Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Osvald Demuth

Линейные функционалы в конструктивных пространствах L_r

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 10 (1969), No. 3, 357--390

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105240

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
10, 3 (1969)

ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ В КОНСТРУКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ L_{κ}

О. ДЕМУТ, Прага
(O. DEMUTH, Praha)

Настоящая статья посвящена в основном линейным функционалам в конструктивных пространствах L_{κ} $(1 \leq \kappa)$. Основные свойства этих пространств перечислены в [8].

В этой статье исследуется общий вид линейных функционалов в L_{κ} и их нормируемость. Показано, что для $\kappa > 1$ линейный функционал в L_{κ} имеет норму тогда и только тогда, когда он является функционалом "интегрального типа". Для $\kappa = 1$ аналогичное утверждение неверно. Построены примеры линейных функционалов в L_{κ}, которые не являются функционалами "интегрального типа".

Приводится необходимое и достаточное условие для того, чтобы функция f была неопределенным интегралом от элемента пространства L_{κ} $(1 < \kappa)$. Строится базис пространства L_{κ}.

В следующем пользуемся без ссылок определениями и обозначениями из [8].

<u>Определения</u>. Пусть κ РЧ, $1 \leq \kappa$.

1) Линейными функционалами в L_{κ} будем называть нормальные алгорифмы $\mathcal{F}$ такие, что для любых $\{F_n\}_n \in L_{\kappa}$,

$\{G_n\}_n \in L_\kappa$ и КДЧ u алгорифм $\mathcal{F}$ применим к $\{F_n\}_n$ и перерабатывает его в КДЧ и выполненс $(\{F_n\}_n = \{G_n\}_n \supset$ $\supset \mathcal{F}(\{F_n\}_n) = \mathcal{F}(\{G_n\}_n))$, $\mathcal{F}(u \cdot \{F_n\}_n) = u \cdot \mathcal{F}(\{F_n\}_n)$ и $\mathcal{F}(\{F_n\}_n + \{G_n\}_n) = \mathcal{F}(\{F_n\}_n) + \mathcal{F}(\{G_n\}_n)$.

2) Пусть $\mathcal{F}$ линейный функционал в L_κ. Скажем, что КДЧ x является нормой функционала $\mathcal{F}$, если имеет место $\forall \varkappa (\varkappa \in L_\kappa \supset |\mathcal{F}(\varkappa)| \leq x \cdot \|\varkappa\|_{L_\kappa})$ &

$$\& \forall k \exists \varkappa (\varkappa \in L_\kappa \ \& \ \|\varkappa\|_{L_\kappa} = 1 \ \& \ x - \frac{1}{2^k} < |\mathcal{F}(\varkappa)|).$$

<u>Теорема 1</u>. Пусть κ РЧ, $1 \leq \kappa$, а $\mathcal{F}$ линейный функционал в L_κ. Тогда $\mathcal{F}$ непрерывен и существует КДЧ x такое, что $\forall \varkappa (\varkappa \in L_\kappa \supset |\mathcal{F}(\varkappa)| \leq x \cdot \|\varkappa\|_{L_\kappa})$.

<u>Доказательство</u>. Ввиду того, что $(L_\kappa, \| \ \|_{L_\kappa})$ полное и сепарабельное пространство (см. теорему 7 из [8]), достаточно использовать теорему Цейтина (см.[2],стр.301). По этой теореме функционал $\mathcal{F}$ непрерывен и существует НЧ m такое, что $\forall \varkappa (\varkappa \in L_\kappa \ \& \ \|\varkappa\|_{L_\kappa} \leq \frac{1}{2^m} \supset |\mathcal{F}(\varkappa)| \leq 1)$. Отсюда сразу получаем $\forall \varkappa (\varkappa \in L_\kappa \supset |\mathcal{F}(\varkappa)| \leq 2^m \cdot \|\varkappa\|_{L_\kappa})$.

<u>Замечание 1</u>. На основании этой теоремы и части 2в) леммы 1 из [8] имеет место

$$\forall x (\forall \varkappa (\varkappa \in L_\kappa \supset |\mathcal{F}(\varkappa)| \leq x \cdot \|\varkappa\|_{L_\kappa}) \equiv \forall D (|\mathcal{F}(\{D\}_n)| \leq x \cdot \|\{D\}_n\|_{L_\kappa}))$$

и КДЧ x является нормой линейного функционала в L_κ – $\mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда выполнено

$$\forall D (|\mathcal{F}(\{D\}_n)| \leq x \cdot \|\{D\}_n\|_{L_\kappa}) \ \&$$

$$\& \forall k \exists D (\|\{D\}_n\|_{L_\kappa} = 1 \ \& \ x - \frac{1}{2^k} < |\mathcal{F}(\{D\}_n)|).$$

<u>Лемма 1</u>. Пусть κ РЧ, $1 \leq \kappa$, $\mathcal{G}$ нормальный алгорифм а x КДЧ такие, что $\mathcal{G}$ применим к всякому сту-

пенчатому остову и перерабатывает его в КДЧ, причем для всяких ступенчатых остовов F и G и КДЧ u выполнено $(F \mp G \supset \mathcal{Y}(F) = \mathcal{Y}(G))$, $\mathcal{Y}(u \circ F) = u \cdot \mathcal{Y}(F)$,

$\mathcal{Y}(F \overset{+}{\circ} G) = \mathcal{Y}(F) + \mathcal{Y}(G)$ и $|\mathcal{Y}(F)| \leq x \cdot (\int_0^1 |F|_0^k)^{1/k}$.

Тогда можно построить линейный функционал в L_k - $\mathcal{F}$ такой, что

$\forall F(\mathcal{F}(\{F\}_m) = \mathcal{Y}(F)) \& \forall \varkappa(\varkappa \in L_k \supset |\mathcal{F}(\varkappa)| \leq x \cdot \|\varkappa\|_{L_k})$.

Функционал $\mathcal{F}$ определен алгорифмом $\mathcal{Y}$ однозначно: Если $\mathcal{L}$ линейный функционал в L_k, для которого выполнено $\forall F(\mathcal{L}(\{F\}_m) = \mathcal{Y}(F))$, то

$\forall \varkappa(\varkappa \in L_k \supset \mathcal{L}(\varkappa) = \mathcal{F}(\varkappa))$.

<u>Доказательство</u>. Для всяких $\{F_n\}_n \in L_k$ и НЧ n и k имеем

$$|\mathcal{Y}(F_n) - \mathcal{Y}(F_{n+k})| \leq x \cdot (\int_0^1 |F_n \mp F_{n+k}|_0^k)^{1/k} \leq x \cdot \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Следовательно, можно построить нормальный алгорифм $\mathcal{F}$ применимый к всякому $\{F_n\}_n \in L_k$ и выдающий по нему предел последовательности КДЧ $\{\mathcal{Y}(F_n)\}_n$. Ввиду того, что для всякого НЧ n имеем $|\mathcal{Y}(F_n)| \leq x \cdot$ $\cdot (\int_0^1 |F_n|_0^k)^{1/k}$, выполнено $|\mathcal{F}(\{F_n\}_n)| \leq x \cdot \|\{F_n\}_n\|_{L_k}$.

Из свойств алгорифма $\mathcal{Y}$ и определений операций для последовательностей ступенчатых остовов сразу следует, что $\mathcal{F}$ является линейным функционалом в L_k. Очевидно выполнено $\forall F(\mathcal{F}(\{F\}_n) = \mathcal{Y}(F))$. Однозначность следует из непрерывности функционалов и того, что для любых $\{F_n\}_m \in L_k$ и НЧ m выполнено

$\|\{F_n\}_n - F_m\|_{L_k} < \frac{1}{2^{m-1}}$.

<u>Лемма 2</u>. Пусть k РЧ, $1 \leq k$, пусть $\mathcal{F}$ линейный функционал в L_k. Тогда существует функция f такая, что

(1) $\forall a (0 < a < 1 \supset \mathcal{F}(\{0 \gamma a \gamma 1 \delta 1 \gamma 0\}_n) = f(a) - f(0))$.

<u>Доказательство</u>. Существует нормальный алгорифм $\mathcal{G}_1$, который применим к всякому слову вида xn, где x КДЧ а n НЧ, и выдает по нему РЧ из интервала

$(x - \frac{1}{2^{\tau(k) \cdot n}}) \nabla x$ (см.[2],стр.315). Можно построить нормальный алгорифм $\mathcal{G}$ так, что выполнено

$\forall xn (x \in 0 \Delta 1 \supset !\mathcal{G}(xn) \;\&\; (\mathcal{G}_1(xn) \leq 0 \supset \mathcal{G}(xn) \equiv$

$\equiv 0 \gamma 1 \delta 0) \;\&\; (0 < \mathcal{G}_1(xn) \supset \mathcal{G}(xn) \equiv 0 \gamma \mathcal{G}_1(xn) \gamma 1 \delta 1 \gamma 0))$.

