Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Oldřich Horáček

Über die Existenz einer periodischen Lösung der nichtlinearen Wellengleichung in E_2 (Vorläufige Mitteilung)

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 10 (1969), No. 3, 421--424

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105243

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
10, 3 (1969)

UEBER DIE EXISTENZ EINER PERIODISCHEN LOESUNG DER NICHTLINEAREN WELLENGLEICHUNG IN E_2

(Vorläufige Mitteilung)

Oldřich HORÁČEK, Praha

Sei $\Omega \subset E_2$ ein beschränktes Gebiet mit einer Lipschitzschen Grenze $\partial\Omega$, sei $I \subset E_1$ ein beliebiges endliches Intervall und bezeichnen wir $J = (-\infty, +\infty) \equiv E_1$. Es seien $L_2 = L_2(\Omega)$ und $\mathring{H}_1 = \mathring{H}_1(\Omega)$ die üblicherweise definierten Hilberträume (weiter, insofern einer nicht speziell gewählt wird, kurz nur H) mit den zu ihnen gehörenden Normen (vgl. z.B.[1]). Bezeichnen wir

$$L_2(I, H) = \mathcal{E}_{\varphi}\{\varphi : I \to H, |\varphi|_{L_2(I,H)} = (\int_I |\varphi(t)|_H^2 dt)^{1/2} < +\infty\},$$

$$L_\infty(I, H) = \mathcal{E}_{\varphi}\{\varphi : I \to H, |\varphi|_{L_\infty(I,H)} = \operatorname*{supess}_{t \in I} |\varphi(t)|_H < +\infty\},$$

$$C^{(0)}(J, H) = \mathcal{E}_{\varphi}\{\varphi : J \to H, \varphi \text{ stetig}, |\varphi|_{C^{(0)}(J,H)} = \max_{t \in J} |\varphi(t)|_H < +\infty\}.$$

Offenbar ist $L_2(I, H)$ ein Hilbertraum, $L_\infty(I, H)$ und $C^{(0)}(J, H)$ sind Banachräume. Bezeichnen wir weiter

$L_{2,loc}(J, H) = \mathcal{E}_{\varphi}\{\varphi : J \to H, |\varphi|_{L_2(I,H)} < +\infty$ für jedes $I \subset J$, I geschlossen $\}$;

$L_{\infty,loc}(J, H) = \mathcal{E}_{\varphi}\{\varphi : J \to H, |\varphi|_{L_\infty(I,H)} < +\infty$ für jedes $I \subset J$, I geschlossen $\}$.

In der vorliegenden Mitteilung wollen wir einen Existenzsatz für in t ω -periodischen Lösung

$u = u(t, x)$ der stark nichtlinearen Wellengleichung in E_2

(1) $u_{tt} - \Delta u + u_t + u^3 = f \quad (f = f(t, x),\ t \in J,\ x \in \Omega)$

mit homogener ersten Randbedingung

(2) $u = 0\ (t \in J,\ x \in \partial\Omega)$

vorlegen.

<u>Bemerkung 1</u>. Nach den in [2] durchgeführten Erwägungen wäre es möglich die Bedingung (2) mit der Bedingung

(3) $$\frac{\partial u}{\partial n} = 0\ (t \in J,\ x \in \partial\Omega)$$

ersetzen (n ist die äussere Normale zu $\partial\Omega$)d.h. anstatt der ersten (Dirichletschen) Randwertaufgabe die zweite (Neumannsche) Randwertaufgabe zu untersuchen. Man könnte zufälligerweise auch die Bedingungen (2) und (3) auf einigen Teilen der Grenze kombinieren.

Führen wir zuerst den Begriff einer schwachen Lösung der Aufgabe (1),(2) ein.

<u>Definition</u>. Sei $f \in L_{2,loc}(J, L_2)$. Eine Funktion u nennen wir schwache Lösung der Aufgabe (1),(2) wenn

a) $u \in L_{\infty,loc}(J, \mathring{H}_1)$, $u_t \in L_{\infty,loc}(J, \mathring{H}_1)$ und $u_{tt} \in$ $\in L_{\infty,loc}(J, L_2)$ und

b) für alle Funktionen $\varphi \in L_{2,loc}(J, \mathring{H}_1)$ mit kompaktem Träger ist

$$\int_J \{(u_{tt}(t), \varphi(t))_{L_2} + (u(t), \varphi(t))_{\mathring{H}_1} + (u_t(t), \varphi(t))_{L_2} + (u^3(t), \varphi(t))_{L_2}\}\,dt = \int_J (f(t), \varphi(t))_{L_2}\,dt$$

erfüllt.

Es gilt der folgende

Satz. Sei $f \in C^{(0)}(J, L_2)$ ω-periodisch in t und $f_t \in L_{2,loc}(J, L_2)$. Dann existiert eine schwache Lösung der Aufgabe (1),(2) welche ω-periodisch in t ist.

Der Beweis des Satzes ist mit Hilfe der Galerkin-Faedomethode durchgeführt (vgl. z.B.[3]). Die Existenz einer ω-periodischen Lösung der zugehörigen nichtlinearen Systemen von gewöhnlichen Differentialgleichungen, welche die Anwendung der angeführten Methode liefert, ist nach dem Leray-Schauder'schen Satz über die Erweiterung nach einem Parameter bewiesen (siehe [4]). Zum Beweis der Konvergenz der Galerkinannäherungen ist das folgende Lemma benützt:

Lemma (siehe [5]). Sei X ein separabler Banachraum und X^* der zu X adjungierter Raum. Dann enthält jede beschränkte Folge der Elemente in X^* eine in X^* schwach* konvergente Teilfolge.

Bemerkung 2. Der ähnliche Satz gilt, wenn wir das nichtlineare Glied u^3 in der Gleichung (1) mit der Funktion

$$g(u) = \sum_{k=1}^{m} c_k u^{2k+1} + \sum_{k=1}^{n} d_k u_t u^{2k}$$

(wo $c_k \geq 0$, $d_k \geq 0$ Konstanten sind) ersetzen.

L i t e r a t u r

[1] J. SATHER: The initial boundary value problem for a

non-linear hyperbolic equation in relativistic quantum mechanics, Journal of Mathematics and Mechanics,Vol.16,1(1966), 27-50.

[2] J.L. LIONS: Équations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites, Springer-Verlag,Berlin,1961.

[3] G. PROUSE: Soluzioni periodiche dell equazione delle ondo non omogenea con termine dissipativo quadratico, Richerche di Matematica,XIII,2 (1964),261-280.

[4] A. FRIEDMAN: Partial differential equation of parabolic type, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1964.

[5] E. HILLE, R.S. PHILLIPS: Functional analysis and semi-groups, American Mathematical Society, 1957.

Matematický ústav ČSAV
Žitná 25,Praha 1,Československo

(Oblatum 8.7.1969)