Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Osvald Demuth

Об измеримости множеств по Лебегу в конструктивной математике

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 10 (1969), No. 3, 463--492

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/105246`

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
10, 3 (1969)

ОБ ИЗМЕРИМОСТИ МНОЖЕСТВ ПО ЛЕБЕГУ В КОНСТРУКТИВНОЙ МАТЕМАТИКЕ

О. ДЕМУТ, Прага (O. DEMUTH, Praha)

В настоящей статье вводится и исследуется пространство M – конструктивный аналог пространства измеримых по Лебегу множеств, содержащихся в сегменте $0 \Delta 1$. Определение пространства M близко определению, данному Н. А. Шаниным в [3], стр.248–55. В отличие от работы Н.А. Шанина всякому элементу пространства M сопоставлено определенное множество и на этой основе в статье рассмотрены вопросы измеримости "точечно определенных" множеств. При этом используется теория пространства L_1 описанная в [5], и доказан конструктивный аналог теоремы В. Леви.

В следующем пользуемся определениями и результатами из [1],[3] и [5]. Натуральными числами (НЧ) называем положительные целые числа, конструктивными действительными числами (КДЧ) – вещественные дуплексы (см. [3], стр. 77), последовательностями конструктивных объектов определенного типа – нормальные алгорифмы [1], перерабатывающие всякое НЧ в объект этого типа.

Последовательность неперекрывающихся сегментов назовем ${}^{(1)}S_{\sigma}$-множеством а КДЧ x мерой этого множества, если частные суммы длин сегментов этой последовательности сходятся к x. Если $\mathcal{S}$ ${}^{(1)}S_{\sigma}$-множество а x КДЧ, то посредством $x \in \mathcal{Y}$ обозначим: Не может не существовать сегмент последовательности $\mathcal{Y}$, содержащий x.

${}^{(1)}S_\sigma$-множество $\mathcal{Y}$ назовем S-множеством, если все сегменты последовательности $\mathcal{Y}$ рациональны и содержатся в сегменте $0 \triangle 1$.

Будем говорить, что некоторое свойство КДЧ - скажем $P(x)$ - выполнено для почти всех КДЧ x из $0 \triangle 1$, если существует последовательность ${}^{(1)}S_\sigma$-множеств $\{{}^{k}\mathcal{Y}\}_k$ такая, что для всякого НЧ k ${}^{k+1}\mathcal{Y}$ является частью ${}^{k}\mathcal{Y}$, мера ${}^{k}\mathcal{Y}$ меньше чем $\frac{1}{k+1}$ и выполнено $\forall x\,(x \in 0 \triangle 1 \,\&\, \neg\,(x \in {}^{k}\mathcal{Y}) \supset P(x))$.

В статье пользуемся определениями и свойствами ступенчатых остовов и пространства L_1 описанными в [5].

В дальнейшем буквы k, l, m и n служат переменными для НЧ, i и j - переменными для целых чисел, a и b - для рациональных чисел а x и y - для КДЧ. Λ знак пустого слова.

Замечание 1. Легко доказать следующие утверждения:

1) Для всякого ${}^{(1)}S_\sigma$-множества $\mathcal{Y}$ меры меньшей чем z существует S-множество $\mathcal{C}$ меры меньшей чем z и такое, что $\forall x\,(x \in 0 \triangle 1 \,\&\, x \in \mathcal{Y} \supset x \in \mathcal{C})$.

2) Пусть даны последовательности S-множеств $\{{}^{k}\mathcal{C}\}_k$ и КДЧ $\{x_k\}_k$ такие, что ряд $\sum_k x_k$ сходится и для всякого НЧ k мера множества ${}^{k}\mathcal{C}$ меньше чем x_k. Тогда существует S-множество $\mathcal{C}$ меры меньшей

чем сумма ряда $\sum\limits_{k} x_k$ и такое, что имеет место $\forall x\,(x \in \mathcal{Y} \equiv \neg\neg \exists k\,(x \in {}^{k}\mathcal{Y}))$.

Отсюда следует, что некоторое свойство КДЧ - скажем $P(x)$ - выполнено для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ тогда и только тогда, когда для всякого НЧ k существует S-множество ${}^{k}\mathcal{Y}$ меры меньшей чем $\frac{1}{2^k}$ и такое, что $\forall x\,(x \in 0 \Delta 1 \,\&\, \neg(x \in {}^{k}\mathcal{Y}) \supset P(x))$.

На основании этого и 2) для любой последовательности свойств КДЧ $\{P_n(x)\}_n$ такой, что для всякого НЧ n верно - для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ выполнено $P_n(x)$, имеем: для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ выполнено $\forall n\, P_n(x)$.

Определения: 1) комплексами называем слова вида

(1) $\quad a_1 \gamma a_2 \dots \gamma a_{2i}$,

где i целое неотрицательное число а все a_j рациональные числа такие, что $0 \le a_1 < a_2 < \dots < a_{2i} \le 1$.

(1) обозначим посредством $\mathfrak{M}$.

(2) $|\mathfrak{M}| \rightleftharpoons \sum\limits_{j=1}^{i} (a_{2j-1} - a_{2j-1})$,

3/ $$\setminus \mathfrak{M} \rightleftharpoons \begin{cases} 0 \gamma 1, & \text{если } i = 0, \text{ и} \\ PR\, a_2 \gamma a_3 \dots \gamma a_{2i-1} SQ, & \text{если } 0 < i, \end{cases}$$

где $(a_1 = 0 \supset P \mathbin{\overline{\underline{\times}}} \Lambda) \,\&\, (0 < a_1 \supset P \mathbin{\overline{\underline{\times}}} 0\gamma a_1) \,\&\, (a_{2i} < 1 \supset Q \mathbin{\overline{\underline{\times}}} a_{2i}\gamma 1) \,\&$
$\&\, (a_{2i} = 1 \supset Q \mathbin{\overline{\underline{\times}}} \Lambda) \,\&\, (R \mathbin{\overline{\underline{\times}}} \Lambda \vee R \mathbin{\overline{\underline{\times}}} \gamma) \,\&\, (S \mathbin{\overline{\underline{\times}}} \Lambda \vee S \mathbin{\overline{\underline{\times}}} \gamma) \,\&$
$\&\, (i = 1 \supset R \mathbin{\overline{\underline{\times}}} \Lambda \,\&\, ((P \mathbin{\overline{\underline{\times}}} \Lambda \vee Q \mathbin{\overline{\underline{\times}}} \Lambda) \equiv S \mathbin{\overline{\underline{\times}}} \Lambda)) \,\&$
$\&\, (1 < i \supset (R \mathbin{\overline{\underline{\times}}} \Lambda \equiv P \mathbin{\overline{\underline{\times}}} \Lambda) \,\&\, (S \mathbin{\overline{\underline{\times}}} \Lambda \equiv Q \mathbin{\overline{\underline{\times}}} \Lambda))$.

4/ Пусть χ_0 нормальный алгорифм [1] такой, что

$$\chi_{o} \llcorner \mathfrak{M}_{\lrcorner} \simeq \begin{cases} 0\gamma 1\sigma 0, & \text{если } i = 0, \text{ и} \\ Ua_1\gamma a_2 \dots \gamma a_{2i} V\sigma U T^{i-1} 1 Y, & \text{если } 0 < i, \end{cases}$$

где $T \rightleftharpoons 1\gamma 0\gamma \,\&\, (a_1 = 0 \supset U \rightleftharpoons \Lambda) \,\&\, (0 < a_1 \supset U \rightleftharpoons 0\gamma) \,\&$

$\& \, (a_{2i} < 1 \supset V \rightleftharpoons \gamma 1 \,\&\, Y \rightleftharpoons \gamma 0) \,\&\, (a_{2i} = 1 \supset V \rightleftharpoons Y \rightleftharpoons \Lambda)$.

$\chi_{o} \llcorner \mathfrak{M}_{\lrcorner}$ назовем характеристическим ступенчатым остовом комплекса $\mathfrak{M}$.

5/ Для любого КДЧ x обозначим

$x \in \mathfrak{M} \rightleftharpoons \exists_j \, (1 \leq j \leq i \,\&\, a_{2j-1} < x < a_{2j})$ и

$x \in \hbar[\mathfrak{M}] \rightleftharpoons \exists_j (0 \leq j \leq 2i \,\&\, x = a_j)$.

Очевидно имеет место

$\forall x \, (0 < x < 1 \,\&\, \neg (x \in \hbar[\mathfrak{M}]) \supset (x \in \mathfrak{M} \vee x \in \setminus \mathfrak{M}) \,\&$

$\& \, (\neg (x \in \mathfrak{M}) \equiv x \in \setminus \mathfrak{M}))$,

$\forall x \, ((! \vartheta_{\llcorner} \chi_{o} \llcorner \mathfrak{M}_{\lrcorner} x_{\lrcorner} \supset (\vartheta_{\llcorner} \chi_{o} \llcorner \mathfrak{M}_{\lrcorner} x_{\lrcorner} = 0 \vee \vartheta_{\llcorner} \chi_{o} \llcorner \mathfrak{M}_{\lrcorner} x_{\lrcorner} = 1)) \,\&$

$\& (\vartheta_{\llcorner} \chi_{o} \llcorner \mathfrak{M}_{\lrcorner} x_{\lrcorner} \simeq 1 \equiv x \in \mathfrak{M}) \,\&\, (\vartheta_{\llcorner} \chi_{o} \llcorner \mathfrak{M}_{\lrcorner} x_{\lrcorner} \simeq 0 \equiv x \in \setminus \mathfrak{M}))$,

$|\mathfrak{M}| = \int_0^1 \chi_{o} \llcorner \mathfrak{M}_{\lrcorner}$, $\chi_{o} \llcorner \mathfrak{M}_{\lrcorner} \dot{+} \chi_{o} \llcorner \setminus \mathfrak{M}_{\lrcorner} \overline{\overline{\circ}} \, 0\gamma 1\sigma 1$,

$\chi_{o} \llcorner \setminus \mathfrak{M}_{\lrcorner} \overline{\overline{\circ}} \, 0\gamma 1\sigma 1 \dot{-} \chi_{o} \llcorner \mathfrak{M}_{\lrcorner}$ и $|\mathfrak{M}| + |\setminus \mathfrak{M}| = 1$.

(Определения ступенчатых остовов, отношений между ними и операций над ними и свойства нормального алгорифма ϑ см. в [5].)

Определения: Пусть $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ комплексы такие, что $\mathfrak{M}_k \rightleftharpoons {}^k a_1 \gamma {}^k a_2 \dots \gamma {}^k a_{2i_k}$ $(k = 1, 2)$. Тогда определим:

1) $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_2 \rightleftharpoons \forall x \, (x \in \mathfrak{M}_1 \supset x \in \mathfrak{M}_2)$,

2) $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 \rightleftharpoons \forall x \, (x \in \mathfrak{M}_1 \equiv x \in \mathfrak{M}_2)$,

3) $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 \rightleftharpoons {}^3a_1 \gamma\, {}^3a_2 \ldots \gamma\, {}^3a_{2i_3}$, где $0 \leq i_3$ &
$\& \, 0 \leq {}^3a_1 < {}^3a_2 < \ldots < {}^3a_{2i_3} \leq 1 \,\&\, \forall a b (\exists j (1 \leq j \leq i_3 \,\&$
$\& \, a \underset{\circ}{=} {}^3a_{2j-1} \,\&\, b \underset{\circ}{=} {}^3a_{2j}) \equiv a < b \,\&\, \exists j k (1 \leq j \leq i_1 \,\&$
$\& \, 1 \leq k \leq i_2 \,\&\, a \underset{\circ}{=} max({}^1a_{2j-1}, {}^2a_{2k-1}) \,\&\, b \underset{\circ}{=} min({}^1a_{2j}, {}^2a_{2k})))$,

4) $\mathfrak{M}_1 \setminus \mathfrak{M}_2 \rightleftharpoons \mathfrak{M}_1 \cap (\setminus \mathfrak{M}_2)$,

5) $\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2 \rightleftharpoons \setminus((\setminus \mathfrak{M}_1) \cap (\setminus \mathfrak{M}_2))$ и

6) $\Delta(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2) \rightleftharpoons (\mathfrak{M}_1 \setminus \mathfrak{M}_2) \cup (\mathfrak{M}_2 \setminus \mathfrak{M}_1)$.