Тогда очевидно $\forall x (\{\mathcal{G}_x(n)\}_n \in L_k)$ и, следовательно, существует нормальный алгорифм f такой, что $\forall x (x \in 0 \Delta 1 \supset f(x) \simeq \mathcal{F}(\{\mathcal{G}_x(n)\}_n))$. f является несомненно функцией и выполнено (1).

<u>Теорема 2</u>. Пусть p и q РЧ, $1 < q \;\&\; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, а $\mathcal{F}$ линейный функционал в L_q. Пусть f функция, для которой выполнено (1). Тогда имеет место

(2) $$\forall z (\forall \varkappa (\varkappa \in L_q \supset |\mathcal{F}(\varkappa)| \leq z \cdot \|\varkappa\|_{L_q}) \equiv$$
$$\equiv \forall n (\sum_{i=1}^{2^n} |f(\tfrac{i}{2^n}) - f(\tfrac{i-1}{2^n})|^p \cdot 2^{n(p-1)} \leq z^p))$$

и КДЧ z является нормой функционала $\mathcal{F}$ в том и только том случае, если оно является пределом неубывающей последовательности КДЧ

$$\{(\sum_{i=1}^{2^n}|f(\frac{i}{2^n})-f(\frac{i-1}{2^n})|^p\cdot 2^{n(p-1)})^{1/p}\}_n .$$

<u>Замечание 2</u>. При помощи стандартных оценок можно убедиться в том, что для всякого РЧ p, $1<p$, и любых КДЧ u_1, u_2, w_1 и w_2, где $0<w_1 \,\&\, 0<w_2$, верно

$$\frac{|u_1+u_2|^p}{(w_1+w_2)^{p-1}} \le \frac{|u_1|^p}{w_1^{p-1}} + \frac{|u_2|^p}{w_2^{p-1}} . \tag{3}$$

Следовательно, для такого p и произвольной функции f выполнено

$$\forall n (\sum_{i=1}^{2^n}|f(\frac{i}{2^n})-f(\frac{i-1}{2^n})|^p\cdot 2^{n\cdot(p-1)} \le \sum_{j=1}^{2^{n+1}}|f(\frac{j}{2^{n+1}}) - f(\frac{j-1}{2^{n+1}})|^p\cdot 2^{(n+1)(p-1)})$$

и к любой системе РЧ $\{a_i\}_{i=0}^m$, $0=a_0<a_1<\ldots<a_m=1$, и НЧ k можно построить НЧ n так, что

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{|f(a_j)-f(a_{j-1})|^p}{(a_j-a_{j-1})^{p-1}} - \frac{1}{2^k} < \sum_{i=1}^{2^n}|f(\frac{i}{2^n})-f(\frac{i-1}{2^n})|^p\cdot 2^{n(p-1)} .$$

Таким образом, если для КДЧ u выполнено

$\forall n((\sum_{i=1}^{2^n}|f(\frac{i}{2^n})-f(\frac{i-1}{2^n})|^p\cdot 2^{n\cdot(p-1)})^{1/p} \le u)$, то для любой системы РЧ $\{a_j\}_{j=0}^m$, где $0=a_0<a_1<\ldots<a_m=1$, имеем

$$(\sum_{j=1}^{m}\frac{|f(a_j)-f(a_{j-1})|^p}{(a_j-a_{j-1})^{p-1}})^{1/p} \le u .$$

<u>Доказательство теоремы 2</u>. Для любого НЧ k построим ступенчатый остов G_k так, что

$G_k \rightleftharpoons 0 \gamma \frac{1}{2^k} \gamma \frac{2}{2^k} \ldots \gamma 1 \delta y_{k,1} \gamma y_{k,2} \ldots \gamma y_{k,2^k}$, где

$y_{k,i} = |f(\frac{i}{2^k}) - f(\frac{i-1}{2^k})|^{p-2} \cdot (f(\frac{i}{2^k}) - f(\frac{i-1}{2^k})) \cdot 2^{k(p-1)} \qquad (1 \leq i \leq 2^k)$.

Тогда

(4) $\forall k (\mathcal{F}(\{G_k\}_m) = \sum_{i=1}^{2^k} |f(\frac{i}{2^k}) - f(\frac{i-1}{2^k})|^p \cdot 2^{k(p-1)} =$

$= (\sum_{i=1}^{2^k} |f(\frac{i}{2^k}) - f(\frac{i-1}{2^k})|^p \cdot 2^{k(p-1)})^{1/p} \cdot \|\{G_k\}_m\|_{L_q})$.

Следовательно, если x КДЧ такое, что

(5) $\forall \varkappa (\varkappa \in L_q \supset |\mathcal{F}(\varkappa)| \leq x \cdot \|\varkappa\|_{L_q})$,

то выполнено

(6) $\forall m ((\sum_{i=1}^{2^m} |f(\frac{i}{2^m}) - f(\frac{i-1}{2^m})|^p \cdot 2^{m(p-1)})^{1/p} \leq x)$.

Пусть, наоборот, для КДЧ x имеет место (6). Пусть D ступенчатый д-остов. Тогда существуют НЧ m и система КДЧ $\{w_i\}_{i=1}^{2^m}$ такие, что

(7) $D \rightleftharpoons 0 \gamma \frac{1}{2^m} \gamma \frac{2}{2^m} \ldots \gamma 1 \delta w_1 \gamma w_2 \ldots \gamma w_{2^m}$.

Имеем $|\mathcal{F}(\{D\}_m)| = |\sum_{i=1}^{2^m} w_i \cdot (f(\frac{i}{2^m}) - f(\frac{i-1}{2^m}))| \leq$

$\leq (\sum_{i=1}^{2^m} |w_i|^q \cdot \frac{1}{2^m})^{1/q} \cdot (\sum_{i=1}^{2^m} |f(\frac{i}{2^m}) - f(\frac{i-1}{2^m})|^p \cdot 2^{m(p-1)})^{1/p} =$

$= \|\{D\}_m\|_{L_q} \cdot (\sum_{i=1}^{2^m} |f(\frac{i}{2^m}) - f(\frac{i-1}{2^m})|^p \cdot 2^{m(p-1)})^{1/p} \leq x \cdot \|\{D\}_m\|_{L_q}$.

На основании замечания 1 получаем отсюда сразу (5).

Таким образом, (2) доказано.

а) Пусть КДЧ x является пределом неубывающей последовательности КДЧ

(8) $\qquad \{(\sum_{i=1}^{2^m} |f(\frac{i}{2^m}) - f(\frac{i-1}{2^m})|^p \cdot 2^{m\cdot(p-1)})^{1/p}\}_n$.

Тогда, как уже знаем, выполнено (5). Кроме того имеет место (4). Но тогда x является по определению нормой линейного функционала $\mathcal{F}$.

б) Допустим, что КДЧ x является нормой функционала $\mathcal{F}$. Тогда выполнено (5) и, следовательно, верно (6). Для всякого НЧ k существует ступенчатый д-остов D такой, что выполнено $\|\{D\}_n\|_{L_q} = 1 \;\&\; x - \frac{1}{2^k} < |\mathcal{F}(\{D\}_n)|$ (см. замечание 1). Можно построить НЧ m и систему КДЧ $\{w_i\}_{i=1}^{2^m}$ так, что выполнено (7). Тогда, как уже знаем, имеет место

$$|\mathcal{F}(\{D\}_n)| \leq \|\{D\}_n\|_{L_q} \cdot (\sum_{i=1}^{2^m} |f(\frac{i}{2^m}) - f(\frac{i-1}{2^m})|^p \cdot 2^{m(p-1)})^{1/p}$$

и, следовательно, получаем

$$x - \frac{1}{2^k} < (\sum_{i=1}^{2^m} |f(\frac{i}{2^m}) - f(\frac{i-1}{2^m})|^p \cdot 2^{m(p-1)})^{1/p} \; .$$

Ввиду этого, (6) и монотонности последовательности (8), КДЧ x является пределом этой последовательности.

Лемма 3. Пусть p и q РЧ, f функция а x КДЧ такие, что выполнено $1 < q \;\&\; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и (6). Тогда можно построить линейный функционал в L_q - $\mathcal{F}$, для которого выполнено (1). Функционал $\mathcal{F}$ определен функцией f однозначно.

