoons u_1^n \,\&\, u_2^{n+1} \rightleftharpoons u \,\&\, v_1^{n+1} \rightleftharpoons v_1^n \,\&\, v_2^{n+1} \rightleftharpoons v$, если $\mathfrak{A}(\Lambda) = \Lambda$, а $u_1^{n+1} \rightleftharpoons u \,\&\, u_2^{n+1} \rightleftharpoons u_2^n \,\&\, v_1^{n+1} \rightleftharpoons v \,\&\, v_2^{n+1} \rightleftharpoons v_2^n$, если $\mathfrak{A}(\Lambda) \neq \Lambda$. Мы имеем $C(u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, v_1^{n+1}, v_2^{n+1}, k_{n+1}) \,\&\, u_1^n \leq u_1^{n+1} < u_2^{n+1} \leq u_2^n \,\&\, u_2^{n+1} - u_1^{n+1} \leq \frac{2}{3} \cdot (u_2^n - u_1^n)$.

Пусть КДЧ x_0 – общий предел последовательностей $\{u_1^n\}_n$ и $\{u_2^n\}_n$. Тогда $0 < x_0 < 1$ и ввиду (11) $f(x_0) - f(0) < \nu_2$. Функция f непрерывна в точке x_0 и, следовательно, существуют НЧ q и t такие, что

(12) $$0 < x_0 - \frac{1}{t} < x_0 + \frac{1}{t} < 1 \,\&\, \forall x\,(|x - x_0| \leq \frac{1}{t} \supset$$
$$\supset f(x) - f(0) < \nu_2 - \frac{1}{q}).$$

Можно построить НЧ n, РЧ a и b и остов F, для которых выполнено $x_0 - \frac{1}{2t} < a < u_1^n \leq x_0 \leq u_2^n < b < x_0 +$

$$+\frac{1}{2t} \,\&\, F \equiv 0\gamma a - \frac{1}{2t}\gamma a \gamma b \gamma b + \frac{1}{2t}\gamma 1 \delta 0 \gamma \frac{1}{q} \gamma 0 \gamma - \frac{1}{q} \gamma 0.$$

Тогда

$$\forall x\,(((0 \leq x \leq x_0 - \frac{1}{t} \vee x_0 + \frac{1}{t} \leq x \leq 1) \supset \tilde{\mathscr{E}}_F(x) - \tilde{\mathscr{E}}_F(0) = 0) \,\&$$
$$\&\, (x_0 - \frac{1}{t} \leq x \leq x_0 + \frac{1}{t} \supset |\tilde{\mathscr{E}}_F(x) - \tilde{\mathscr{E}}_F(0) = 0)| < \frac{1}{q})),$$
$$\{F_l \dotplus F\}_l \in L_1$$

и ввиду (12)

(13) $$\operatorname{Sup}(\nu_2, \wedge z\,(\exists x\,(0 \leq x \leq 1 \,\&\, f(x) + \tilde{\mathscr{E}}_F(x) - (f(0) +$$
$$+ \tilde{\mathscr{E}}_F(0)) = z))).$$

Ясно, что

$$\forall xy\,(0 \leq x \leq y \leq 1 \supset \int_x^y \{F_l \dotplus F\}_l = f(y) + \tilde{\mathscr{E}}_F(y) - (f(x) + \tilde{\mathscr{E}}_F(x))),$$
$$\{F \circ H_{l+p+1}\}_l \in L_1 \,\&\, \{K_l\}_l + \{F \circ H_{l+p+1}\}_l = \{F_l \dotplus F\}_l \cdot \{G_l\}_l$$

и, следовательно, ввиду $\{H_l\}_l = \{G_l\}_l$ выполнено по следствию теоремы 6 из [4]

$$\int_0^1 (\{K_l\}_l + \{F \circ H_{l+p+1}\}_l) = \int_0^1 \{K_l\}_l + \int_0^1 \{F \circ H_{l+p+1}\}_l =$$
$$= \lambda_2 + \frac{1}{q} \cdot \int_{a-\frac{1}{2t}}^{a} \{H_{l+p+1}\}_l - \frac{1}{q} \cdot \int_b^{b+\frac{1}{2t}} \{H_{l+p+1}\}_l \geq \lambda_2 + \frac{1}{q} \cdot$$
$$\cdot \frac{1}{2t} \cdot (v_1^n - v_2^n) > \lambda_2 = (M - N) \cdot \nu_2 + N \cdot (f(1) - f(0)) =$$

$$= (M - N) \cdot \nu_2 + N \cdot (f(1) + \mathscr{E}_F(1) - (f(0) + \mathscr{E}_F(0))) .$$

С другой стороны ввиду (13) и части I) нашего доказательства должно быть

$$\int_0^1 (\{K_\ell\}_\ell + \{F \mathbin{\dot{\circ}} H_{\ell+n+1}\}_\ell) \leq \lambda_2 .$$

Таким образом, мы доказали (10) и, следовательно, и (6).