Имеем $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_2 \equiv 0 \leq \chi_{o}\llcorner \mathfrak{M}_2 \lrcorner \underset{\circ}{-} \chi_{o}\llcorner \mathfrak{M}_1 \lrcorner$,
$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 \equiv \chi_{o}\llcorner \mathfrak{M}_1 \lrcorner \underset{\circ}{=} \chi_{o}\llcorner \mathfrak{M}_2 \lrcorner$, $\forall x (x \in \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 \equiv x \in$
$\in \mathfrak{M}_1 \,\&\, x \in \mathfrak{M}_2)$,
$\chi_{o}\llcorner \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 \lrcorner \underset{\circ}{=} \chi_{o}\llcorner \mathfrak{M}_1 \lrcorner \dot{\circ} \chi_{o}\llcorner \mathfrak{M}_2 \lrcorner \underset{\circ}{=} min_o(\chi_{o}\llcorner \mathfrak{M}_1 \lrcorner, \chi_{o}\llcorner \mathfrak{M}_2 \lrcorner)$.
$\chi_{o}\llcorner \mathfrak{M}_1 \setminus \mathfrak{M}_2 \lrcorner \underset{\circ}{=} \chi_{o}\llcorner \mathfrak{M}_1 \lrcorner \dot{\circ} (0 \gamma 1 \delta 1 \underset{\circ}{-} \chi_{o}\llcorner \mathfrak{M}_2 \lrcorner) \underset{\circ}{=} \chi_{o}\llcorner \mathfrak{M}_1 \lrcorner \underset{\circ}{-}$
$\underset{\circ}{-} \chi_{o}\llcorner \mathfrak{M}_1 \lrcorner \dot{\circ} \chi_{o}\llcorner \mathfrak{M}_2 \lrcorner$, $\chi_{o}\llcorner \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2 \lrcorner \underset{\circ}{=} 0 \gamma 1 \delta 1 \underset{\circ}{-} (0 \gamma 1 \delta 1 \underset{\circ}{-}$
$\underset{\circ}{-} \chi_{o}\llcorner \mathfrak{M}_1 \lrcorner) \dot{\circ} (0 \gamma 1 \delta 1 \underset{\circ}{-} \chi_{o}\llcorner \mathfrak{M}_2 \lrcorner) \underset{\circ}{=} \chi_{o}\llcorner \mathfrak{M}_1 \lrcorner \underset{\circ}{+} \chi_{o}\llcorner \mathfrak{M}_2 \lrcorner \underset{\circ}{-} \chi_{o}\llcorner \mathfrak{M}_1 \lrcorner \dot{\circ}$
$\dot{\circ} \chi_{o}\llcorner \mathfrak{M}_2 \lrcorner \underset{\circ}{=} max_o(\chi_{o}\llcorner \mathfrak{M}_1 \lrcorner, \chi_{o}\llcorner \mathfrak{M}_2 \lrcorner)$, $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 = \Lambda \supset \chi_{o}\llcorner \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2 \lrcorner \underset{\circ}{=}$
$\underset{\circ}{=} \chi_{o}\llcorner \mathfrak{M}_1 \lrcorner \underset{\circ}{+} \chi_{o}\llcorner \mathfrak{M}_2 \lrcorner$ и $\chi_{o}\llcorner \Delta(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2) \lrcorner \underset{\circ}{=} max_o(\chi_{o}\llcorner \mathfrak{M}_1 \lrcorner \underset{\circ}{-}$
$\underset{\circ}{-} \chi_{o}\llcorner \mathfrak{M}_1 \lrcorner \dot{\circ} \chi_{o}\llcorner \mathfrak{M}_2 \lrcorner, \chi_{o}\llcorner \mathfrak{M}_2 \lrcorner \underset{\circ}{-} \chi_{o}\llcorner \mathfrak{M}_1 \lrcorner \dot{\circ} \chi_{o}\llcorner \mathfrak{M}_2 \lrcorner) \underset{\circ}{=}$
$\underset{\circ}{=} max_o(\chi_{o}\llcorner \mathfrak{M}_1 \lrcorner, \chi_{o}\llcorner \mathfrak{M}_2 \lrcorner) \underset{\circ}{-} \chi_{o}\llcorner \mathfrak{M}_1 \lrcorner \dot{\circ} \chi_{o}\llcorner \mathfrak{M}_2 \lrcorner \underset{\circ}{=} |\chi_{o}\llcorner \mathfrak{M}_1 \lrcorner \underset{\circ}{-} \chi_{o}\llcorner \mathfrak{M}_2 \lrcorner|$.

На основании этих отношений видно, что операции $\cap$, $\cup$ и Δ коммутативны и ассоциативны и что для $\cap$ и $\cup$ выполнены законы дистрибутивности. Для любых комплексов $\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_4$ имеет место
$\mathfrak{N}_1 \subseteq \mathfrak{N}_2 \supset \setminus \mathfrak{N}_2 \subseteq \setminus \mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2 \subseteq \mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_1 \setminus \mathfrak{N}_2 \subseteq \mathfrak{N}_1$,

$\mathscr{X}_1 \setminus \mathscr{X}_2 = \mathscr{X}_1 \setminus (\mathscr{X}_1 \cap \mathscr{X}_2)$, $\mathscr{X}_1 \subseteq \mathscr{X}_1 \cup \mathscr{X}_2$, $\Delta(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2) =$
$= (\mathscr{X}_1 \cup \mathscr{X}_2) \setminus (\mathscr{X}_1 \cap \mathscr{X}_2)$,

$\Delta(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2) = \Lambda \equiv \mathscr{X}_1 = \mathscr{X}_2$,

$\Delta(\setminus \mathscr{X}_1, \setminus \mathscr{X}_2) = \Delta(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2)$, $\Delta(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2) \subseteq \Delta(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_3) \cup$
$\cup \Delta(\mathscr{X}_3, \mathscr{X}_2)$,

$\Delta(\mathscr{X}_1 \cap \mathscr{X}_3, \mathscr{X}_2 \cap \mathscr{X}_3) \subseteq \Delta(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2)$,

$\Delta(\mathscr{X}_1 \cap \mathscr{X}_3, \mathscr{X}_2 \cap \mathscr{X}_4) \subseteq \Delta(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2) \cup \Delta(\mathscr{X}_3, \mathscr{X}_4)$,

$\Delta(\mathscr{X}_1 \cup \mathscr{X}_3, \mathscr{X}_2 \cup \mathscr{X}_3) \subseteq \Delta(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2)$,

$\Delta(\mathscr{X}_1 \cup \mathscr{X}_3, \mathscr{X}_2 \cup \mathscr{X}_4) \subseteq \Delta(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2) \cup \Delta(\mathscr{X}_3, \mathscr{X}_4)$,

$\mathscr{X}_1 \subseteq \mathscr{X}_2 \supset |\mathscr{X}_1| \leq |\mathscr{X}_2|$, $\mathscr{X}_1 = \mathscr{X}_2 \equiv |\Delta(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2)| = 0$,

$|\mathscr{X}_1 \setminus \mathscr{X}_2| = |\mathscr{X}_1| - |\mathscr{X}_1 \cap \mathscr{X}_2|$,

$|\mathscr{X}_1 \cup \mathscr{X}_2| = |\mathscr{X}_1| + |\mathscr{X}_2| - |\mathscr{X}_1 \cap \mathscr{X}_2| \leq |\mathscr{X}_1| + |\mathscr{X}_2|$,

$|\Delta(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2)| = |\mathscr{X}_1| + |\mathscr{X}_2| - 2|\mathscr{X}_1 \cap \mathscr{X}_2|$ и

$||\mathscr{X}_1| - |\mathscr{X}_2|| \leq |\Delta(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2)|$.

Определение: Пусть π нормальный алгорифм такой, что для всякого ступенчатого остова F такого, что $F \equiv b_0 \gamma b_1 \ldots \ldots \gamma b_m \delta y_1 \gamma y_2 \ldots \gamma y_m$ & $\forall i (1 \leq i \leq m \supset (y_i = 0 \vee y_i = 1))$, имеет место $! \pi \llcorner F \lrcorner$, $\pi \llcorner F \lrcorner$ комплекс и выполнено

$$\pi \llcorner F \lrcorner \equiv \begin{cases} \Lambda, & \text{если } \forall i (1 \leq i \leq m \supset y_i = 0) \text{ и} \\ b_{\ell_1} \gamma b_{\ell_2} \ldots \gamma b_{\ell_{2j}}, & \text{если } \neg \forall i (1 \leq i \leq m \supset y_i = 0), \end{cases}$$

где j НЧ и $\{\ell_i\}_{i=1}^{2j}$ возрастающая система целых чисел, для которой имеет место $0 \leq \ell_1 < \ell_{2j} \leq m \,\&\, \forall i n (1 \leq i \leq m \,\&\, \& 1 \leq n \leq j \supset (\ell_{2n-1} < i \leq \ell_{2n} \supset y_i = 1) \,\&\, ((i \leq \ell_1 \vee n < j \,\&\, \& \ell_{2n} < i \leq \ell_{2n+1} \vee \ell_{2j} < i) \supset y_i = 0))$.

Заметим, что $\chi_{o}\llcorner \Pi_{L} F \lrcorner\lrcorner \mathrel{\overline{=}} F$.

Определения. Пусть $\{\mathfrak{M}_n\}_n$ и $\{\mathfrak{N}_n\}_n$ последователь-ности комплексов и x КДЧ. Тогда обозначим:

1) $x \in \{\mathfrak{M}_n\}_n \rightleftharpoons \exists k \forall n (k \le n \supset x \in \mathfrak{M}_n)$,

2) $\{\mathfrak{M}_n\}_n \subseteq \{\mathfrak{N}_n\}_n$ (соотв. $\{\mathfrak{M}_n\}_n = \{\mathfrak{N}_n\}_n$), если для почти всех КДЧ x из $0 \triangle 1$ выполнено

$x \in \{\mathfrak{M}_n\}_n \supset x \in \{\mathfrak{N}_n\}_n$ (соотв. $x \in \{\mathfrak{M}_n\}_n \equiv x \in \{\mathfrak{N}_n\}_n$),

3) $\setminus \{\mathfrak{M}_n\}_n \rightleftharpoons \{\setminus \mathfrak{M}_n\}_n$,

4) $\{\mathfrak{M}_n\}_n \cap \{\mathfrak{N}_n\}_n \rightleftharpoons \{\mathfrak{M}_{n+1} \cap \mathfrak{N}_{n+1}\}_n$,

$\{\mathfrak{M}_n\}_n \setminus \{\mathfrak{N}_n\}_n \rightleftharpoons \{\mathfrak{M}_n\}_n \cap (\setminus \{\mathfrak{N}_n\}_n)$,

$\{\mathfrak{M}_n\}_n \cup \{\mathfrak{N}_n\}_n \rightleftharpoons \setminus ((\setminus \{\mathfrak{M}_n\}_n) \cap (\setminus \{\mathfrak{N}_n\}_n))$,

$\triangle(\{\mathfrak{M}_n\}_n, \{\mathfrak{N}_n\}_n) \rightleftharpoons (\{\mathfrak{M}_n\}_n \setminus \{\mathfrak{N}_n\}_n) \cup$
$\cup (\{\mathfrak{N}_n\}_n \setminus \{\mathfrak{M}_n\}_n)$,

5) $\chi[\{\mathfrak{M}_n\}_n] \rightleftharpoons \{\chi_{o}\llcorner \mathfrak{M}_n \lrcorner\}_n$ и

6) $\{\mathfrak{M}_n\}_n \in M \rightleftharpoons \forall n (|\triangle(\mathfrak{M}_n, \mathfrak{M}_{n+1})| < \frac{1}{2^n})$.