Доказательство. Построим нормальный алгорифм $\mathcal{Y}$ такой, что для всякого ступенчатого остова F, где $F \rightleftharpoons a_0 \gamma a_1 \ldots \gamma a_m \delta y_1 \gamma y_2 \ldots \gamma y_m$, выполнено

$$\mathcal{Y}(F) \simeq \sum_{i=1}^{m} y_i \cdot (f(a_i) - f(a_{i-1})) .$$

Имеем $|\mathcal{Y}(F)| \leq (\sum_{i=1}^{m} |y_i|^q (a_i - a_{i-1}))^{1/q} \cdot$

$$\cdot (\sum_{i=1}^{m} \frac{|f(a_i) - f(a_{i-1})|^p}{(a_i - a_{i-1})^{p-1}})^{1/p} \leq x \cdot \|\{F\}_n\|_{L_q} .$$

Алгорифм $\mathcal{Y}$ и КДЧ x выполняют очевидно предположения леммы 1. Для построенного по этой лемме на основании $\mathcal{Y}$ линейного функционала $\mathcal{F}$ имеет место $\forall F(\mathcal{F}(\{F\}_n) = \mathcal{Y}(F))$ и, следовательно,

$$\forall a (0 < a < 1 \supset \mathcal{F}(\{0 \gamma a \gamma 1 \sigma 1 \gamma 0\}_n) =$$
$$= \mathcal{Y}(0 \gamma a \gamma 1 \sigma 1 \gamma 0) = f(a) - f(0)) .$$

<u>Лемма 4</u>. Пусть p и q РЧ, $1 < q \;\&\; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ а $\mathcal{F}$ линейный функционал в L_q такой, что существует $\{F_n\}_n \in L_p$, для которого выполнено

(9) $$\forall \varkappa (\varkappa \in L_q \supset \mathcal{F}(\varkappa) = \int_0^1 \{F_n\}_n \cdot \varkappa) .$$

Тогда КДЧ $\|\{F_n\}_n\|_{L_p}$ является нормой функционала $\mathcal{F}$ и любая функция f такая, что имеет место (1), является неопределенным интегралом от $\{F_n\}_n$ и, следовательно, абсолютно непрерывна на сегменте $0 \Delta 1$.

<u>Замечание 3</u>. Для всяких $\{F_n\}_n \in L_p$ и нормального алгорифма $\mathcal{F}$ таких, что выполнено (9), $\mathcal{F}$ является линейным функционалом в L_q (см. свойства пространства $(L_q, \| \;\; \|_{L_q})$ и интеграла).

<u>Доказательство леммы 4</u>. Для любого $\{G_n\}_n \in L_q$ имеем $\{F_n\}_n \cdot \{G_n\}_n \in L_1$ и

$|\mathcal{F}(\{G_n\}_n)| = |\int_0^1 \{F_n\}_n \cdot \{G_n\}_n| \leq \|\{F_n\}_n\|_{L_p} \cdot \|\{G_n\}_n\|_{L_q}$ (см. (9) и часть 3 леммы 1 из [8]).

Пусть m натуральное число. Тогда $\{[|F_m|^{p-2} \cdot F_m]\}_n \in L_q$ и выполнено

$$\mathcal{F}(\{[|F_m|^{p-2} \cdot F_m]\}_n) = \int_0^1 [|F_m|^{p-2} \cdot F_m] \cdot \{F_n\}_n =$$

$$= \int_0^1 |F_m|_o^p + \int_0^1 [|F_m|^{p-2} \cdot F_m] \cdot (\{F_n\}_n - F_m) \geq (\int_0^1 |F_m|_o^p)^{1-1/p} \cdot$$

$$\cdot ((\int_0^1 |F_m|_o^p)^{1/p} - \|\{F_n\}_n - F_m\|_{L_p}) \geq \|\{[|F_m|^{p-2} \cdot F_m]\}_n\|_{L_q} \cdot (\|\{F_n\}_n\|_{L_p} - \frac{1}{2^{m-2}}).$$

(Под $[|F_m|^{p-2} \cdot F_m]$ подразумеваем $g_\delta(F_m)$, где g всюду определенная конструктивная функция такая, что

$g(0) = 0 \,\&\, \forall x (x \neq 0 \supset g(x) = |x|^{p-2} \cdot x)$.)

Таким образом $\|\{F_n\}_n\|_{L_p}$ является нормой функционала $\mathcal{F}$.

Пусть f функция такая, что имеет место (1). Тогда очевидно выполнено $\forall a (0 < a < 1 \supset \int_0^a \{F_n\}_n = \int_0^1 (0 \gamma a \gamma 1 \sigma 1 \gamma 0) \cdot$
$\cdot \{F_n\}_n = \int_0^1 \{0 \gamma a \gamma 1 \sigma 1 \gamma 0\}_n \cdot \{F_n\}_n = \mathcal{F}(\{0 \gamma a \gamma 1 \sigma 1 \gamma 0\}_n) = f(a) - f(0))$

и, следовательно, $\forall x (0 \leq x \leq 1 \supset \int_0^x \{F_n\}_n = f(x) - f(0))$.

<u>Пример 1</u>. Пусть p и q РЧ, $1 < q \,\&\, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Можно построить линейный функционал в L_q - $\mathcal{F}$, который не является функционалом "интегрального типа", т.е. не существует $\{F_n\}_n \in L_p$ такое, что (9).

Действительно, пусть f функция из теоремы из [7]. Тогда выполнено $\forall x y (x \in 0 \Delta 1 \,\&\, y \in 0 \Delta 1 \supset |f(x) - f(y)| \leq |x - y|)$ и f не является абсолютно непрерывной на сегменте $0 \Delta 1$.

Для всякого НЧ n имеем

$$\sum_{i=1}^{2^n} |f(\frac{i}{2^n})-f(\frac{i-1}{2^n})|^p \cdot 2^{n(p-1)} \leq \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{2^{pn}} \cdot 2^{n(p-1)} = 1 .$$

Таким образом, для $x = 1$ выполнено (6) и, следовательно, по лемме 3 можно построить линейный функционал в L_q – $\mathcal{F}$ так, что имеет место (1). Остается применить лемму 4.

<u>Теорема 3</u>. Пусть $\mathcal{F}$ линейный функционал в L_1 а f функция такая, что выполнено (1). Тогда имеет место

$$\forall x (\forall æ (æ \in L_1 \supset |\mathcal{F}(æ)| \leq x \cdot \| æ \|_{L_1}) \equiv$$

$$\equiv \forall xy (x \in 0\Delta 1 \,\&\, y \in 0 \Delta 1 \supset |f(x)-f(y)| \leq x \cdot |x-y|))$$

и КДЧ x является нормой линейного функционала $\mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда выполнено

(10) $\quad \forall n i (1 \leq i \leq 2^n \supset |f(\frac{i}{2^n})-f(\frac{i-1}{2^n})| \leq x \cdot \frac{1}{2^n})$ и

(11) $\forall k \exists m i (1 \leq i \leq 2^m \,\&\, |f(\frac{i}{2^m})-f(\frac{i-1}{2^m})| > (x-\frac{1}{2^k}) \cdot \frac{1}{2^m})$.

<u>Замечание 4</u>. Ввиду того, что для любых КДЧ u_1, u_2, w_1 и w_2, где $0 < w_1 \,\&\, 0 < w_2$, выполнено

$$\frac{|u_1 + u_2|}{w_1 + w_2} \leq max(\frac{|u_1|}{w_1}, \frac{|u_2|}{w_2}) \leq \frac{|u_1|}{w_1} + \frac{|u_2|}{w_2} ,$$

для функции f и КДЧ x выполнено (10) и (11) тогда и только тогда, когда x является пределом неубывающей последовательности КДЧ

$$\{ \max_{1 \leq i \leq 2^n} |f(\frac{i}{2^n}) - f(\frac{i-1}{2^n})| \cdot 2^n \}_n .$$

<u>Доказательство теоремы 3</u>. а) Если x КДЧ такое, что

(12) $\quad \forall æ (æ \in L_1 \supset |\mathcal{F}(æ)| \leq x \cdot \| æ \|_{L_1})$,

то ввиду (1) и непрерывности функции f очевидно выполнено

(13) $\forall xy(x\in 0\Delta 1 \& y\in 0\Delta 1 \supset |f(x)-f(y)|\le \varkappa\cdot|x-y|)$

и, следовательно, и (10).

б) Пусть $\varkappa$ КДЧ, для которого выполнено (10). Тогда на основании непрерывности функции f получаем (13).

Пусть D ступенчатый д-остов, пусть выполнено (7). Тогда имеет место $|\mathcal{F}(\{D\}_m)|=|\sum_{i=1}^{2^m} w_i(f(\frac{i}{2^m})-f(\frac{i-1}{2^m}))|\le\sum_{i=1}^{2^m}|w_i|\cdot$

$\cdot\frac{1}{2^m}\cdot|f(\frac{i}{2^m})-f(\frac{i-1}{2^m})|\cdot 2^m\le(\max_{1\le i\le 2^m}|f(\frac{i}{2^m})-f(\frac{i-1}{2^m})|\cdot 2^m)\cdot\sum_{i=1}^{2^m}|w_i|\cdot$

$\cdot\frac{1}{2^m}=(\max_{1\le i\le 2^m}|f(\frac{i}{2^m})-f(\frac{i-1}{2^m})|\cdot 2^m)\cdot\|\{D\}_m\|_{L_1}\le\varkappa\cdot\|\{D\}_m\|_{L_1}$.

Отсюда получаем на основании замечания 1 сразу (12).

в) Пусть КДЧ $\varkappa$ является нормой функционала $\mathcal{F}$. Тогда выполнено (12) и на основании а) и (10).