г) Если $M > N \,\&\, \int_0^1 \{K_\ell\}_\ell = \lambda_1$, то (6) доказывается рассуждениями аналогичными части в) доказательства.

В следующем мы пользуемся определениями и обозначениями из [3].

<u>Следствие</u>. Пусть f интегрируемая по Лебегу функция, u и v КДЧ, $0 \leq u < v \leq 1$, g функция монотонная на сегменте $u \Delta v$ а M и N КДЧ такие, что $(M \leq g(u) \leq g(v) \leq N \vee M \geq g(u) \geq g(v) \geq N)$. Тогда, если h функция, для которой выполнено

$$(14) \quad \forall x \, (h(x) = g(\max(\min(x, v), u))) ,$$

то $\forall x \, (u \leq x \leq v \supset h(x) = g(x))$, функция $f \cdot h$ интегрируема по Лебегу и имеет место

$$(15) \quad \neg\neg \exists \eta \, (u \leq \eta \leq v \,\&\, \forall w z \, (w \int_{u \Delta \eta}^{\{1\}} f \,\&\, z \int_{\eta \Delta v}^{\{1\}} f \supset$$
$$\supset (M \cdot w + N \cdot z) \int_{u \Delta v}^{\{1\}} (f \cdot h))) .$$

<u>Доказательство</u>. Пусть $(\ast \equiv \leq \vee \ast \equiv \geq) \,\&\, M \ast N$ а h функция такая, что (14). Тогда $M \ast h(0) \ast h(1) \ast N$, функция h является монотонной и, следовательно, согласно теореме 6.4 из [2], стр. 446, h равномерно непрерывна и, таким образом, $L_1(h)$. По теореме 5 из [4] существуют последовательности ступенчатых остовов $\{F_\ell\}_\ell$ и $\{G_\ell\}_\ell$ такие, что $\{F_\ell\}_\ell \in L_1 \,\&\, \{G_\ell\}_\ell \in L_1$ и для

почти всех КДЧ x из сегмента $0 \Delta 1$ последовательность $\{\vartheta(F_\ell x)\}_\ell$ (соответственно $\{\vartheta(G_\ell x)\}_\ell$) определена и сходится к $f(x)$ (соответственно к $h(x)$). Тогда $\{0\gamma 1\sigma M\}_\ell * \{G_\ell\}_\ell * \{0\gamma 1\sigma N\}_\ell$.

Согласно теореме 3 существует последовательность ступенчатых остовов $\{K_\ell\}_\ell$ такая, что $\{K_\ell\}_\ell \in L_1$ & & $\{K_\ell\}_\ell = \{F_\ell\}_\ell \cdot \{G_\ell\}_\ell$ и, следовательно, для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ последовательность $\{\vartheta(K_\ell x)\}_\ell$ определена и сходится к $f(x) \cdot h(x)$. Но тогда по теореме 5 из [4] $L_1(f \cdot h)$.

Существуют абсолютно непрерывные функции φ и ψ такие, что $\forall x (0 < x < 1 \supset D(f(x), \varphi, x) \& D(f(x) \cdot h(x), \psi, x))$ и

$$(16)\ \forall y x (0 \leq y \leq x \leq 1 \supset ((\varphi(x) - \varphi(y)) \overset{\{1\}}{\underset{y \Delta x}{\int}} f) \& ((\psi(x) - \psi(y)) \overset{\{1\}}{\underset{y \Delta x}{\int}} (f \cdot h))$$

(см. 2 из [3]). Мы построим функции φ_1 и ψ_1 , для которых верно

$$(17)\ \forall x (\varphi_1(x) = \varphi(max(min(x, v), u)) \& \psi_1(x) = \\ = \psi(max(min(x, v), u))) .$$

Ясно, что φ_1 и ψ_1 абсолютно непрерывны и

$$(18)\ \forall x (((0 \leq x < u \vee v < x \leq 1) \supset D(0, \varphi_1, x) \& \\ \& D(0, \psi_1, x)) \& (u < x < v \supset D(f(x), \varphi_1, x) \& D(f(x) \cdot h(x), \psi_1, x))).$$