Видим, что для последовательности комплексов $\{\mathfrak{M}_n\}_n$ имеет место $\{\mathfrak{M}_n\}_n \in M$ тогда и только тогда, когда $\chi[\{\mathfrak{M}_n\}_n] \in L_1$. Ввиду этого можно построить нормальные алгорифмы μ и ρ_M так, что для всяких последователь-ностей комплексов $\{\mathfrak{M}_n\}_n$, $\{{}^1\mathfrak{N}_n\}_n$ и $\{{}^2\mathfrak{N}_n\}_n$, для которых выполнено $\{\mathfrak{M}_n\}_n \in M \mathbin{\&} \triangle(\{{}^1\mathfrak{N}_n\}_n, \{{}^2\mathfrak{N}_n\}_n) \in M$, имеет место

$$\mu(\{\mathfrak{M}_n\}_n) \simeq \| \chi[\{\mathfrak{M}_n\}_n] \|_{L_1} \quad \text{и}$$

$$\rho_M(\{{}^1\mathfrak{N}_n\}_n, \{{}^2\mathfrak{N}_n\}_n) \simeq \mu(\triangle(\{{}^1\mathfrak{N}_n\}_n, \{{}^2\mathfrak{N}_n\}_n)) .$$

Заметим, что КДЧ $\mu(\{\mathfrak{M}_n\}_n)$ является пределом последовательности $\{|\mathfrak{M}_n|\}_n$.

Пусть $\{\mathfrak{M}_n\}_n \in M$. Тогда $\chi[\{\mathfrak{M}_n\}_n] \in L_1$, и как знаем по теоремам 1 и 2 из [5], для почти всех КДЧ x из $0 \triangle 1$ определена и сходится последовательность КДЧ $\{\vartheta_{\llcorner}\chi_{o\llcorner}\mathfrak{M}_{n\lrcorner}x_{\lrcorner}\}_n$. Ввиду того, что для всякого комплекса $\mathfrak{N}$ выполнено $\forall x((!\vartheta_{\llcorner}\chi_{o\llcorner}\mathfrak{N}_{\lrcorner}x_{\lrcorner} \supset (\vartheta_{\llcorner}\chi_{o\llcorner}\mathfrak{N}_{\lrcorner}x_{\lrcorner} = 0 \vee \vartheta_{\llcorner}\chi_{o\llcorner}\mathfrak{N}_{\lrcorner}x_{\lrcorner} = 1)) \& (\vartheta_{\llcorner}\chi_{o\llcorner}\mathfrak{N}_{\lrcorner}x_{\lrcorner} \simeq 1 \equiv x \in \mathfrak{N}) \& \& (\vartheta_{\llcorner}\chi_{o\llcorner}\mathfrak{N}_{\lrcorner}x_{\lrcorner} \simeq 0 \equiv x \in \setminus \mathfrak{N}))$,
из сходимости последовательности КДЧ $\{\vartheta_{\llcorner}\chi_{o\llcorner}\mathfrak{M}_{n\lrcorner}x_{\lrcorner}\}_n$ следует, что ее предел (обозначим его z) равен или нулю или единице и имеет место $\exists k \forall n (k \leq n \supset \vartheta_{\llcorner}\chi_{o\llcorner}\mathfrak{M}_{n\lrcorner}x_{\lrcorner} \simeq z)$, т.е. $\exists k \forall n (k \leq n \supset (z = 1 \supset x \in \mathfrak{M}_n) \& (z = 0 \supset x \in \setminus \mathfrak{M}_n))$, и, следовательно, $(z = 1 \supset x \in \{\mathfrak{M}_n\}_n) \& (z = 0 \supset x \in \setminus\{\mathfrak{M}_n\}_n)$. Таким образом мы доказали

<u>Лемма 1</u>. Пусть $\{\mathfrak{M}_n\}_n \in M$. Тогда $\chi[\{\mathfrak{M}_n\}_n] \in L_1$ и для почти всех КДЧ x из сегмента $0 \triangle 1$ выполнено $(x \in \{\mathfrak{M}_n\}_n \vee x \in \setminus\{\mathfrak{M}_n\}_n) \& (\neg(x \in \{\mathfrak{M}_n\}_n) \equiv x \in \setminus\{\mathfrak{M}_n\}_n)$.

Отсюда, из выше перечисленных свойств операций для комплексов, и алгорифма χ_o и на основании леммы 1 и следствия теоремы 6 из [5] получаем

<u>Лемма 2</u>. Пусть $\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n \in M$, $\{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n \in M$ и $\{{}^3\mathfrak{M}_n\}_n \in M$, пусть $\mathfrak{N}$ комплекс, m НЧ а $\{n_k\}_k$ возрастающая последовательность НЧ, для которой выполнено $\forall k (k < n_k)$. Тогда

1) $\{\mathfrak{X}\}_n \in M$, $\quad \setminus\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n \in M$,

$(\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n \cap \{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n) \in M$, $\quad (\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n \setminus \{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n) \in M$,

$(\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n \cup \{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n) \in M$, $\quad \Delta(\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n, \{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n) \in M$,

$\{{}^1\mathfrak{M}_{n_k}\}_k \in M$ и $\chi[\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n] \in L_1$,

2) $0 \le \chi[\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n] \le \{0\gamma 1\sigma 1\}_n$,

$\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n \subseteq \{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n \equiv \chi[\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n] \le \chi[\{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n]$,

$\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n = \{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n \equiv \chi[\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n] = \chi[\{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n]$,

$\chi[\setminus\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n] = \{0\gamma 1\sigma 1\}_n - \chi[\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n]$,

$\chi[\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n \cap \{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n] = \chi[\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n]\cdot\chi[\{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n] =$

$= min(\chi[\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n], \chi[\{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n])$,

$\chi[\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n \setminus \{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n] = \chi[\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n] - \chi[\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n \cap$

$\cap\{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n]$,

$\chi[\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n \cup \{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n] = \chi[\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n] + \chi[\{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n] -$

$- \chi[\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n \cap \{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n] =$

$= max(\chi[\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n], \chi[\{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n])$,

$\chi[\Delta(\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n, \{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n)] =$

$= |\chi[\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n] - \chi[\{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n]| =$

$= \chi[\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n] + \chi[\{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n] -$

$- 2\cdot\chi[\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n \cap \{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n]$,

3) $\mu(\{\mathfrak{X}\}) = |\mathfrak{X}|$, $\quad 0 \le \mu(\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n) \le 1$,

$\mu(\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n) = 0 \equiv \chi[\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n] = 0 \equiv \{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n = \{\Lambda\}_n$,

$\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n \subseteq \{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n \supset \mu(\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n) \le \mu(\{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n)$,

$\mu(\setminus\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n) = 1 - \mu(\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n)$,

$\mu(\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n \cap \{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n) \le min(\mu(\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n),$

$\mu(\{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n))$,

$$\mu(\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n \setminus \{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n) = \mu(\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n) - \mu(\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n \cap \{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n),$$

$$\max(\ (\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n)\ \ (\{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n)) \leq \ (\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n \cup \{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n) =$$

$$= \mu(\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n) + \mu(\{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n) - \mu(\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n \cap \{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n) \leq$$

$$\leq \mu(\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n) + \mu(\{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n),$$

$$0 \leq \rho_M(\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n, \{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n) = \mu(\Delta(\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n, \{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n)) =$$

$$= \mu(\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n) + \mu(\{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n) - 2\cdot\mu(\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n \cap \{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n),$$

$$|\mu(\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n) - \mu(\{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n)| \leq$$

$$\leq \rho_M(\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n, \{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n) =$$

$$= \rho_M(\{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n, \{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n),$$

4) $\rho_M(\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n, \{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n) = 0 \equiv \{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n = \{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n$,

$$\rho_M(\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n, \{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n) \leq \rho_M(\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n, \{{}^3\mathfrak{M}_n\}_n) + \rho_M(\{{}^3\mathfrak{M}_n\}_n, \{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n)$$

и $\rho_M(\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n, \{{}^1\mathfrak{M}_m\}_n) < \dfrac{1}{2^{m-1}}$,

5) операции в M – $\cap$, $\cup$ и Δ удовлетворяют законам коммутативности и ассоциативности, для $\cap$ и $\cup$ выполнены законы дистрибутивности и

6) для почти всех КДЧ x из сегмента $0 \Delta 1$ выполнено

$$x \in \setminus\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n \equiv \neg(x \in \{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n), \quad x \in (\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n \cap \{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n) \equiv$$

$$\equiv x \in \{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n \ \&\ x \in \{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n.$$

$$x \in (\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n \setminus \{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n) \equiv x \in \{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n \ \&\ x \in \setminus\{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n$$ и

$$x \in (\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n \cup \{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n) \equiv (x \in \{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n \vee x \in \{{}^2\mathfrak{M}_n\}_n).$$

<u>Следствие 1</u>. Пусть $\{\mathfrak{M}_n\}_n \in M$. Тогда $\mu(\{\mathfrak{M}_n\}_n) = 0$ в том и только том случае, если для почти всех КД

x из $0 \vartriangle 1$ выполнено $x \in \setminus \{\mathfrak{M}_n\}_n$.

<u>Доказательство</u>: Как знаем, $\mu(\{\mathfrak{M}_n\}_n) = 0 \equiv$ $\equiv \chi[\{\mathfrak{M}_n\}_n] = 0 \equiv \chi[\setminus\{\mathfrak{M}_n\}_n] = \{0 \gamma 1 \sigma 1\}_n =$ $= \chi[\{0 \gamma 1\}_n] \equiv \setminus\{\mathfrak{M}_n\}_n = \{0 \gamma 1\}_n$.

При помощи простых оценок получаем на основании части 4 леммы 2

<u>Следствие 2</u>. Пусть $\{\{{}^k\mathfrak{M}_n\}_n\}_k$ последовательность элементов из M и $\{p_m\}_m$ возрастающая последовательность НЧ такие, что

$$\forall m\, k\, (p_m \leq k \supset \rho_M(\{{}^{p_m}\mathfrak{M}_n\}_n, \{{}^k\mathfrak{M}_n\}_n) < \frac{1}{2^m}).$$

Тогда $\{{}^{p_{n+2}}\mathfrak{M}_{n+2}\}_n \in M$ и выполнено $\forall m\, k\, (p_{m+4} \leq k \supset$ $\supset \rho_M(\{{}^k\mathfrak{M}_n\}_n, \{{}^{p_{n+2}}\mathfrak{M}_{n+2}\}_n) < \frac{1}{2^m})$.