Пусть k НЧ, тогда существует ступенчатый д-остов D такой, что имеет место $\|\{D\}_m\|_{L_1}=1\&\varkappa-\frac{1}{2^k}<$

$<|\mathcal{F}(\{D\}_m)|$ (см. замечание 1). Можно построить НЧ m и систему КДЧ $\{w_i\}_{i=1}^{2^m}$ так, что выполнено (7). Тогда, пользуясь неравенствами, выведенными в б), получаем

$\varkappa-\frac{1}{2^k}<|\mathcal{F}(\{D\}_m)|\le(\max_{1\le i\le 2^m}|f(\frac{i}{2^m})-f(\frac{i-1}{2^m})|\cdot 2^m)\cdot\|\{D\}_m\|_{L_1}=$

$=\max_{1\le i\le 2^m}|f(\frac{i}{2^m})-f(\frac{i-1}{2^m})|\cdot 2^m$

и, следовательно, существует НЧ i такое, что $1\le i\le$

$\le 2^m$ и $\varkappa-\frac{1}{2^k}<|f(\frac{i}{2^m})-f(\frac{i-1}{2^m})|\cdot 2^m$.

Итак, верно (11).

г) Пусть $\varkappa$ КДЧ такое, что выполнено (10) и (11). Тогда на основании б) получаем (12).

Пусть k НЧ и пусть для НЧ m и i имеет место

$1 \leq i \leq 2^m \& |f(\frac{i}{2^m}) - f(\frac{i-1}{2^m})| > (x - \frac{1}{2^k}) \cdot \frac{1}{2^m}$. Тогда определим

$$G \rightleftharpoons \begin{cases} 0 \gamma \frac{i-1}{2^m} \gamma \frac{i}{2^m} \gamma 1 \sigma 0 \gamma 1 \gamma 0, & \text{если } 1 < i < 2^m, \\ 0 \gamma \frac{1}{2^m} \gamma 1 \sigma 1 \gamma 0, & \text{если } i = 1 \text{ и} \\ 0 \gamma \frac{2^m - 1}{2^m} \gamma 1 \sigma 0 \gamma 1, & \text{если } i = 2^m. \end{cases}$$

Имеем $|\mathcal{F}(\{G\}_n)| = |f(\frac{i}{2^m}) - f(\frac{i-1}{2^m})| > (x - \frac{1}{2^k}) \cdot \frac{1}{2^m} =$

$$= (x - \frac{1}{2^k}) \cdot \|\{G\}_n\| .$$

Итак, x является нормой функционала $\mathcal{F}$.

<u>Лемма 5</u>. Пусть f функция а x КДЧ такие, что (10). Тогда можно построить линейный функционал в L_1 - $\mathcal{F}$ такой, что выполнено (1). Функционал $\mathcal{F}$ определен функцией f однозначно.

Эту лемму можно доказать, повторив рассуждения из доказательства леммы 3.

<u>Лемма 6</u>. Пусть $\{F_n\}_n \in L_1$ а x КДЧ такие, что

(14) $$|\{F_n\}_n| \leq \{0 \gamma 1 \sigma x\}_n .$$

Тогда можно построить нормальные алгорифмы $\mathcal{Z}$ и $\mathcal{F}$ для которых имеет место

(15) $\forall \varkappa (\varkappa \in L_1 \supset\, ! \mathcal{Z}(\varkappa) \& \mathcal{Z}(\varkappa) \in L_1 \& \mathcal{Z}(\varkappa) = \{F_n\}_n \cdot \varkappa)$ и

(16) $$\forall \varkappa (\varkappa \in L_1 \supset \mathcal{F}(\varkappa) \simeq \int_0^1 \mathcal{Z}(\varkappa)) .$$

Из (15) и (16) следует, что $\mathcal{F}$ линейный функционал в

L_1. Выполнено (12) и для любой функции f, для которой имеет место (1), верно

(17) $\forall x (0 \leq x \leq 1 \supset f(x) - f(0) = \int_0^x \{F_n\}_n)$

и, следовательно, f абсолютно непрерывна на сегменте $0 \Delta 1$.

Доказательство. На основании части 5а) леммы 1 из [8] знаем, что для всякого $\{G_n\}_n \in L_1$ имеет место $\{\lambda_o(F_{\ell_n+n}, \tau(x)) \circ G_{\ell_n+n}\}_n \in L_1$, где $\forall n (\ell_n = \tau(x) + 3 + \max\limits_{1 \leq j \leq n+\tau(x)+2} \tau(\sigma(G_j))))$. Ввиду (14) выполнено

$\{\lambda_o(F_{\ell_n+n}, \tau(x)) \circ G_{\ell_n+n}\}_n = \{\lambda_o(F_n, \tau(x))\}_n \cdot \{G_n\}_n = \{F_n\}_n \cdot \{G_n\}_n$.

Таким образом можно построить нормальный алгорифм $\mathfrak{Z}$ так, что для всякого $\{G_n\}_n \in L_1$ имеет место

$$\mathfrak{Z}(\{G_n\}_n) \simeq \{\lambda_o(F_{\ell_n+n}, \tau(x)) \circ G_{\ell_n+n}\}_n .$$

Тогда очевидно выполнено требуемое (15) и, следовательно, существует нормальный алгорифм $\mathfrak{F}$ такой, что (16).

Ввиду (15) для всяких $\{^1G_n\}_n \in L_1$, $\{^2G_n\}_n \in L_1$ и КДЧ u имеем $(\{^1G_n\}_n = \{^2G_n\}_n \supset \mathfrak{Z}(\{^1G_n\}_n) = \mathfrak{Z}(\{^2G_n\}_n))$, $\mathfrak{Z}(u \cdot \{^1G_n\}_n) = u \cdot \mathfrak{Z}(\{^1G_n\}_n)$ и $\mathfrak{Z}(\{^1G_n\}_n + \{^2G_n\}_n) = \mathfrak{Z}(\{^1G_n\}_n) + \mathfrak{Z}(\{^2G_n\}_n)$.

На основании этого, следствия теоремы 6 и части 5б) леммы 1 из [8] видим, что $\mathfrak{F}$ линейный функционал в L_1. Из (14) и (15) следует $\forall \varkappa (\varkappa \in L_1 \supset |\mathfrak{Z}(\varkappa)| \leq x \cdot |\varkappa|)$, откуда на основании следствия теоремы 6 из [8] получаем (12).

Пусть f функция такая, что (1). Для любого РЧ a, $0 < a < 1$, имеем $0 \gamma a \gamma 1 \sigma 1 \gamma 0 \cdot \{F_n\}_n \in$ $\in L_1 \,\&\, \mathfrak{Z}(\{0 \gamma a \gamma 1 \sigma 1 \gamma 0\}_n) = \{0 \gamma a \gamma 1 \sigma 1 \gamma 0\}_n \cdot \{F_n\}_n =$

$= 0 \gamma a \gamma 1 \sigma 1 \gamma 0 \cdot \{F_n\}_n$ и, следовательно, на основании теоремы 6 из [8] и ее следствия имеем $f(a) - f(0) =$

$$= \mathcal{F}(\{0 \gamma a \gamma 1 \sigma 1 \gamma 0\}_n) = \int_0^1 0 \gamma a \gamma 1 \sigma 1 \gamma 0 \cdot \{F_n\}_n = \int_0^a \{F_n\}_n .$$

Но тогда выполнено (17) и к завершению доказательства достаточно применить теорему 2 из [8].

<u>Лемма 7</u>. Пусть $\mathcal{F}$ линейный функционал в L_1 а f функция такие, что (1). Пусть f является абсолютно непрерывной на $0 \Delta 1$. Тогда $\mathcal{F}$ функционал "интегрального типа". Существуют $\{F_n\}_n \in L_1$ и КДЧ x такие, что (14) и (17) и для нормального алгорифма $\mathfrak{Z}$ для которого выполнено (15), имеет место (16).

<u>Доказательство</u>. На основании теоремы 1 знаем, что существует КДЧ x такое, что (12) и, следовательно, по теореме 3 получаем (13). К абсолютно непрерывной на $0 \Delta 1$ функции f существует по теореме 2 из [8] $\{F_n\}_n \in L_1$ так, что (17) и для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ последовательность КДЧ $\{\vartheta(F_n, x)\}_n$ сходится и ее предел является значением производной от f в точке x. Отсюда получаем ввиду (13) сразу (14).

На основании предыдущей леммы знаем, что можно построить нормальный алгорифм $\mathfrak{Z}$ так, что (15). На основании лемм 5 и 6 получаем ввиду (1) и (17) сразу (16).

<u>Пример 2</u>. Можно построить линейный функционал в

$L_1 - \mathcal{F}_1$ так, что 1 является нормой функционала $\mathcal{F}_1$ и что $\mathcal{F}_1$ не является функционалом "интегрального типа".