Исходя от $\{F_\ell\}_\ell$ легко построить последовательность ступенчатых остовов $\{F_\ell^1\}_\ell$ такую, что $\{F_\ell^1\}_\ell \in L_1$ и для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$

$$\exists z (P(\{F^1_\ell\}_\ell, x, z) \,\&\, ((0 \le x < u \vee v < x \le 1) \supset z = 0) \,\&$$
$$\& \,(u < x < v \supset z = f(x)))\ .$$

Согласно теореме 3 существует последовательность $\{K^1_\ell\}_\ell$ такая, что $\{K^1_\ell\}_\ell \in L_1$, $\{K^1_\ell\}_\ell = \{F^1_\ell\}_\ell \cdot \{G_\ell\}_\ell$ и не может не существовать КДЧ ξ,

(19) $\quad 0 \le \xi \le 1 \,\&\, \int_0^1 \{K^1_\ell\}_\ell = M\cdot\int_0^\xi \{F^1_\ell\}_\ell + N\cdot\int_\xi^1 \{F^1_\ell\}_\ell$.

По теоремам 2 и 6 и следствию теоремы 6 из [4] ввиду (18) получаем

$$\forall yz(0\le y\le z\le 1 \supset \varphi_1(z)-\varphi_1(y) = \int_y^z\{F^1_\ell\}_\ell \,\&\, \psi_1(z) -$$
$$- \psi_1(y) = \int_y^z\{K^1_\ell\}_\ell) \,\&\, \int_0^u\{F^1_\ell\}_\ell =$$
$$= \int_v^1\{F^1_\ell\}_\ell = \int_0^u\{K^1_\ell\}_\ell = \int_v^1\{K^1_\ell\}_\ell = 0$$

и, следовательно, для всяких КДЧ ξ и η таких, что (19) и $\eta = max\,(min\,(\xi, v), u)$, получаем ввиду (16) и (17)

$$\Psi(v)-\Psi(u) = \int_u^v\{K^1_\ell\}_\ell = M\cdot\int_u^\eta\{F^1_\ell\}_\ell + N\cdot\int_\eta^v\{F^1_\ell\}_\ell =$$
$$= M\cdot(\varphi(\eta)-\varphi(u)) + N\cdot(\varphi(v)-\varphi(\eta))\ ,$$

т.е. $\forall wz(w \int^{\{1\}}_{u\Delta\eta} f \,\&\, z\int^{\{1\}}_{\eta\Delta v} f \supset (M\cdot w + N\cdot z)\int^{\{1\}}_{u\Delta v}(f\cdot h))$.

Как мы знаем, не может не существовать КДЧ ξ такое, что (19). Таким образом, верно (15).

Следующий пример покажет, что в теореме 3 и ее следствии нельзя снять двойное отрицание с формул (6) и (15).

<u>Пример</u>. Можно построить функции f и φ и функцию двух действительных переменных g такие, что

1) $L_1(f) \& \forall x(0<x<1 \supset D(f(x),\varphi,x)) \& \varphi(0)=0$

и, следовательно, согласно 2б) из [3] $\forall y(0<y\leq$ $\leq 1 \supset \varphi(y) \overset{\{1\}}{\underset{0\Delta y}{\int}} f)$,

2) для всякого КДЧ x, $\frac{1}{6} \leq x \leq \frac{3}{6}$, $\tilde{g}_{x\square}$ монотонная функция, $\tilde{g}_{x\square}(0)=1 \& \tilde{g}_{x\square}(1)=0$ и $L_1(f\cdot\tilde{g}_{x\square})$ и

3) $\neg\forall x(\frac{1}{6}\leq x\leq\frac{3}{6}\supset\exists\xi(0\leq\xi\leq 1 \& \varphi(\xi)\overset{\{1\}}{\underset{0\Delta 1}{\int}}(f\cdot\tilde{g}_{x\square})))$.