Следствие 2 и часть 4 леммы 2 дают

<u>Теорема 1</u>. (M, ρ_M) является полным сепарабельным метрическим пространством.

Прежде чем подробнее заняться полнотой пространства M нам нужно доказать конструктивный аналог теоремы Б. Леви.

<u>Теорема 2</u>. Пусть $\{\{{}^kF_n\}_n\}_k$ последовательность элементов из L_1 такая, что ряд $\sum_k \|\{{}^kF_n\}_n\|_{L_1}$ сходится. Тогда последовательность $\{\sum_{k=1}^{l}\{{}^kF_n\}_n\}_l$ является фундаментальной в L_1 и, следовательно, сходится. Если $\{F_n\}_n$ предел этой последовательности в L_1, то для почти всех КДЧ x из $0 \vartriangle 1$ существует последовательность КДЧ $\{x_k\}_k$ такая, что

1) для всякого НЧ k последовательность КДЧ $\{\vartheta_L\,{}^kF_n\, x\}_n$ определена и сходится к x_k ,

2) ряд $\sum_k |z_k|$ сходится и

3) сумма ряда $\sum_k z_k$ является пределом последовательности КДЧ $\{\vartheta_L F_m x_\lrcorner\}_n$.

<u>Доказательство</u>. а) Пусть $\{G_m\}_m$ последовательность ступенчатых остовов и пусть сходится ряд $\sum_m \int_0^{0,1} |G_m|_0$. Тогда для почти всех КДЧ x из $0\Delta 1$ определен и сходится ряд $\sum_m |\vartheta_L G_m x_\lrcorner|$. –

Действительно, из наших предположений следует существование возрастающей последовательности НЧ $\{m_n\}_n$ такой, что $\forall n \left(\sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} \int_0^{0,1} |G_m|_0 < \frac{1}{2^n}\right)$.

Но тогда $\{\sum_{m=1}^{m_n}{}_0 |G_m|_0\}_n \in L_1$ и для завершения доказательства достаточно применить теоремы 1 и 2 из [5]. Получаем, что для почти всех КДЧ x из $0\Delta 1$ определена и сходится последовательность $\{\vartheta_L (\sum_{m=1}^{m_n}{}_0 |G_m|_0) x_\lrcorner\}_n$, т.е. определен и сходится ряд $\sum_m |\vartheta_L G_m x_\lrcorner|$.

б) Пусть $\{H_n\}_n \in L_1 \& \|\{H_n\}_n\|_{L_1} < \frac{1}{2^{2k+6}}$. Тогда можно построить S-множество $\mathcal{G}$ меры меньшей чем $\frac{1}{2^k}$ и такое, что для всякого КДЧ x, $x \in 0\Delta 1 \& \neg(x \in \mathcal{G})$, последовательность $\{\vartheta_L H_n x_\lrcorner\}_n$ определена и сходится к пределу, модуль которого меньше чем $\frac{1}{2^k}$. –

Имеем $\int_0^1 |\{H_n\}_n - H_{(2^{k+2}+2)}| < \frac{1}{2^{2^{k+2}+1}} < \frac{1}{2^{2k+6}}$ (см. часть 2б леммы 1 из [5]) и, следовательно,

$$\int_0^{0,1} |H_{(2^{k+2}+2)}|_0 < \frac{1}{2^{2k+5}} \quad (2)$$

На основании 4б из [4],[5] и замечания 1 знаем, что существуют S-множество ${}^1\mathcal{Y}$ меры меньшей чем $\frac{1}{2^{k+2}}$ и равномерно непрерывная на $0 \Delta 1$ конструктивная функция g такие, что

α) для всякого КДЧ x, для которого выполнено $x \in 0\Delta 1 \& \neg (x \in {}^1\mathcal{Y})$, последовательность $\{\vartheta_\llcorner H_n x_\lrcorner\}_n$ определена и сходится к $g(x)$ и

β) если $H_{(2^{k+2}+2)} = b_0 \gamma b_1 \dots \gamma b_m \delta y_1 \gamma y_2 \dots \gamma y_m$ и $\{W_i\}_{i=1}^m$ система КДЧ такая, что $\forall i (1 \leq i \leq m \supset W_i \int_{b_{i-1}\Delta b_i} |g - y_i|)$, то $\sum_{i=1}^m W_i < \frac{1}{2^{2k+5}}$. (Здесь пользуемся обозначениями, введенным в [4].

Пусть w значение интеграла от $|g|$ на сегменте $0 \Delta 1$. Тогда ввиду β) и (2) имеем $w < \frac{1}{2^{2k+4}}$.

Существует НЧ t так, что

(3) $\forall x y (x \in 0\Delta 1 \& y \in 0\Delta 1 \& |x-y| \leq \frac{1}{t} \supset ||g(x)| - |g(y)|| < \frac{1}{2^{k+3}})$.

На основании теоремы 1.3 - [3], стр.399 - знаем, что НЧ 1, 2,..., t можно разделить на две группы I и II так, что

$\forall i (1 \leq i \leq t \supset (i \in \mathrm{I} \supset |g(\frac{i}{t})| < \frac{1}{2^{k+1}}) \& (i \in \mathrm{II} \supset |g(\frac{i}{t})| > \frac{1}{2^{k+2}}))$.

Пусть II содержит в точности j натуральных чисел. Ввиду (3) имеем $\forall i x (1 \leq i \leq t \& x \in \frac{i-1}{t} \Delta \frac{i}{t} \supset$
$\supset (i \in \mathrm{I} \supset |g(x)| < \frac{1}{2^k}) \& (i \in \mathrm{II} \supset |g(x)| > \frac{1}{2^{k+3}}))$

и, следовательно, для всякого НЧ i, $i \in \mathrm{II}$, интеграл от $|g|$ на $\frac{i-1}{t} \Delta \frac{i}{t}$ больше чем $\frac{1}{2^{k+3}} \cdot \frac{1}{t}$. Отсюда получаем $\frac{1}{2^{k+3}} \cdot \frac{j}{t} \leq w < \frac{1}{2^{2k+4}}$. Таким образом

$\frac{i}{t} < \frac{1}{2^{k+1}}$, т.е. сумма длин всех сегментов типа $\frac{i-1}{t} \Delta \frac{i}{t}$, где $i \in II$, меньше чем $\frac{1}{2^{k+1}}$. К завершению доказательства утверждения б) достаточно построить S -множество, являющееся объединением ${}^1\mathcal{Y}$ и системы сегментов $\{\frac{i-1}{t} \Delta \frac{i}{t}\}_{i \in II}$ (последняя система может оказаться пустой).

в) Пусть даны последовательность $\{\{{}^kF_n\}_n\}_k$, удовлетворяющая условиям теоремы, и НЧ p . Пусть $\{F_n\}_n \in L_1$ является пределом фундаментальной в L_1 последовательности $\{\sum_{k=1}^{\ell} \{{}^kF_n\}_n\}_\ell$. Тогда существует возрастающая последовательность НЧ $\{k_\ell\}_\ell$ такая, что

$$(4) \quad \forall \ell \left(\left\| \sum_{k=1}^{k_\ell} \{{}^kF_n\}_n - \{F_n\}_n \right\|_{L_1} < \frac{1}{2^{2(p+2\ell+1)+7}} \right) .$$

По теоремам 1 и 2 из [5] и замечанию 1 существует S -множество ${}^1\mathcal{Y}$ меры меньшей чем $\frac{1}{2^{p+1}}$ так, что для всякого КДЧ x , $x \in 0 \Delta 1 \,\&\, \neg(x \in {}^1\mathcal{Y})$, определена и сходится последовательность КДЧ $\{\vartheta_L F_n\, x_\lrcorner\}_n$.

На основании части 2б) леммы 1 из [5], имеем

$$(5) \quad \forall \ell \left(\left\| \{{}^\ell F_n\}_n - {}^\ell F_{2(p+2\ell+2)+7} \right\|_{L_1} < \frac{1}{2^{2(p+2\ell+2)+6}} \right)$$

и, следовательно, ряд $\sum_\ell \int_0^{0,1} |{}^\ell F_{2(p+2\ell+2)+7}|_0$ сходится. Применим а). Существует S -множество ${}^2\mathcal{Y}$ меры меньшей чем $\frac{1}{2^{p+2}}$ и такое, что для всякого КДЧ x , $x \in 0 \Delta 1 \,\&$ $\&\, \neg(x \in {}^2\mathcal{Y})$, определен и сходится ряд КДЧ

$\sum_{\ell} | \vartheta_L {}^{\ell}F_{2(n+2\ell+2)+\gamma} x_\lrcorner |$.

Ввиду (5) существует по б) последовательность S-множеств $\{{}^{2\ell+2}\mathcal{G}\}_\ell$ такая, что для любого НЧ ℓ мера множества ${}^{2\ell+2}\mathcal{G}$ меньше чем $\frac{1}{2^{n+2\ell+2}}$ и для всякого КДЧ x, $x \in 0 \Delta 1 \,\&\, \neg (x \in {}^{2\ell+2}\mathcal{G})$, определена и сходится последовательность КДЧ $\{\vartheta_L {}^{\ell}F_n x_\lrcorner\}_n$ – ее предел обозначим посредством x_ℓ – и выполнено

$$(6) \qquad |x_\ell - \vartheta_L {}^{\ell}F_{2(n+2\ell+2)+\gamma} x_\lrcorner| < \frac{1}{2^{n+2\ell+2}} .$$

Ввиду б) и (4) существует далее последовательность S-множеств $\{{}^{2\ell+1}\mathcal{G}\}_\ell$ такая, что для любого НЧ ℓ мера ${}^{2\ell+1}\mathcal{G}$ меньше чем $\frac{1}{2^{n+2\ell+1}}$ и для всякого КДЧ x, $x \in 0 \Delta 1 \,\&\, \neg(x \in {}^{2\ell+1}\mathcal{G})$, последовательность $\{\vartheta_L (\sum_{k=1}^{k_\ell} \{{}^{k}F_m\}_m - \{F_m\}_m) x_\lrcorner\}_\ell$ определена и сходится к пределу, который по модулю меньше чем $\frac{1}{2^{n+2\ell+1}}$.

Как знаем по замечанию 1 существует S-множество $\mathcal{G}$ меры меньшей чем $\frac{1}{2^n}$, являющееся объединением последовательности S-множеств $\{{}^{\ell}\mathcal{G}\}_\ell$. Для всякого КДЧ x, для которого выполнено $x \in 0 \Delta 1 \,\&\, \neg (x \in \mathcal{G})$, существует последовательность КДЧ $\{x_\ell\}_\ell$ такая, что имеет место часть 1) утверждения теоремы, сходится последовательность КДЧ $\{\vartheta_L F_m x_\lrcorner\}_m$ (ее предел обозначим посредством x), сходится ряд $\sum_{\ell} |\vartheta_L {}^{\ell}F_{2(n+2\ell+2)+\gamma} x_\lrcorner|$, для всякого НЧ ℓ выполнено (6) (и, следовательно, имеем

2)) и $\forall l (|\sum_{k=1}^{k_l} x_k - x| < \frac{1}{2^{r+2l+1}})$. Таким образом выполнено тоже 3).