Пусть f функция из теоремы из [7]. Тогда, как знаем, выполнено $\forall xy(x \in 0\Delta 1 \& y \in 0\Delta 1 \supset |f(x) - f(y)| \leq |x - y|)$ и возрастающая на $0 \Delta 1$ функция f не является дифференцируемой ни в одной точке сегмента $0 \Delta 1$.

Построим функцию f_1 так, что выполнено

$$\forall x((0 \leq x \leq \tfrac{1}{2} \supset f_1(x) = f(x)) \& (\tfrac{1}{2} \leq x \leq 1 \supset f_1(x) = f(\tfrac{1}{2}) + (x - \tfrac{1}{2}))).$$

Тогда имеет место $\forall xy(x \in 0\Delta 1 \& y \in 0\Delta 1 \supset |f_1(x) - f_1(y)| \leq$

$\leq |x - y| \& (x < y \supset f_1(x) < f_1(y)))$ и функция f_1 не является дифференцируемой ни в одной точке интервала $0 \nabla \frac{1}{2}$ и - по теореме 2 из [8] - f_1 не является абсолютно непрерывной на $0 \Delta 1$.

К f_1 можно по лемме 5 построить линейный функционал в $L_1 - \mathcal{F}_1$ так, что выполнено

$$\forall a (0 < a < 1 \supset \mathcal{F}_1(\{0 \gamma a \gamma 1 \delta 1 \gamma 0\}_n) = f_1(a) - f_1(0)) .$$

На основании $\forall mi (1 \leq i \leq 2^m \supset |f_1(\frac{i}{2^m}) - (\frac{i-1}{2^m})| \cdot 2^m \leq 1)$ и $(f_1(1) - f_1(\frac{1}{2})) \cdot 2 = 1$ и теоремы 3 видим, что 1 является нормой функционала $\mathcal{F}_1$. Ввиду свойств функции f_1 функционал $\mathcal{F}_1$ не может быть функционалом "интегрального типа" (см. лемму 6).

<u>Пример 3</u>. Можно построить линейный функционал в $L_1 - \mathcal{F}$ и $\{F_n\}_n \in L_1$ так, что функционал $\mathcal{F}$ не

имеет норму, выполнено $|\{F_n\}_n| \le \{0 \curlyvee 1 \curlyvee 1\}_n$ и, если f функция такая, что (17), то имеет место (1). Таким образом $\mathcal{F}$ является функционалом "интегрального типа".

Пусть Φ покрытие из примера 1 из [8]. Тогда, как знаем, выполнено $\forall m\, (\sum_{i=1}^{m} |\Phi_i| < \frac{1}{4})$ и ряд $\sum_k |\Phi_k|$ не сходится. Построим последовательности ступенчатых остовов $\{G_n\}_n$ и $\{F_n\}_n$ так, что имеет место

$$\forall m\, ((G_n \mathrel{\mathcal{I}} 0 \curlyvee (\tfrac{1}{2}(\exists_\lambda(\Phi_n) + \exists_n(\Phi_n)) -$$

$$- \frac{1}{2^{n+1}} \cdot |\Phi_n|) \curlyvee (\tfrac{1}{2}(\exists_\lambda(\Phi_n) + \exists_n(\Phi_n)) + \frac{1}{2^{n+1}} \cdot$$

$$\cdot |\Phi_n|) \curlyvee 1 \curlyvee 0 \curlyvee \sum_{i=1}^{n} |\Phi_i| \curlyvee 0) \,\&\, F_m \rightleftharpoons \sum_{i=1}^{m}{}_{\circ}\, G_i) \;.$$

Тогда для любого НЧ m имеем $0 \le F_m \,\&\, \sigma(F_m) =$ $= \sum_{i=1}^{m} |\Phi_i| < \frac{1}{4}$ и $\int_0^1 |F_n \mathrel{\overline{\tau}} F_{n+1}|_\circ = \int_0^1 G_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot |\Phi_{n+1}| \cdot$ $\cdot \sum_{i=1}^{n+1} |\Phi_i| < \frac{1}{2^n}$ и, следовательно, $\{F_n\}_n \in L_1$ и $0 \le \{F_n\}_n \le \{0 \curlyvee 1 \curlyvee \frac{1}{4}\}_n$.

Пусть функция f является неопределенным интегралом от $\{F_n\}_n$. Тогда ввиду следствия теоремы 6 из [8] выполнено $\forall x y\, (x \in 0 \vartriangle 1 \,\&\, y \in 0 \vartriangle 1 \supset |f(x) - f(y)| \le \frac{1}{4} \cdot |x - y|)$ и на основании леммы 5 можно построить линейный функционал в L_1 - $\mathcal{F}$ так, что выполнено (1).

а) Пусть x КДЧ такое, что $\forall m\, (\sum_{i=1}^{m} |\Phi_i| \le x)$. Тогда для всякого НЧ n имеем $0 \le F_n \,\&\, \sigma(F_n) = \sum_{i=1}^{m} |\Phi_i| \le x$ и, следовательно, $0 \le \{F_n\}_n \le \{0 \curlyvee 1 \curlyvee x\}_n$, откуда по следствию теоремы 6 из [8] и теореме 3 следует

$\forall x y\,(x \in 0\Delta 1 \,\&\, y \in 0\Delta 1 \supset |f(x) - f(y)| \leq \varkappa \cdot |x - y|)$ и

$\forall \text{æ}\,(\text{æ} \in L_1 \supset |\mathcal{F}(\text{æ})| \leq \varkappa \cdot \|\text{æ}\|_{L_1})$.

б) Пусть $\varkappa$ КДЧ и m НЧ такие, что $\sum\limits_{i=1}^{m} |\Phi_i| > \varkappa$. Тогда по лемме 6 и по следствию теоремы 6 из [8] $\mathcal{F}(\{G_m\}_m) =$
$= \int_0^1 \mathcal{Z}(\{G_m\}_n) = \int_0^1 G_m \cdot \{F_n\}_n = \int_{\exists_\lambda(\Phi_m)}^{\exists_n(\Phi_m)} G_m \cdot \{F_n\}_n = \int_{\exists_\lambda(\Phi_m)}^{\exists_n(\Phi_m)} G_m \circ$
$\circ\, G_m = \frac{|\Phi_m|}{2^m} \cdot \left(\sum\limits_{i=1}^{m} |\Phi_i|\right)^2 = \|\{G_m\}_n\|_{L_1} \cdot \sum\limits_{i=1}^{m} |\Phi_i| > \varkappa \cdot \|\{G_m\}_n\|_{L_1}$.

Итак, мы доказали $(\forall \varkappa\,(\exists n\,(\sum\limits_{i=1}^{m} |\Phi_i| > \varkappa) \supset$
$\supset \exists \text{æ}\,(\text{æ} \in L_1 \,\&\, |\mathcal{F}(\text{æ})| > \varkappa \cdot \|\text{æ}\|_{L_1})))$.

На основании а) и б) сразу получаем

$$(18)\ \forall \varkappa\,(\forall n\,(\sum_{i=1}^{m} |\Phi_i| \leq \varkappa) \equiv \forall \text{æ}\,(\text{æ} \in L_1 \supset |\mathcal{F}(\text{æ})| \leq \varkappa \cdot \|\text{æ}\|_{L_1}))\,.$$

в) Допустим, что КДЧ v является нормой функционала $\mathcal{F}$. Тогда ввиду (18) получаем $\forall n\,(\sum\limits_{i=1}^{m} |\Phi_i| \leq v)$.

С другой стороны для любого РЧ c, $c < v$, имеет место $\exists \text{æ}\,(\text{æ} \in L_1 \,\&\, |\mathcal{F}(\text{æ})| > c \cdot \|\text{æ}\|_{L_1})$, из чего следует $\neg \forall \text{æ}\,(\text{æ} \in L_1 \supset |\mathcal{F}(\text{æ})| \leq c \cdot \|\text{æ}\|_{L_1})$. Отсюда получаем на основании (18) $\neg \forall n\,(\sum\limits_{i=1}^{m} |\Phi_i| \leq c)$, т.е.

$$(19)\qquad \neg\neg \exists n\,(\sum_{i=1}^{m} |\Phi_i| > c)\,.$$

Существует нормальный алгорифм выясняющий для любой пары РЧ a и b, выполнено ли $a < b$ или нет. Ввиду этого получаем, пользуясь методом конструктивного подбора (см.[2],стр.11), из (19) сразу $\exists m\,(\sum_{i=1}^{m} |\Phi_i| > c)$.

Итак, из предположения, что КДЧ v является нормой функционала $\mathcal{F}$, следует сходимость ряда

$\sum_{k} |\Phi_k|$ и мы пришли к противоречию.

<u>Пример 4</u>. Пусть p, q РЧ, $1 < q \;\&\; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Можно построить абсолютно непрерывную на сегменте $0 \Delta 1$ функцию f так, что выполнено

$\forall n\,(\sum_{i=1}^{2^n} |f(\frac{i}{2^n}) - f(\frac{i-1}{2^n})|^p \cdot 2^{n\cdot(p-1)} \leq 1)$ и что линейный функционал в L_q – $\mathcal{F}$, для которого выполнено (1), не является функционалом "интегрального типа", т.е. не существует $\{F_n\}_n \in L_p$ так, что выполнено (17).