<u>Доказательство</u>. Для всяких КДЧ x и x, $\frac{1}{6}\leq x\leq$ $\leq\frac{3}{6}$, определим

$$f(x) \rightleftharpoons 1-3\cdot(|x-\tfrac{1}{6}|-|x-\tfrac{2}{6}|-|x-\tfrac{3}{6}|+|x-\tfrac{4}{6}|),$$

$$\varphi_1(x)\rightleftharpoons x-\tfrac{3}{2}\cdot(|x-\tfrac{1}{6}|\cdot(x-\tfrac{1}{6})-|x-\tfrac{2}{6}|\cdot(x-\tfrac{2}{6})-|x-\tfrac{3}{6}|\cdot$$
$$\cdot(x-\tfrac{3}{6})+|x-\tfrac{4}{6}|\cdot(x-\tfrac{4}{6}))-\tfrac{1}{6},$$

$$\varphi(x)\rightleftharpoons\varphi_1(max(min(x;1),0)),$$

$$g(x\square x)\rightleftharpoons\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2x}\cdot(-|x|+|x-x-\tfrac{3}{6}|+|x-\tfrac{1}{6}|-|x-\tfrac{4}{6}|) \text{ и}$$

$$h(x)\rightleftharpoons\frac{x}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{6^2\cdot x}.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что f полигональная функция, выполнено 1) и 2),

(20) $\forall x((\frac{2}{6}\leq x\leq\frac{3}{6}\supset\varphi(x)=\varphi(\frac{2}{6})=\frac{3}{12}) \& (0\leq x<$ $<\frac{2}{6}\supset\varphi(x)<\frac{3}{12}) \& (\frac{3}{6}<x\leq 1\supset\frac{3}{12}<\varphi(x)))$,

h возрастает на сегменте $\frac{1}{6}\Delta\frac{3}{6}$, $h(\frac{1}{6})=\frac{1}{12}\,\&$ $\& h(\frac{3}{6})=\frac{13}{36}>\frac{4}{12}$. Функция $f\cdot\tilde{g}_{x\square}$ полигональна и, следовательно, интегрируема по Лебегу,

(21) $\forall x \left(\frac{1}{6} \leq x \leq \frac{3}{6} \supset h(x) \overset{\{1\}}{\underset{0\Delta 1}{\int}} \cdot (f \cdot \mathfrak{F}_{x\square})\right)$.

Согласно теореме 6.2 из [2], стр.442, существует функция Ψ такая, что

(22) $\forall y \left(h(\frac{1}{6}) \leq y \leq h(\frac{3}{6}) \supset \frac{1}{6} \leq \Psi(y) \leq \frac{3}{6} \,\&\, h(\Psi(y)) = y\right)$.

Допустим, что выполнено

$$\forall x \left(\frac{1}{6} \leq x \leq \frac{3}{6} \supset \exists \xi \left(0 \leq \xi \leq 1 \,\&\, \varphi(\xi) \overset{\{1\}}{\underset{0\Delta 1}{\int}} (f \cdot \mathfrak{F}_{x\square})\right)\right) .$$

Тогда ввиду (21) и (22) $\forall y \left(h(\frac{1}{6}) \leq y \leq h(\frac{3}{6}) \supset\right.$

$\left. \supset \exists \xi \left(\varphi(\xi) = h(\Psi(y)) = y\right)\right)$ и, следовательно,

(23) $\forall x \exists \xi \left(\varphi(\xi) = max(min(x + \frac{3}{12}, h(\frac{3}{6})), h(\frac{1}{6}))\right)$.

Для всяких КДЧ x и ξ выполнено ввиду (20) $(\varphi(\xi) =$ $= max(min(x + \frac{3}{12}, h(\frac{3}{6})), h(\frac{1}{6})) \supset (x \leq 0 \equiv \xi \leq \frac{3}{6}) \,\&\, (0 \leq x \equiv \frac{2}{6} \leq \xi))$.

Согласно теореме 1.3 из [2], стр.399, верно $\forall \xi (\xi <$ $< \frac{3}{6} \vee \frac{2}{6} < \xi)$. Таким образом, из (23) следует $\forall x (x \leq 0 \vee 0 \leq x)$. Однако, как доказано в [2] (лемма 2, стр.366), верно $\neg \forall x (x \leq 0 \vee 0 \leq x)$. Итак, мы доказали 3).

Литература

[1] А. МАРКОВ: Теория алгорифмов, Труды Мат.инст.им. В.А.Стеклова, т. XLII (1954).

[2] - Проблемы конструктивного направления в математике, 2 (сборник работ), Труды Мат.инст.им.

В.А.Стеклова,т. LXVII (1962).

[3] О. ДЕМУТ: Интеграл Лебега в конструктивном анализе, Записки научных семинаров Ленинградского отд.Мат.инст.им.В.А.Стеклова,т.4(1967), 30-43.

[4] О. ДЕМУТ: Пространства L_{κ} и S в конструктивной математике, Comm.Math.Univ.Carolinae 10(1969), 261-284.

Matematicko-fyzikální fakulta KU
Karlova universita
Sokolovská 83,Praha Karlín
Československo

(Oblatum 5.12.1969)