<u>Теорема 3</u>. Пусть $\{\{{}^k\mathcal{H}_m\}_m\}_k$ последовательность элементов из M такая, что ряд $\sum_k \rho_M(\{{}^k\mathcal{H}_m\}_m, \{{}^{k+1}\mathcal{H}_m\}_m)$ сходится. Тогда эта последовательность является фундаментальной в M и, следовательно, сходится. Пусть $\{\mathcal{H}_m\}_m \in M$ является ее пределом. Тогда для почти всех КДЧ x из $0 \triangle 1$ выполнено

$$x \in \{\mathcal{H}_m\}_m \equiv \exists m \forall k (m \le k \supset x \in \{{}^k\mathcal{H}_m\}_m) .$$

<u>Доказательство</u>. Пусть $\{\{{}^k\mathcal{H}_m\}_m\}_k$ последовательность, удовлетворяющая условиям теоремы. Тогда она очевидно фундаментальна и ввиду полноты M сходится в M. Пусть $\{\mathcal{H}_m\}_m \in M$ ее предел.

Для всякого НЧ m положим ${}^0\mathcal{H}_m \rightleftharpoons \Lambda$. На основании наших предположений и отмеченных в лемме 2 свойств χ знаем, что $\chi[\{\mathcal{H}_m\}_m] \in L_1 \;\&\; \forall k (\chi[\{{}^k\mathcal{H}_m\}_m] \in L_1)$, ряд КДЧ

$$\sum_k \int_0^1 |\chi[\{{}^k\mathcal{H}_m\}_m] - \chi[\{{}^{k-1}\mathcal{H}_m\}_m]| \tag{7}$$

сходится и ряд $\sum_k (\chi[\{{}^k\mathcal{H}_m\}_m] - \chi[\{{}^{k-1}\mathcal{H}_m\}_m])$ сходится в L_1 к $\chi[\{\mathcal{H}_m\}_m]$.

Кроме того (см. леммы 1 и 2 и замечание 1) для почти всех КДЧ x из $0 \triangle 1$ для всякого НЧ k определена и сходится последовательность КДЧ $\{\vartheta_L \chi_{0L} {}^k\mathcal{H}_{m\lrcorner} x_\lrcorner\}_m$ (соотв. $\{\vartheta_L \chi_{0L} \mathcal{H}_{m\lrcorner} x_\lrcorner\}_m$), причем $x \in \{{}^k\mathcal{H}_m\}_m$ (соотв. $x \in \{\mathcal{H}_m\}_m$) тогда и только тогда, когда эта последовательность сходится к единице. Ввиду этого и сходимости ряда (7) для завершения доказательства достаточно к последовательности

$\{\chi[\{{}^{k}\mathcal{H}_n\}_n]-\chi[\{{}^{k-1}\mathcal{H}_n\}_n]\}_n$ и к $\chi[\{\mathcal{H}_n\}_n]$ применить теорему 2.

Следствие. Пусть $\{\{{}^{k}\mathcal{H}_n\}_n\}_k$ последовательность элементов из M такая, что последовательность КДЧ $\{\mu(\{{}^{k}\mathcal{H}_n\}_n)\}_k$ сходится и выполнено $\forall k(\{{}^{k+1}\mathcal{H}_n\}_n\subseteq$ $\subseteq\{{}^{k}\mathcal{H}_n\}_n)$ (соотв. $\forall k(\{{}^{k}\mathcal{H}_n\}_n\subseteq\{{}^{k+1}\mathcal{H}_n\}_n)$). Тогда последовательность $\{\{{}^{k}\mathcal{H}_n\}_n\}_k$ является фундаментальной в M и, следовательно, существует элемент $\{\mathcal{H}_n\}_n\in M$, являющийся пределом этой последовательности. Для почти всех КДЧ x из $0\vartriangle 1$ выполнено $x\in\{\mathcal{H}_n\}_n\equiv$ $\equiv\forall k(x\in\{{}^{k}\mathcal{H}_n\}_n)$ (соотв. $x\in\{\mathcal{H}_n\}_n\equiv\exists k(x\in\{{}^{k}\mathcal{H}_n\}_n)$).

Доказательство. Из свойств последовательности $\{\{{}^{k}\mathcal{H}_n\}_n\}_k$ следует, что выполнено $\forall k(\rho_M(\{{}^{k}\mathcal{H}_n\}_n,\{{}^{k+1}\mathcal{H}_n\}_n)=|\mu(\{{}^{k}\mathcal{H}_n\}_n)-\mu(\{{}^{k+1}\mathcal{H}_n\}_n)|)$ и сходится ряд $\sum_k\rho_M(\{{}^{k}\mathcal{H}_n\}_n,\ \{{}^{k+1}\mathcal{H}_n\}_n)$. Применив к $\{\{{}^{k}\mathcal{H}_n\}_n\}_k$ и к $\{\mathcal{H}_n\}_n$ теорему 3 получаем ввиду $\forall k(\{{}^{k+1}\mathcal{H}_n\}_n\subseteq\{{}^{k}\mathcal{H}_n\}_n)$ (соотв. $\forall k(\{{}^{k}\mathcal{H}_n\}_n\subseteq\{{}^{k+1}\mathcal{H}_n\}_n)$) сразу требуемое.

Пространство M является полным и в том смысле, что всякому элементу $\{F_n\}_n$ из L_1, который является конструктивным аналогом характеристической функции множества, отвечает элемент $\{\mathcal{M}_n\}_n$ из M такой, что $\chi[\{\mathcal{M}_n\}_n]=$ $=\{F_n\}_n$.

Теорема 4. Пусть $\{F_n\}_n\in L_1$ и пусть для почти всех КДЧ x из сегмента $0\vartriangle 1$ последовательность КДЧ $\{\vartheta_{\llcorner}F_n x_{\lrcorner}\}_n$ сходится или к нулю или к единице. Тогда можно построить $\{\mathcal{M}_n\}_n\in M$ так, что выполнено

$\chi[\{\mathfrak{M}_n\}_n] = \{F_n\}_n$ и, следовательно, для почти всех КДЧ x из $0 \triangle 1$ имеет место $x \in \{\mathfrak{M}_n\}_n$ тогда и только тогда, когда последовательность КДЧ $\{\vartheta_\llcorner F_n\ x_\lrcorner\}_n$ сходится к единице.

<u>Доказательство</u>. Пусть k НЧ. Имеем $\int_0^1 |\{F_n\}_n - F_{2k+3}| < \frac{1}{2^{2k+2}}$ (см. часть 2б леммы 1 из [5]). Пусть $F_{2k+3} \equiv b_0 \gamma b_1 \ldots \gamma b_m \delta y_1 \gamma y_2 \ldots \gamma y_m$. Существует нормальный алгорифм $\mathfrak{A}$ такой, что $\forall x\ (!\mathfrak{A}_\llcorner x_\lrcorner \ \&\ (\mathfrak{A}_\llcorner x_\lrcorner \equiv \Lambda \supset x < 1 - \frac{1}{2^{k+1}})\ \&\ (\mathfrak{A}_\llcorner x_\lrcorner \not\equiv \Lambda \supset 1 - \frac{1}{2^k} < x))$ (теорема 1.3 из [3], стр.399). Построим ступенчатый остов ${}^1F_k$ так, что ${}^1F_k \equiv b_0 \gamma b_1 \ldots \gamma b_m \delta z_1 \gamma z_2 \ldots \gamma z_m$, где $\forall i\ (1 \le i \le m \supset (\mathfrak{A}_\llcorner y_{i\lrcorner} \equiv \Lambda \supset z_i \equiv 0)\ \&\ (\mathfrak{A}_\llcorner y_{i\lrcorner} \not\equiv \Lambda \supset z_i \equiv 1))$.

Как можно убедиться разбором случаев, на основании свойств последовательности $\{F_n\}_n$ получаем $|\{F_n\}_n - {}^1F_k| \le 2^{k+1} \cdot |\{F_n\}_n - F_{2k+3}|$. Но тогда $\int_0^1 |\{F_n\}_n - {}^1F_k| \le 2^{k+1} \cdot \int_0^1 |\{F_n\}_n - F_{2k+3}| < \frac{1}{2^{k+1}}$.

Видим, что выполнено $\forall k\ (\int_0^1 |{}^1F_k \mathbin{\bar{-}} {}^1F_{k+1}|_0 < \frac{1}{2^k})$, т.е. $\{{}^1F_k\}_k \in L_1$, и для всякого КДЧ x из сегмента $0 \triangle 1$ последовательности $\{\vartheta_\llcorner F_n\ x_\lrcorner\}_n$ и $\{\vartheta_\llcorner {}^1F_k\ x_\lrcorner\}_k$ определены одновременно и в случае, что предел последовательности $\{\vartheta_\llcorner F_n\ x_\lrcorner\}_n$ равен нулю или единице, они сходятся к общему пределу. Таким образом $\{{}^1F_k\}_k = \{F_n\}_n$ и для завершения доказательства достаточно для всякого НЧ n определить $\mathfrak{M}_n \rightleftharpoons \Pi_\llcorner {}^1F_{n\lrcorner}$ (см. $\chi_{0\llcorner}\Pi_\llcorner {}^1F_{n\lrcorner\lrcorner} \mathbin{\bar{=}} {}^1F_n$).

Сейчас займемся вопросом, как связаны между собой понятия S-множества и элемента из M, меры S-множества и результата применения алгорифма μ к элементу из M .

Легко усмотреть, что верна следующая лемма.

<u>Лемма 3</u>. Пусть $\{H_n\}_n$ является [1] S_δ -множеством, содержащимся в $0 \Delta 1$ (соотв. S -множеством). Тогда существует $\{\mathfrak{M}_n\}_n \in M$ так, что

$$(8) \begin{cases} \forall x (\neg \exists n (x = \partial_n (H_n) \vee x = \partial_n (H_n)) \supset \\ \qquad \supset (x \in \{\mathfrak{M}_n\}_n \equiv x \in \{H_n\}_n)) \\ \text{и КДЧ } \mu(\{\mathfrak{M}_n\}_n) \text{ является мерой } \{H_n\}_n . \end{cases}$$

<u>Замечание 2</u>. Не существует нормальный алгорифм, применимый к всякой последовательности сегментов, являющейся S -множеством, и выдающий по ней меру этого S -множества. Ввиду этого не существует нормальный алгорифм, применимый к всякому S -множеству $\{H_n\}_n$ и выдающий по нему $\{\mathfrak{M}_n\}_n$ так, что выполнено (8).

<u>Лемма 4</u>. Пусть $\{\mathfrak{M}_n\}_n \in M$ такое, что $\exists n (\mathfrak{M}_n \not\equiv \Lambda)$ и

$$(9) \qquad \forall n (\mathfrak{M}_n \subseteq \mathfrak{M}_{n+1}) .$$

Тогда можно построить S -множество $\mathcal{G}$ и нормальный алгорифм $\mathcal{L}$ так, что $\forall x (x \in \{\mathfrak{M}_n\}_n \equiv x \in \mathcal{G} \equiv !\mathcal{L}\llcorner x \lrcorner)$, КДЧ $\mu(\{\mathfrak{M}_n\}_n)$ является мерой $\mathcal{G}$ и если для КДЧ x алгорифм $\mathcal{L}$ применим к x, то $\mathcal{L}\llcorner x \lrcorner$ НЧ и выполнено $\forall y (|x-y| < \frac{1}{\mathcal{L}\llcorner x \lrcorner} \supset y \in \{\mathfrak{M}_n\}_n)$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\forall n (\mathfrak{M}_n \rightleftharpoons {}^n b_1 \gamma {}^n b_2 \dots \gamma {}^n b_{2j_n})$ и пусть n_0 наименьшее НЧ n такое, что $\mathfrak{M}_n \not\equiv \Lambda$. Пусть $\{p_n\}_n$ последовательность НЧ такая, что для всякого НЧ n, $n_0 \leq n$, p_n делит p_{n+1} и выполнено

$\forall j\,(1 \le j \le 2j_n \supset \exists i\,({}^n b_j = \frac{i}{p_n}$)) (заметим, что тогда $2j_n \le$ $\le p_n$).