Пусть Φ покрытие, $\{\lambda_n\}_n$ возрастающая последовательность НЧ и $\{\{\ell_{n,j} \Delta c_{n,j}\}_{j=1}^{\ell_n}\}_n$ последовательность систем неперекрывающихся сегментов из примера 1 из [8].

Ввиду того, что $\forall n\,(|\Phi_n| < \frac{1}{4})$, имеем $\forall n\,(|\Phi_n|^2 < \frac{1}{4} \cdot |\Phi_n|)$. Построим последовательность ступенчатых остовов $\{G_n\}_n$ так, что для всякого НЧ n выполнено

$$G_n \rightleftharpoons 0 \gamma (Э_2(\Phi_n) + \frac{1}{4} \cdot |\Phi_n|) \gamma (Э_2(\Phi_n) + \frac{1}{4} \cdot |\Phi_n| + |\Phi_n|^2) \gamma 1 \sigma 0 \gamma \frac{1}{|\Phi_n|^{\frac{1}{p}}} \gamma 0 .$$

Пусть $k_0 \rightleftharpoons \tau(\frac{1}{1-\frac{1}{p}})$. Для всякого НЧ n ввиду свойств последовательности $\{\lambda_n\}_n$ имеем $\forall m\,(\lambda_{k_0 \cdot n} < m \supset |\Phi_m|^{1+\frac{1}{p}} < \frac{1}{2^n})$ и

$$\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^{\lambda_{k_0}\cdot n} G_i - \sum_{i=1}^{\lambda_{k_0}\cdot(n+1)} G_i\right| = \sum_{i=\lambda_{k_0}\cdot n+1}^{\lambda_{k_0}\cdot(n+1)} \int_0^1 G_i =$$

$$= \sum_{i=\lambda_{k_0}\cdot n+1}^{\lambda_{k_0}\cdot(n+1)} |\Phi_i|^{2-\frac{1}{p}} < \frac{1}{2^n}\cdot \sum_{i=\lambda_{k_0}\cdot n+1}^{\lambda_{k_0}\cdot(n+1)} |\Phi_i| < \frac{1}{2^{n+2}} .$$

Таким образом, $\{\sum_{i=1}^{\lambda_{k_0}\cdot n} G_i\}_n \in L_1$.

Пусть f неопределенный интеграл от $\{\sum_{i=1}^{\lambda_{k_0}\cdot n} G_i\}_n$. Тогда функция f абсолютно непрерывна на $0 \Delta 1$ и ввиду свойств последовательности $\{G_m\}_m$ на основании следствия теоремы 6 из [8] получаем

$$(20)\ \forall m x (x\in\Phi_m \supset f(x)-f(\partial_\lambda(\Phi_m)) = \mathscr{E}_{G_m}(x) - \mathscr{E}_{G_m}(\partial_\lambda(\Phi_m))) .$$

Покажем, что выполнено

$$(21)\qquad \forall n \left(\sum_{i=1}^{2^n} \left|f\left(\frac{i}{2^n}\right)-f\left(\frac{i-1}{2^n}\right)\right|^p\cdot 2^{n(p-1)} \leq 1\right) .$$

Пусть n_0 НЧ. Допустим, что имеет место

$$(22)\qquad \sum_{i=1}^{2^{n_0}} \left|f\left(\frac{i}{2^{n_0}}\right)-f\left(\frac{i-1}{2^{n_0}}\right)\right|^p\cdot 2^{n_0\cdot(p-1)} > 1 .$$

Пусть n НЧ, $n_0 \leq n$. Скажем, что сегмент $\alpha \Delta \beta$ является сегментом типа A_n , если α и β РЧ и выполнено $\alpha = 0 \& \beta = 1$ или сегмент $\alpha \Delta \beta$ является одним из сегментов из систем $\{\Phi_j\}_{j=1}^{\lambda_n}$ и $\{b_{n,i} \Delta c_{n,i}\}_{i=1}^{l_n}$.

Если $\alpha \Delta \beta$ сегмент типа A_m , $m \leq n$, то посредством $\delta(m, \alpha \Delta \beta)$ обозначим КДЧ $\sum_{i=k}^{\ell} \frac{|f(a_i)-f(a_{i-1})|^p}{(a_i - a_{i-1})^{p-1}}$,

где $\{a_i\}_{i=0}^{s}$ система РЧ такая, что $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_s = 1$ и $\forall a (\exists i (0 \leq i \leq s \& a = a_i) \equiv (\exists j (0 \leq j \leq 2^m \& a = \frac{j}{2^m}) \vee$

$\vee \exists j (1 \le j \le \lambda_n \& (a = \partial_\lambda(\Phi_j) \vee a = \partial_n(\Phi_j))))$) а k и ℓ НЧ такие, что $a_{k-1} = \alpha \& a_\ell = \beta$.

Для любого НЧ n, $n_0 \le n$, и произвольных сегмента $\alpha \Delta \beta$ типа A_n и системы неперекрывающихся сегментов типа A_{n+1} – $\{\alpha_i \Delta \beta_i\}_{i=1}^{\ell}$ таких, что $\alpha \Delta \beta$ является объединением сегментов этой системы, выполнено:

$$\delta(n+1, \alpha \Delta \beta) = \sum_{i=1}^{\ell} \delta(n+1, \alpha_i \Delta \beta_i) \& |\alpha \Delta \beta| = \sum_{i=1}^{\ell} |\alpha_i \Delta \beta_i|,$$

$0 \Delta 1$ является сегментом типа A_n, $\delta(n, 0 \Delta 1) =$

$= \sum_{j=1}^{\lambda_n} \delta(n, \Phi_j) + \sum_{i=1}^{\ell_n} \delta(n, b_{n,i} \Delta c_{n,i})$ и (на основании замечания 2 и (22)) $\delta(n, \alpha \Delta \beta) \le \delta(n+1, \alpha \Delta \beta) \&$

$\& 1 < \delta(n, 0 \Delta 1)$. Имеет место

(23) $\quad \forall j \; (1 \le j \le \lambda_n \supset \delta(n, \Phi_j) \le \int_0^1 |G_j|_0^r - |\Phi_j|)$

(см. замечания 2 и 3, теорему 2 и лемму 4).

Построим последовательность сегментов $\{\alpha_m^0 \Delta \beta_m^0\}_m$ такую, что для всякого НЧ k сегмент $\alpha_k^0 \Delta \beta_k^0$ является сегментом типа A_{n_0+k} и выполнено

(24) $|\alpha_k^0 \Delta \beta_k^0| < \delta(n_0+k, \alpha_k^0 \Delta \beta_k^0) \& \alpha_{k+1}^0 \Delta \beta_{k+1}^0 \subset \alpha_k^0 \Delta \beta_k^0 \& |\alpha_{k+1}^0 \Delta$

$\Delta \beta_{k+1}^0| < \frac{1}{2^{n_0+k+1}} \& \exists i j (\alpha_{k+1}^0 = \partial_n(\Phi_i) \& \beta_{k+1}^0 = \partial_\lambda(\Phi_j))$; .

а) определим $\alpha_1^0 \Delta \beta_1^0 \rightleftharpoons 0 \Delta 1$. Тогда, как знаем, ввиду (22) имеет место $|\alpha_1^0 \Delta \beta_1^0| = 1 < \delta(n_0+1, \alpha_1^0 \Delta \beta_1^0)$;

и $\alpha_1^0 \Delta \beta_1^0$ является сегментом типа A_{n_0+1}.

б) Пусть k НЧ, пусть уже построен сегмент $\alpha_k^o \triangle \beta_k^o$ типа A_{n_0+k}, для которого выполнено $\delta(n_0+k, \alpha_k^o \triangle \beta_k^o) > |\alpha_k^o \triangle \beta_k^o|$.

Пусть система неперекрывающихся сегментов $\{\alpha_j^1 \triangle \beta_j^1\}_{j=1}^{s}$ является системой всех сегментов типа A_{n_0+k+1}, которые содержатся в сегменте $\alpha_k^o \triangle \beta_k^o$. Тогда $\alpha_k^o \triangle \beta_k^o$ является объединением сегментов этой системы и, как знаем, $\sum_{j=1}^{s} |\alpha_j^1 \triangle \beta_j^1| = |\alpha_k^o \triangle \beta_k^o| < \delta(n_0+k, \alpha_k^o \triangle \beta_k^o) \le \delta(n_0+k+1, \alpha_k^o \triangle \beta_k^o) = \sum_{j=1}^{s} \delta(n_0+k+1, \alpha_j^1 \triangle \beta_j^1)$.