Построим последовательность непустых систем НЧ $\{\{{}^n i_m\}_{m=1}^{s_n}\}_n$ так, что а) $\{{}^{n_0} i_m\}_{m=1}^{s_{n_0}}$ возрастающая система всех таких НЧ i, для которых выполнено

$$\exists j\,(1 \le j \le j_{n_0} \;\&\; {}^{n_0} b_{2j-1} < \frac{i-1}{p_{n_0}^2 \cdot 2^{n_0}} < \frac{i}{p_{n_0}^2 \cdot 2^{n_0}} < {}^{n_0} b_{2j}),$$

б) если n НЧ, $n_0 \le n$, и если уже построена система НЧ $\{{}^n i_m\}_{m=1}^{s_n}$, то $\{{}^{n+1} i_m\}_{m=1}^{s_{n+1}}$ возрастающая система всех таких НЧ i, для которых выполнено

$$\exists j\,(1 \le j \le j_{n+1} \;\&\; {}^{n+1} b_{2j-1} < \frac{i-1}{p_{n+1}^2 \cdot 2^{n+1}} < \frac{i}{p_{n+1}^2 \cdot 2^{n+1}} < {}^{n+1} b_{2j}) \;\&$$

$$\& \;\forall j\,(1 \le j \le S_n \supset (\frac{i}{p_{n+1}^2 \cdot 2^{n+1}} \le \frac{{}^n i_j - 1}{p_n^2 \cdot 2^n} \vee \frac{{}^n i_j}{p_n^2 \cdot 2^n} \le \frac{i-1}{p_{n+1}^2 \cdot 2^{n+1}})).$$

Тогда ввиду (9) имеем для всякого НЧ n, $n_0 \le n$,

$$\mu(\{\mathfrak{M}_k\}_k) \ge |\mathfrak{M}_n| > \sum_{l=n_0}^{n} \sum_{m=1}^{S_l} \left| \frac{{}^l i_m - 1}{p_l^2 \cdot 2^l} \,\Delta\, \frac{{}^l i_m}{p_l^2 \cdot 2^l} \right| = |\mathfrak{M}_n| - \frac{2j_n}{p_n^2 \cdot 2^n} \ge$$

$$\ge |\mathfrak{M}_n| - \frac{1}{2^n} > \mu(\{\mathfrak{M}_k\}_k) - \frac{1}{2^{n-2}} .$$

Построим последовательность сегментов $\{H_k\}_k$ так, что

$$\forall k\,m\,n\,(n_0 \le n \;\&\; 1 \le m \le S_n \;\&\; k = \sum_{l=n_0}^{n-1} S_l + m \supset$$

$$\supset H_k \equiv \frac{{}^n i_m - 1}{p_n^2 \cdot 2^n} \,\Delta\, \frac{{}^n i_m}{p_n^2 \cdot 2^n}) .$$

Тогда $\{H_k\}_k$ последовательность неперекрывающихся рациональных сегментов, содержащихся в $0 \Delta 1$, и выполнено

$$\forall j\,m\,n\,(n_0 \le n \;\&\; j = \sum_{l=n_0}^{n} S_l \supset \mu(\{\mathfrak{M}_k\}_k) - \frac{1}{2^{n-2}} <$$

$$< \sum_{k=1}^{j} |H_k| < \mu(\{\mathfrak{M}_k\}_k) \;\&\; \sum_{k=j+1}^{j+m} |H_k| < \frac{1}{2^{n-2}}) .$$

Следовательно, $\{H_k\}_k$ является S-множеством и КДЧ

$\mu(\{\mathfrak{M}_k\}_k)$ мерой $\{H_k\}_k$. Ввиду (9) и того, что $\forall n\, x\,(x \in \mathfrak{M}_n \equiv \exists j\,(1 \leq j \leq j_n \,\&\, {}^n b_{2j-1} < x < {}^n b_{2j}))$, имеем

$$\forall x\,(x \in \{H_k\}_k \equiv \neg\neg\exists n\,(x \in H_n) \equiv x \in \{\mathfrak{M}_k\}_k \equiv$$

$$\equiv \exists n\,\forall k\,(n \leq k \supset x \in \mathfrak{M}_k) \equiv \exists n\,(x \in \mathfrak{M}_n) \equiv$$

$$\equiv \exists n j\,(1 \leq j \leq j_n \,\&\, {}^n b_{2j-1} < x < {}^n b_{2j}))\,.$$

Ввиду этого, свойств конструктивных последовательностей и $\{18\}$ из [3], стр.315, существует нормальный алгорифм $\mathfrak{L}$ с требуемыми свойствами.

<u>Лемма 5</u>. Пусть $\{\mathfrak{M}_n\}_n \in M$. Тогда можно построить последовательность элементов из M – $\{\{{}^k\mathfrak{N}_n\}_n\}_k$ так, что эта последовательность сходится в M к $\{\mathfrak{M}_n\}_n$, имеет место

$$\forall k\,(\forall n\,({}^k\mathfrak{N}_n \subseteq {}^k\mathfrak{N}_{n+1}) \,\&\, \forall x\,((x \in \{\mathfrak{M}_n\}_n \supset x \in \{{}^k\mathfrak{N}_n\}_n) \,\&$$

$$\& \,(x \in \{{}^{k+1}\mathfrak{N}_n\}_n \supset x \in \{{}^k\mathfrak{N}_n\}_n)) \,\&\, \mu(\{\mathfrak{M}_n\}_n) \leq$$

$$\leq \mu(\{{}^k\mathfrak{N}_n\}_n) < \mu(\{\mathfrak{M}_n\}_n + \frac{1}{2^k})$$

и для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ выполнено $x \in \{\mathfrak{M}_n\}_n \equiv$ $\equiv \forall k\,(x \in \{{}^k\mathfrak{N}_n\}_n)$.

<u>Доказательство</u>. Для всяких НЧ k и n положим

$${}^k\mathfrak{N}_n \rightleftharpoons \mathfrak{M}_{k+3} \cup (\mathfrak{M}_{k+4} \cup (\ldots (\mathfrak{M}_{k+n+1} \cup \mathfrak{M}_{k+n+2})\ldots)\,.$$

Тогда для любого НЧ k имеет место $\forall n\,({}^k\mathfrak{N}_n \subseteq {}^k\mathfrak{N}_{n+1} \,\&$ $\&\, \mathfrak{M}_{k+n+3} \subseteq {}^{k+1}\mathfrak{N}_n \subseteq {}^k\mathfrak{N}_{n+1} \,\&\, |\Delta({}^k\mathfrak{N}_n, {}^k\mathfrak{N}_{n+1})| \leq |\Delta(\mathfrak{M}_{k+n+2},$ $\mathfrak{M}_{k+n+3})| < \frac{1}{2^{k+n+2}}$) и, следовательно,

$\{{}^k\mathfrak{N}_n\}_n \in M$ и выполнено $\forall x\,(x \in \{{}^{k+1}\mathfrak{N}_n\}_n \supset x \in$ $\in \{{}^k\mathfrak{N}_n\}_n)$, $\forall x\,(x \in \{\mathfrak{M}_n\}_n \supset x \in \{{}^k\mathfrak{N}_n\}_n)$,

$$\mu(\{\mathfrak{M}_n\}_n) \leq \mu(\{{}^k\mathfrak{N}_n\}_n) < |{}^k\mathfrak{N}_{k+3}| + \frac{1}{2^{k+2}} \leq$$

$$\leq (|\mathfrak{M}_{k+3}| + \sum_{j=k+3}^{2k+4} |\Delta(\mathfrak{M}_j, \mathfrak{M}_{j+1})|) + \frac{1}{2^{k+2}} <$$

$< (\mu(\{\mathfrak{M}_n\}_n + \frac{1}{2^{k+2}}) + \frac{1}{2^{k+2}} + \frac{1}{2^{k+2}} < \mu(\{\mathfrak{M}_n\}_n) + \frac{1}{2^k}$
и, следовательно, $\rho_M(\{{}^k\mathfrak{N}_n\}_n, \{\mathfrak{M}_n\}_n) < \frac{1}{2^k}$.
Остается применить следствие теоремы 3.

Замечание 3. Ясно, что для всякого $\{\mathfrak{M}_n\}_n \in M$ можно построить $\{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n \in M$ так, что
$\{\mathfrak{M}_n\}_n = \{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n \,\&\, \forall x(x \in \{\mathfrak{M}_n\}_n \supset x \in \{{}^1\mathfrak{M}_n\}_n) \,\&\, \forall n({}^1\mathfrak{M}_n \neq \Lambda)$.

На основании лемм 4 и 5 и замечания 3 сразу получаем

Теорема 5. Пусть $\{\mathfrak{M}_n\}_n \in M$. Тогда можно построить последовательности $\mathfrak{S}$-множеств $\{{}^k\mathcal{G}\}_k$, КДЧ $\{z_k\}_k$ и нормальных алгорифмов $\{\mathfrak{L}_k\}_k$ так, что 1) для всякого НЧ k имеет место

а) КДЧ z_k является мерой ${}^k\mathcal{G}$ и выполнено
$\mu(\{\mathfrak{M}_n\}_n) \le z_k < \mu(\{\mathfrak{M}_n\}_n) + \frac{1}{2^k}$,

б) $\forall x((x \in \{\mathfrak{M}_n\}_n \supset x \in {}^k\mathcal{G}) \,\&\, (x \in {}^{k+1}\mathcal{G} \supset x \in {}^k\mathcal{G}))$ и

в) для любого КДЧ x выполнено $!\mathfrak{L}_k \llcorner x \lrcorner \equiv x \in {}^k\mathcal{G}$ и если алгорифм $\mathfrak{L}_k$ применим к x, то $\mathfrak{L}_k \llcorner x \lrcorner$ НЧ и имеет место $\forall y\,(|x - y| < \frac{1}{\mathfrak{L}_k \llcorner x \lrcorner} \supset y \in {}^k\mathcal{G})$ и

2) для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ выполнено
$x \in \{\mathfrak{M}_n\}_n \equiv \forall k\,(x \in {}^k\mathcal{G})$.

Замечание 4. Для любых $\{F_n\}_n \in L_1$ и $\{\mathfrak{M}_n\}_n \in M$ имеем $\{\chi_0 \llcorner \mathfrak{M}_{l_n+n} \lrcorner \circ F_{l_n+n}\}_n \in L_1$ $\{\chi_0 \llcorner \mathfrak{M}_{l_n+n} \lrcorner \circ F_{l_n+n}\}_n =$

$= \chi[\{\mathfrak{M}_n\}_n] \cdot \{F_n\}_n$, где $\forall n\,(l_n = 4 + \max_{1 \le j \le n+3} \tau(\sigma(F_j)))$,
(см. часть 5а леммы 1 из [5]) и, следовательно, можно определить $\int_{\{\mathfrak{M}_n\}_n} \{F_n\}_n \rightleftharpoons \int_0^1 \{\chi_0 \llcorner \mathfrak{M}_{l_n+n} \lrcorner \circ F_{l_n+n}\}_n$.