Ввиду этого и (23) существуют НЧ j и i так, что $1 \le j \le s \,\&\, 1 \le i \le l_{n_0+k+1} \,\&\, |\alpha_j^1 \triangle \beta_j^1| < \delta(n_0+k+1, \alpha_j^1 \triangle \beta_j^1) \,\&\, \alpha_j^1 = b_{n_0+k+1,i} \,\&\, \beta_j^1 = c_{n_0+k+1,i}$. Определим $\alpha_{k+1}^o \rightleftharpoons \alpha_j^1 \,\&\, \beta_{k+1}^o \rightleftharpoons \beta_j^1$. Но тогда имеем (24) и $|\alpha_{k+1}^o \triangle \beta_{k+1}^o| < \delta(n_0+k+1, \alpha_{k+1}^o \triangle \beta_{k+1}^o)$ (см. пример 1 из [8]).

Существует КДЧ x такое, что $\forall k (x \in \alpha_k^o \triangle \beta_k^o)$. Можно построить НЧ i_1 и i_2 так, что $\text{Э}_n(\Phi_{i_1}) = \text{Э}_\lambda(\Phi_{i_2})$ и $x \in \text{Э}_\lambda(\Phi_{i_1}) \triangle \text{Э}_n(\Phi_{i_2})$ (см.[2], стр.461). Но последнее противоречит ввиду способа определения КДЧ x тому, что для всякого НЧ k имеем (24).

Итак, (21) доказано.

Пусть $\mathcal{F}$ линейный фунционал в L_x, построенный на основании f по лемме 3. Тогда выполнено (1).

Предположим, что $\mathcal{F}$ является функционалом "интегрального типа". Тогда существует $\{F_n\}_n \in L_p$ так, что (17) (см. лемму 4). Ввиду того, что функция f является тоже неопределенным интегралом от $\{\sum_{i=1}^{\lambda_{k_0}\cdot n} G_i\}_n$, получаем по теореме 2 из [8] $\{F_n\}_n = \{\sum_{i=1}^{\lambda_{k_0}\cdot n} G_i\}_n$ и, следовательно, для всякого НЧ m для почти всех КДЧ x из сегмента Φ_m последовательность КДЧ $\{\vartheta(F_n x)\}_n$ сходится к $\vartheta(G_m x)$.

На основании части 3) леммы 1 из [8] знаем, что $|\{F_n\}_n|^p \in L_1$ и, следовательно, существует возрастающая последовательность НЧ $\{k_n\}_n$ так, что $\{|F_{k_n}|_0^p\}_n \in L_1$. Пусть g неопределенный интеграл от $\{|F_{k_n}|_0^p\}_n$. Ввиду отмеченных выше свойств последовательности $\{F_n\}_n$ получаем по следствию теоремы 6 из [8]

(25) $\forall m x\,(x \in \Phi_m \supset g(x) - g(\exists_\lambda(\Phi_m)) =$
$= \tilde{\mathscr{E}}_{|G_m|_0^p}(x) - \tilde{\mathscr{E}}_{|G_m|_0^p}(\exists_\lambda(\Phi_m)))$.

Пусть l НЧ. Тогда, как знаем по части 2б) леммы 1 и по теореме 1 из [8], для всякой системы РЧ $\{a_i\}_{i=0}^{s}$, где $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_s = 1$, имеет место

$$\sum_{i=1}^{s} |(g(a_i) - \tilde{\mathscr{E}}_{|F_{k_{l+1}}|_0^p}(a_i)) - (g(a_{i-1}) - \tilde{\mathscr{E}}_{|F_{k_{l+1}}|_0^p}(a_{i-1}))| \le$$

$\le \int_0^1 |\{|F_{k_n}|_0^p\}_n - |F_{k_{l+1}}|_0^p| < \frac{1}{2^l}$. Существует НЧ m_l так, что для всякого НЧ m, $m_\ell \leq m$, полигональная функция $\widetilde{\mathscr{E}}_{|F_{\varkappa_{\ell+1}}|_0^r}$ линейна на сегменте Φ_m. Но тогда ввиду (25) и того, что имеет место

$$\forall x ((\ni_\lambda(\Phi_m) < x < \ni_\lambda(\Phi_m) + \frac{1}{4}\cdot|\Phi_m| \supset \widetilde{\mathscr{E}}_{|G_m|_0^r}(x) =$$

$$= \widetilde{\mathscr{E}}_{|G_m|_0^r}(\ni_\lambda(\Phi_m))) \& (\ni_\lambda(\Phi_m) + \frac{1}{4}\cdot|\Phi_m| < x < \ni_\lambda(\Phi_m) +$$

$$+ \frac{1}{4}\cdot|\Phi_m| + |\Phi_m|^2 \supset \widetilde{\mathscr{E}}_{|G_m|_0^r}(x) = \widetilde{\mathscr{E}}_{|G_m|_0^r}(\ni_\lambda(\Phi_m) + \frac{1}{4}\cdot|\Phi_m|) +$$

$$+ \frac{1}{|\Phi|}\cdot(x - \ni_\lambda(\Phi_m) - \frac{1}{4}\cdot|\Phi_m|)) \& (\ni_\lambda(\Phi_m) + \frac{1}{4}\cdot|\Phi_m| + |\Phi_m|^2 <$$

$$< x < \ni_n(\Phi_m) \supset \widetilde{\mathscr{E}}_{|G_m|_0^r}(x) = \widetilde{\mathscr{E}}_{|G_m|_0^r}(\ni_n(\Phi_m)))) ,$$

получаем для всякого НЧ m, $m_\ell \leq m$,

$$|(g(\ni_\lambda(\Phi_m) + \frac{1}{4}|\Phi_m|) - \widetilde{\mathscr{E}}_{|F_{\varkappa_{\ell+1}}|_0^r}(\ni_\lambda(\Phi_m) + \frac{1}{4}\cdot|\Phi_m|)) -$$

$$-(g(\ni_\lambda(\Phi_m)) - \widetilde{\mathscr{E}}_{|F_{\varkappa_{\ell+1}}|_0^r}(\ni_\lambda(\Phi_m)))| + |(g(\ni_\lambda(\Phi_m) + \frac{1}{4}\cdot|\Phi_m| + |\Phi_m|^2) -$$

$$-\widetilde{\mathscr{E}}_{|F_{\varkappa_{\ell+1}}|_0^r}(\ni_\lambda(\Phi_m) + \frac{1}{4}\cdot|\Phi_m| + |\Phi_m|^2)) - (g(\ni_\lambda(\Phi_m) + \frac{1}{4}\cdot|\Phi_m|) -$$

$$-\widetilde{\mathscr{E}}_{|F_{\varkappa_{\ell+1}}|_0^r}(\ni_\lambda(\Phi_m) + \frac{1}{4}\cdot|\Phi_m|))| + |(g(\ni_n(\Phi_m)) - \widetilde{\mathscr{E}}_{|F_{\varkappa_{\ell+1}}|_0^r}(\ni_n(\Phi_m))) -$$

$$-(g(\ni_\lambda(\Phi_m) + \frac{1}{4}\cdot|\Phi_m| + |\Phi_m|^2) - \widetilde{\mathscr{E}}_{|F_{\varkappa_{\ell+1}}|_0^r}(\ni_\lambda(\Phi_m) + \frac{1}{4}\cdot|\Phi_m| + |\Phi_m|^2))| =$$

$$= |y|\cdot\frac{1}{4}\cdot|\Phi_m| + |\frac{1}{|\Phi_m|} - y|\cdot|\Phi_m|^2 + |y|\cdot(|\Phi_m| - \frac{1}{4}\cdot|\Phi_m| -$$

$$-|\Phi_m|^2) \geq |y|\cdot|\Phi_m| - 2\cdot|y|\cdot|\Phi_m|^2 + |\Phi_m| \geq |\Phi_m| ,$$

где y КДЧ такое, что

$$\forall x (x \in \Phi_m \supset \widetilde{\mathscr{E}}_{|F_{\varkappa_{\ell+1}}|_0^r}(x) = \widetilde{\mathscr{E}}_{|F_{\varkappa_{\ell+1}}|_0^r}(\ni_\lambda(\Phi_m)) + y\cdot(x - \ni_\lambda(\Phi_m))) .$$

Таким образом имеем $\forall k\,(\sum_{i=m_2}^{m_2+k}|\Phi_i| < \frac{1}{2^k})$.

Видим, что из предположения, что $\mathcal{F}$ является функционалом "интегрального типа" следует сходимость ряда $\sum_m |\Phi_m|$. Однако ряд $\sum_m |\Phi_m|$ не сходится (см. пример 1 из [8]).

Пусть φ нормальный алгорифм, применимый к всякому НЧ, и такой, что $\varphi(1) \eqsim 0\gamma 1\sigma 1$ и для любого НЧ m, $1 < m$, имеет место $\varphi(m) \eqsim 0\gamma\frac{1}{2^k}\gamma\frac{2}{2^k}\ldots$ $\ldots\gamma 1\sigma P^{2j-2}-1\gamma 1 Q^{2^k-2j}$, где k и j НЧ, $1 \leq j \leq 2^{k-1}$ & & $m = 2^{k-1} + j$ & $P \eqsim 0\gamma$ & $Q \eqsim \gamma 0$ и для любых слова T и НЧ n по определению $T^0 \eqsim \Lambda$ & $T^n \eqsim T^{n-1}T$.