На основании свойств пространств L_1 и M и интеграла ясно, что для всяких $\{^1F_n\}_n \in L_1$, $\{^2F_n\}_n \in L_1$, $\{^1\mathfrak{M}_n\}_n \in M$, $\{^2\mathfrak{M}_n\}_n \in M$ и КДЧ u имеет место

$$\{^1F_n\}_n = \{^2F_n\}_n \,\&\, \{^1\mathfrak{M}_n\}_n = \{^2\mathfrak{M}_n\}_n \supset \int_{\{^1\mathfrak{M}_n\}_n} \{^1F_n\}_n = \int_{\{^2\mathfrak{M}_n\}_n} \{^2F_n\}_n ,$$

$$\{^1\mathfrak{M}_n\}_n \cap \{^2\mathfrak{M}_n\}_n = \{\Lambda\}_n \supset \int_{(\{^1\mathfrak{M}_n\}_n \cup \{^2\mathfrak{M}_n\}_n)} \{^1F_n\}_n = \int_{\{^1\mathfrak{M}_n\}_n} \{^1F_n\}_n + \int_{\{^2\mathfrak{M}_n\}_n} \{^1F_n\}_n ,$$

$$\int_{\mathrm{V}\{^1\mathfrak{M}_n\}_n} \{^1F_n\}_n = \int_0^1 \{^1F_n\}_n - \int_{\{^1\mathfrak{M}_n\}_n} \{^1F_n\}_n , \quad \int_{\{^1\mathfrak{M}_n\}_n} (\{^1F_n\}_n + \{^2F_n\}_n) = \int_{\{^1\mathfrak{M}_n\}_n} \{^1F_n\}_n +$$

$$+ \int_{\{^1\mathfrak{M}_n\}_n} \{^2F_n\}_n \quad \text{и} \quad \int_{\{^1\mathfrak{M}_n\}_n} u \cdot \{^1F_n\}_n = u \cdot \int_{\{^1\mathfrak{M}_n\}_n} \{^1F_n\}_n .$$

Свойства пространства M позволяют нам определить в конструктивной математике понятие измеримости (по Лебегу) множеств КДЧ, содержащихся в сегменте $0 \Delta 1$. Под множеством понимаем, как привычно в конструктивных теориях, слово $\Lambda \lambda \mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ однопараметрическая формула пригодного логико-математического языка, λ - параметр $\mathcal{F}$, являющийся родовой буквой для КДЧ, и выполнено $\forall x y (x = y \supset (x \in \Lambda \lambda \mathcal{F} \equiv y \in \Lambda \lambda \mathcal{F}))$, где для любого слова P, являющегося КДЧ, $[\mathcal{F}]^{\lambda}_{P}$ - результат подстановки слова P вместо всех свободных вхождений λ в $\mathcal{F}$ а $P \in \Lambda \lambda \mathcal{F} \rightleftharpoons [\mathcal{F}]^{\lambda}_{P}$ (см.[2],стр.310).

Скажем, что множество $\Lambda \lambda \mathcal{F}$ содержится в $0 \Delta 1$, если $\forall x (x \in \Lambda \lambda \mathcal{F} \supset x \in 0 \Delta 1)$.

В дальнейшем под "множеством" будем всегда понимать множество КДЧ, содержащееся в $0 \Delta 1$.

Дополнением множества $\Lambda \lambda \mathcal{F}$ называем множество $\Lambda \lambda (\lambda \in 0 \Delta 1 \,\&\, \neg \mathcal{F})$ а объединением (соотв. пересечением) множеств $\Lambda \lambda \mathcal{F}$ и $\Lambda \lambda \mathcal{G}$ - множество $\Lambda \lambda (\mathcal{F} \vee \mathcal{G})$ (соотв. $\Lambda \lambda (\mathcal{F} \,\&\, \mathcal{G})$).

__Определения.__ 1) Скажем, что множество $\wedge \lambda \mathcal{F}$ является открытым, если существует нормальный алгорифм $\mathcal{L}$ так, что $\forall x\, (!\mathcal{L}_\llcorner x_\lrcorner \equiv x \in \wedge \lambda \mathcal{F})$ и если для КДЧ x алгорифм $\mathcal{L}$ применим к x, то $\mathcal{L}_\llcorner x_\lrcorner$ НЧ и выполнено $\forall y\, (|x-y| < \frac{1}{\mathcal{L}_\llcorner x_\lrcorner} \supset y \in \wedge \lambda \mathcal{F})$.

2) Скажем, что множество $\wedge \lambda \mathcal{F}$ является __измеримым__ (по Лебегу), если существует $\{\mathfrak{M}_n\}_n \in M$ так, что для почти всех КДЧ x из $0 \vartriangle 1$ имеет место $x \in \wedge \lambda \mathcal{F} \equiv$ $\equiv x \in \{\mathfrak{M}_n\}_n$. КДЧ $\mu(\{\mathfrak{M}_n\}_n)$ назовем мерой множества $\wedge \lambda \mathcal{F}$.

Из свойств пространства M отмеченных в лемме 2, сразу следует, что дополнение измеримого множества, объединение (соотв. пересечение) двух измеримых множеств опять являются измеримыми множествами и меры этих множеств находятся в таких же отношениях, к каким мы привыкли в классической математике.

Кроме того на основании леммы 1 необходимым условием измеримости множества $\wedge \lambda \mathcal{F}$ является то, что для почти всех КДЧ x из $0 \vartriangle 1$ выполнено $(x \in \wedge \lambda \mathcal{F} \vee \neg (x \in \wedge \lambda \mathcal{F}))$. С точки зрения классической математики это условие неинтересно, ведь "так всегда бывает". Как дело обстоит в конструктивной математике, покажет следующий пример. Заметим, что по законам конструктивной логики для любого множества $\wedge \lambda \mathcal{G}$ имеет место $\forall x (x \in 0 \vartriangle 1 \supset \neg\neg (x \in \wedge \lambda \mathcal{G} \vee \neg (x \in \wedge \lambda \mathcal{G})))$.

__Пример 1.__ Можно построить множество $\wedge \lambda \mathcal{G}$ такое, что

1) $\forall x y (x \in \wedge \lambda \mathcal{G} \,\&\, 0 \le y \le x \supset y \in \wedge \lambda \mathcal{G})$ и

2) неверно, что для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ выполнено $(x \in \wedge \lambda \mathcal{G} \vee \neg (x \in \wedge \lambda \mathcal{G}))$, и, следовательно, множество $\wedge \lambda \mathcal{G}$ не является измеримым (по Лебегу).

Пусть Ψ точное дизъюнктное сегментное покрытие сегмента $0 \Delta 1$ такое, что $\forall n (\sum_{k=1}^{n} |\Psi_k| < \frac{1}{2})$ (определение и свойства таких покрытий см.[3],стр.461-74). Для всякого КДЧ x из $0 \Delta 1$ существуют НЧ k_1 и k_2 так,что $Э_п(\Psi_{k_1}) = Э_л(\Psi_{k_2}) \,\&\, x \in Э_л(\Psi_{k_1}) \Delta Э_п(\Psi_{k_2}) \,\&\, (0 < x < 1 \supset$ $\supset Э_л(\Psi_{k_1}) < x < Э_п(\Psi_{k_2}))$. Следовательно существует НЧ q_0 и последовательность НЧ $\{p_k\}_k$ такие, что $Э_п(\Psi_{q_0}) =$ $= 1 \,\&\, Э_л(\Psi_{p_1}) = 0 \,\&\, \forall \ell (Э_п(\Psi_{p_\ell}) = Э_л(\Psi_{p_{\ell+1}}))$.

Определим $\mathcal{G} \rightleftharpoons (0 \leq \lambda \leq 1 \,\&\, \exists \ell (\lambda < Э_п(\Psi_{p_\ell})))$. Тогда $\wedge \lambda \mathcal{G}$ множество, выполнено 1 и

$$(10) \begin{cases} \forall x (x \in 0 \Delta 1 \,\&\, (x \in \wedge \lambda \mathcal{G} \vee \neg (x \in \wedge \lambda \mathcal{G})) \supset \\ \supset \exists a b (a < x < b \,\&\, \forall y (y \in 0 \Delta 1 \,\&\, a < y < b \supset \\ \supset ((y \in \wedge \lambda \mathcal{G}) \equiv (x \in \wedge \lambda \mathcal{G}))))) . \end{cases}$$

Действительно, если $x \in \wedge \lambda \mathcal{G}$, то - по определению - существует НЧ ℓ такое, что $0 \leq x < Э_п(\Psi_{p_\ell})$, и достаточно положить $a \rightleftharpoons -1 \,\&\, b \rightleftharpoons Э_п(\Psi_{p_\ell})$.

Пусть $x \in 0 \Delta 1 \,\&\, \neg (x \in \wedge \lambda \mathcal{G})$. Тогда $\forall \ell (Э_п(\Psi_{p_\ell}) <$ $< Э_п(\Psi_{p_{\ell+1}}) \leq x)$ и существуют НЧ k_1, k_2 и k_3 такие,что $Э_п(\Psi_{k_1}) = Э_л(\Psi_{k_2}) \,\&\, Э_п(\Psi_{k_2}) = Э_л(\Psi_{k_3}) \,\&\, x \in Э_л(\Psi_{k_2}) \Delta Э_п(\Psi_{k_3})$. Очевидно $Э_л(\Psi_{k_1}) < x \,\&\, \forall \ell \neg (p_\ell = k_1)$ и, следовательно, $\forall \ell (Э_п(\Psi_{p_\ell}) \leq Э_л(\Psi_{k_1}))$, т.е. $\neg \exists \ell (Э_л(\Psi_{k_1}) < Э_п(\Psi_{p_\ell}))$. Ввиду 1) достаточно положить $a \rightleftharpoons Э_л(\Psi_{k_1}) \,\&\, b \rightleftharpoons 2$.

Предположим, что для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$

выполнено $(x \in \wedge \lambda \mathcal{G} \vee \neg(x \in \wedge \lambda \mathcal{G}))$. Тогда - по определению - существует последовательность S -множеств $\{{}^k\mathcal{Y}\}_k$ так, что для всякого НЧ k мера ${}^k\mathcal{Y}$ меньше чем $\frac{1}{2^k}$ и выполнено $\forall x\,(x \in O\Delta 1 \,\&\, \neg(x \in {}^k\mathcal{Y}) \supset (x \in \wedge \lambda \mathcal{G} \vee \neg(x \in \wedge \lambda \mathcal{G})))$, т.е. существует нормальный алгорифм $\mathfrak{A}_k$ такой, что

$$(11)\quad \begin{cases} \forall x\,(x \in O\Delta 1 \,\&\, \neg(x \in {}^k\mathcal{Y}) \supset\, !\mathfrak{A}_k \llcorner x \lrcorner \,\&\, (\mathfrak{A}_k \llcorner x \lrcorner \doteq 0 \,\vee \\ \vee\, \mathfrak{A}_k \llcorner x \lrcorner \doteq 1) \,\&\, (\mathfrak{A}_k \llcorner x \lrcorner \doteq 0 \supset x \in \wedge \lambda \mathcal{G}) \,\& \\ \&\, (\mathfrak{A}_k \llcorner x \lrcorner \doteq 1 \supset \neg(x \in \wedge \lambda \mathcal{G}))) \end{cases}$$

(см. правила конструктивного понимания математических суждений в статьях Н.А. Шанина в [2] и [3]).

Пусть y КДЧ, $0 < y < 1$. Существует НЧ k_0 так, что $\forall k\,(k_0 \le k \supset 0 < y - \frac{1}{2^k} < y < y + \frac{1}{2^k} < 1)$.

Пусть k НЧ, $k_0 \le k$. Норма S-множества ${}^k\mathcal{Y}$ меньше чем $\frac{1}{2^k}$ и, следовательно, существуют КДЧ u_k и v_k так, что $0 < y - \frac{1}{2^k} < u_k < y < v_k < y + \frac{1}{2^k} < 1 \,\&\, \neg(u_k \in {}^k\mathcal{Y}) \,\&\, \neg(v_k \in {}^k\mathcal{Y})$ (см. доказательство теоремы 2.4 [3], стр.470-3). На основании (11) получаем $!\mathfrak{A}_k \llcorner u_k \lrcorner \,\&\, !\mathfrak{A}_k \llcorner v_k \lrcorner \,\&\, (\mathfrak{A}_k \llcorner u_k \lrcorner \doteq 0 \vee \mathfrak{A}_k \llcorner u_k \lrcorner \doteq 1) \,\&\, (\mathfrak{A}_k \llcorner v_k \lrcorner \doteq 0 \vee \mathfrak{A}_k \llcorner v_k \lrcorner \doteq 1)$.

Предположив $\neg \exists k\,(k_0 \le k \,\&\, (\mathfrak{A}_k \llcorner u_k \lrcorner \doteq 1 \vee \mathfrak{A}_k \llcorner v_k \lrcorner \doteq 0))$, имеем $\forall k\,(k_0 \le k \supset (\mathfrak{A}_k \llcorner u_k \lrcorner \doteq 0 \,\&\, \mathfrak{A}_k \llcorner v_k \lrcorner \doteq 1)$ и, следовательно, $\forall k\,(k_0 \le k \supset (u_k \in \wedge \lambda \mathcal{G} \,\&\, \neg(v_k \in \wedge \lambda \mathcal{G}))$. Но тогда ввиду (10) и $\forall k\,(k_0 \le k \supset y - \frac{1}{2^k} < u_k < y < v_k < y + \frac{1}{2^k})$ получаем $\neg(y \in \wedge \lambda \mathcal{G}) \,\&\, \neg\neg(y \in \wedge \lambda \mathcal{G})$, что невозможно. Итак, доказано $\neg\neg \exists k\,(k_0 \le k \,\&\, (\mathfrak{A}_k \llcorner u_k \lrcorner \doteq 1 \vee \mathfrak{A}_k \llcorner v_k \lrcorner \doteq 0))$. Отсюда на основании метода конструктивного подбора (см. [3], стр.11) заключаем $\exists k\,(k_0 \le k \,\&\, (\mathfrak{A}_k \llcorner u_k \lrcorner \doteq 1 \vee \mathfrak{A}_k \llcorner v_k \lrcorner \doteq 0))$, т.е. $\exists k\,(k_0 \le k \,\&\, (\neg(u_k \in \wedge \lambda \mathcal{G}) \vee v_k \in \wedge \lambda \mathcal{G}))$ и ввиду 1) $(\neg(y \in \wedge \lambda \mathcal{G}) \vee y \in \wedge \lambda \mathcal{G})$.

любого КДЧ y, $0 < y < 1$, решить вопрос принадлежности y к $\wedge \lambda \mathcal{G}$.

Построим последовательность сегментов $\{a_n \Delta b_n\}_n$ такую, что $a_1 = 0 \,\&\, b_1 = 1 \,\&\, \forall n\, (a_n \in \wedge \lambda \mathcal{G} \,\&\, \neg (b_n \in \wedge \lambda \mathcal{G}) \,\&\, a_{n+1} \Delta b_{n+1} \subseteq a_n \Delta b_n \,\&\, b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot (b_n - a_n))$.

Пусть n НЧ и пусть уже построен сегмент $a_n \Delta b_n$ и выполнено $a_n \in \wedge \lambda \mathcal{G} \,\&\, \neg (b_n \in \wedge \lambda \mathcal{G})$. Имеем $0 < \frac{a_n + b_n}{2} < 1$. Применим метод, описанный в предыдущем абзаце. Определим $a_{n+1} \rightleftharpoons \frac{a_n + b_n}{2} \,\&\, b_{n+1} \rightleftharpoons b_n$, если $\frac{a_n + b_n}{2} \in \wedge \lambda \mathcal{G}$, и $a_{n+1} \rightleftharpoons a_n \,\&\, b_{n+1} \rightleftharpoons \frac{a_n + b_n}{2}$, если $\neg (\frac{a_n + b_n}{2} \in \wedge \lambda \mathcal{G})$.

Последовательности $\{a_n\}_n$ и $\{b_n\}_n$ сходятся к общему пределу, который обозначим посредством x. Имеем $0 \leq x \leq 1$ и ввиду (10) получаем $\neg (x \in \wedge \lambda \mathcal{G}) \,\&\, \neg\neg (x \in \wedge \lambda \mathcal{G})$. Тем самым доказательство 2) закончено.

Теорема 5 показывает, что для всякого $\{\mathfrak{M}_n\}_n \in M$ можно построить последовательность измеримых открытых множеств $\{\wedge \lambda \mathcal{F}_k\}_k$ так, что $\forall x\, k\, ((x \in \{\mathfrak{M}_n\}_n \supset x \in \wedge \lambda \mathcal{F}_k) \,\&\, (x \in \wedge \lambda \mathcal{F}_{k+1} \supset x \in \wedge \lambda \mathcal{F}_k))$ и для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ выполнено $x \in \{\mathfrak{M}_n\}_n \equiv \forall k (x \in \wedge \lambda \mathcal{F}_k) \equiv x \in \wedge \lambda \forall k\, \mathcal{F}_k$. Отсюда видно, что множество $\wedge \lambda \tilde{\mathcal{F}}$ является измеримым тогда и только тогда, когда существует измеримое множество типа G_δ $- \wedge \lambda \mathcal{G}$ так, что для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ выполнено $x \in \wedge \lambda \mathcal{F} \equiv x \in \wedge \lambda \mathcal{G}$.

Заметим, что для всякого S-множества $\mathcal{G}$ – $\wedge \mathcal{x} (\mathcal{x} \in \mathcal{G})$ измеримое множество, причем определенная ранее мера S-множества $\mathcal{G}$ равна мере множества $\wedge \mathcal{x} (\mathcal{x} \in \mathcal{G})$ (см. лемму 3).

С другой стороны можно построить открытое множество, которое не является измеримым. Понятие измеримости функций нельзя в конструктивной математике свести к понятию измеримости множеств, как это делают в классической математике.

Пример 2. Можно построить равномерно непрерывную на сегменте $0 \triangle 1$ конструктивную функцию f так, что открытое множество $\wedge \mathcal{x} (0 < f(\mathcal{x}))$ является объединением последовательности дизъюнктных интервалов, но не является измеримым.

Воспользуемся примером 1 из [5]. Пусть Φ точное дизъюнктное сегментное покрытие сегмента $0 \triangle 1$ и $\{H_n\}_n$ последовательность ступенчатых остовов из этого примера. Легко проверить, что для почти всех КДЧ x из $0 \triangle 1$ последовательность $\{\vartheta_L H_n \, x_\lrcorner\}_n$ определена и сходится к нулю или единице, причем предел этой последовательности равен 1 тогда и только тогда, когда имеет место

$$\exists k (\ni_\lambda(\Phi_k) + \frac{1}{4} \cdot |\Phi_k| < x < \ni_n(\Phi_k) - \frac{1}{4} \cdot |\Phi_k|) .$$

Существует нормальный алгорифм f такой, что для всякого КДЧ x выполнено $f(x) \simeq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1} \cdot |\Phi_k|} (|x - \ni_\lambda(\Phi) - \frac{1}{4} \cdot |\Phi_k|| + |x - \ni_n(\Phi_k) + \frac{1}{4} \cdot |\Phi_k|| - |2x - \ni_\lambda(\Phi_k) - \ni_n(\Phi_k)|)$.

Ясно, что f конструктивная функция, которая является суммой равномерно сходящегося ряда полигональных функций, и, следовательно, равномерно непрерывна. Имеем

$\forall x((0 < f(x) \equiv \exists k(\text{Э}_l(\Phi_k) + \frac{1}{4}|\Phi_k| < x < \text{Э}_n(\Phi_k) - $
$ - \frac{1}{4}\cdot|\Phi_k|)) \& (0 < f(x) \supset x \in 0\triangle 1))$.

Видим, что множество $\wedge\lambda(0 < f(\lambda))$ является объединением последовательности дизъюнктных интервалов $\{(\text{Э}_l(\Phi_k) + \frac{1}{4}\cdot|\Phi_k|)\nabla(\text{Э}_n(\Phi_k) - \frac{1}{4}\cdot|\Phi_k|)\}_k$. На основании этого и {18} из [3], стр. 315, легко доказать, что $\wedge\lambda(0 < f(\lambda))$ открытое множество.

Допустим, что множество $\wedge\lambda(0 < f(\lambda))$ является измеримым. Тогда по определению существует $\{\mathfrak{M}_n\}_n \in M$ так, что для почти всех КДЧ x из $0\triangle 1$ выполнено $x \in \{\mathfrak{M}_n\}_n \equiv$
$\equiv 0 < f(x) \equiv \exists k(\text{Э}_l(\Phi_k) + \frac{1}{4}\cdot|\Phi_k| < x < \text{Э}_n(\Phi) - \frac{1}{4}\cdot|\Phi_k|)$,
т.е. для почти всех КДЧ x из $0\triangle 1$ выполнено $x \in \{\mathfrak{M}_n\}_n$ тогда и только тогда, когда последовательность $\{\vartheta_\llcorner H_n x_\lrcorner\}_n$ определена и сходится к единице. Но тогда $\chi[\{\mathfrak{M}_n\}_n] =$
$= \{H_n\}_n$ и, ввиду $\{\mathfrak{M}_n\}_n \in M$, имеет место
$\chi[\{\mathfrak{M}_n\}_n] \in L_1$.

Таким образом, предпологая измеримость множества $\wedge\lambda(0 < f(\lambda))$, мы пришли к противоречию с пунктом 2в примера 1 из [5].

Литература

[1] А.А. МАРКОВ: Теория алгорифмов, Труды Мат.инст.им.В.А.Стеклова, т. XLII (1954).

[2] — Проблемы конструктивного направления в математике 1 (сборник работ), Труды Мат.инст. им.В.А.Стеклова, т. LII (1958).

[3] — Проблемы конструктивного направления в математике 2 (сборник работ), Труды Мат.инст.

В.А.Стеклова, т. LXVII (1962).

[4] О. ДЕМУТ: Интеграл Лебега в конструктивном анализе, Записки научных семинаров Ленинградского отд. Мат.инст.им.В.А.Стеклова,т.4(1967),30-43.

[5] О. ДЕМУТ: Пространства L_{κ} и S в конструктивной математике,Comment.Math.Univ.Carolinae 10(1969), 261-284.

Matematicko-fyzikální fakulta KU
Sokolovská 83, Praha 8
Československo

(Oblatum 23.6.1969)