Для любых НЧ m_1 и m_2 имеем

$$\int_0^1 \frac{1}{\|\{\varphi(m_1)\}_m\|_{L_1}} \mathbin{\dot{}} (\varphi(m_1)\mathbin{\dot{}}\varphi(m_2)) = \begin{cases} 1, & \text{если } m_1 = m_2, \\ 0, & \text{если } m_1 \neq m_2. \end{cases}$$

<u>Замечание 5</u>. Для всяких НЧ k и j, где $1 \leq j \leq 2^k$, можно построить систему рациональных чисел $\{a_\ell\}_{\ell=1}^{2^k}$ так, что

$$0\gamma\frac{1}{2^k}\gamma\frac{2}{2^k}\ldots\gamma 1\sigma P^{j-1}1Q^{2^k-j} \mathrel{\bar{=}} \sum_{\ell=1}^{2^k} a_\ell \mathbin{\dot{}} \varphi(\ell)$$

и, следовательно, для любого ступенчатого д-остова G, где $G \eqsim 0\gamma\frac{1}{2^k}\gamma\frac{2}{2^k}\ldots\gamma 1\sigma y_1\gamma y_2\ldots\gamma y_{2^k}$, существует система КДЧ $\{w_i\}_{i=1}^{2^k}$ так, что $G \mathrel{\bar{=}} \sum_{i=1}^{2^k} w_i \mathbin{\dot{}} \varphi(i)$. В частности, для произвольной системы КДЧ $\{u_m\}_{m=1}^{2^k}$ и всякой всюду определенной конструктивной функции одной действительной переменной g существует система КДЧ $\{w_i^*\}_{i=1}^{2^k}$ так, что $g_\circ(\sum_{m=1}^{2^k} u_m \circ \varphi(m)) = \sum_{i=1}^{2^k} w_i^* \circ \varphi(i)$.

<u>Обозначение</u>. Пусть f функция а $\{u_m\}_m$ последовательность КДЧ. Тогда посредством $B(f,\{u_m\}_m)$ обозначим $\forall m((m=1 \supset u_m = f(1)-f(0))\,\&\,(1<m \supset \exists k j\,(1 \le j \le 2^{k-1}\,\&$ $\&\, m = 2^{k-1}+j \,\&\, u_m = (f(\frac{2j}{2^k}) - 2f(\frac{2j-1}{2^k}) + f(\frac{2j-2}{2^k}))\cdot 2^{k-1})))$.

<u>Замечание 6</u>. Пусть p РЧ, $1 \le p$, f функция а $\{u_m\}_m$ последовательность КДЧ такие, что $B(f,\{u_m\}_m)$. Тогда, как можно убедиться прямым подсчетом, выполнено

$$(26)\ \forall k(\|\{\sum_{m=1}^{2^k} u_m \circ \varphi(m)\}_n\|_{L_p} = (\sum_{i=1}^{2^k} |f(\tfrac{i}{2^k}) - f(\tfrac{i-1}{2^k})|^p \cdot 2^{k(p-1)})^{1/p})$$

и, если $\mathcal{F}$ линейный функционал такой, что (1), то

$$\forall m(u_m = \mathcal{F}(\{\frac{1}{\|\{\varphi(m)\}_n\|_{L_1}} \circ \varphi(m)\}_n)) .$$

<u>Теорема 4</u>. Пусть p РЧ, $1 \le p$, f функция а $\{u_m\}_m$ последовательность КДЧ такие, что $B(f,\{u_m\}_m)$. Тогда: 1) Если ряд $\sum_m u_m \circ \varphi(m)$ сходится в L_p к $\{F_n\}_n$, то неубывающая последовательность КДЧ

$$(27)\quad \{(\sum_{i=1}^{2^n} |f(\tfrac{i}{2^n}) - f(\tfrac{i-1}{2^n})|^p \cdot 2^{n(p-1)})^{1/p}\}_n$$

сходится к $\|\{F_n\}_n\|_{L_p}$ и функция f является неопределенным интегралом от $\{F_n\}_n$.

2) Если $1 < p$ и сходится последовательность КДЧ (27), то ряд $\sum_m u_m \circ \varphi(m)$ сходится в L_p.

Пример 2 показывает, что для $p = 1$ утверждение 2) не имеет места (см. свойства функции f_1 и часть 1 теоремы 4).

<u>Доказательство теоремы 4</u>. 1) Пусть ряд $\sum_m u_m \circ \varphi(m)$ сходится в L_p к $\{F_n\}_n$. Тогда ввиду (26) легко при помощи неравенства Минковского доказать, что последовательность КДЧ (27) сходится к $\|\{F_n\}_n\|_{L_p}$.

На основании наших предположений существует возрастающая последовательность НЧ $\{k_n\}_n$ так, что $\{\sum_{m=1}^{2^{k_n}} u_m \circ \varphi(m)\}_n \in L_p$ и, очевидно, $\{F_n\}_n = \{\sum_{m=1}^{2^{k_n}} u_m \circ \varphi(m)\}_n$. Ввиду непрерывности функции f и неопределенного интеграла от $\{F_n\}_n$ достаточно для завершения доказательства 1) показать, что

$$\forall l i \left(1 \leq i \leq 2^l \supset \int_{\frac{i-1}{2^l}}^{\frac{i}{2^l}} \{F_n\}_n = f\left(\frac{i}{2^l}\right) - f\left(\frac{i-1}{2^l}\right)\right).$$

Пусть l и i НЧ такие, что $1 \leq i \leq 2^l$. По следствию теоремы 6 из [8] знаем, что $\int_{\frac{i-1}{2^l}}^{\frac{i}{2^l}} \{F_n\}_n = \int_{\frac{i-1}{2^l}}^{\frac{i}{2^l}} \{\sum_{m=1}^{2^{k_n}} u_m \circ \varphi(m)\}_n$. Пусть G ступенчатый остов такой, что $(i = 1 \supset G \mathrel{\text{x}} 0 \gamma \frac{1}{2^l} \gamma 1 \delta 1 \gamma 0) \& (1 < i < 2^l \supset G \mathrel{\text{x}} 0 \gamma \frac{i-1}{2^l} \gamma \frac{i}{2^l} \gamma 1 \delta 0 \gamma 1 \gamma 0) \& (i = 2^l \supset G \mathrel{\text{x}} 0 \gamma \frac{2^l-1}{2^l} \gamma 1 \delta 0 \gamma 1)$.

Тогда по следствию теоремы 6 из [8] $\int_{\frac{i-1}{2^l}}^{\frac{i}{2^l}} \{\sum_{m=1}^{2^{k_n}} u_m \circ \varphi(m)\}_n = \int_0^1 G \cdot \{\sum_{m=1}^{2^{k_n}} u_m \circ \varphi(m)\}_n$. Заметим, что по определению

$$\int_0^1 G\cdot\{\sum_{m=1}^{2^{k_m}}{}^{\circ}\, u_m \,\dot{\circ}\, \varphi(m)\}_n = \int_0^1\{\sum_{m=1}^{2^{k}\tau(\sigma(G))+n}{}^{\circ}\, u_m \,\dot{\circ}\,(G \,\dot{\circ}\, \varphi(m))\}_m$$

и последний интеграл является пределом последовательности КДЧ $\{\sum_{m=1}^{2^{k}\tau(\sigma(G))+n} u_m \cdot {}^{\circ}\!\int_0^1 G \,\dot{\circ}\, \varphi(m)\}_m$. Ввиду того, что очевидно $\forall m({}^{\circ}\!\int_0^1 G \dot{\circ} \varphi(m) = \int_{\frac{i-1}{2^\ell}}^{\frac{i}{2^\ell}} \varphi(m) \& (2^\ell < m \supset {}^{\circ}\!\int_0^1 G \,\dot{\circ}\, \varphi(m) = 0))$,

имеем $\int_{\frac{i-1}{2^\ell}}^{\frac{i}{2^\ell}}\{F_n\}_n = {}^{\circ}\!\int_{\frac{i-1}{2^\ell}}^{\frac{i}{2^\ell}} \sum_{m=1}^{2^\ell}{}^{\circ}\, u_m \,\dot{\circ}\, \varphi(m)$.

Нам, таким образом, достаточно показать, что для любых НЧ i и ℓ, $1 \leq i \leq 2^\ell$, выполнено

(28) $$\quad {}^{\circ}\!\int_{\frac{i-1}{2^\ell}}^{\frac{i}{2^\ell}} \sum_{m=1}^{2^\ell}{}^{\circ}\, u_m \,\dot{\circ}\, \varphi(m) = f(\frac{i}{2^\ell}) - f(\frac{i-1}{2^\ell}) \quad .$$

а) Пусть $\ell = 1$. Тогда ${}^{\circ}\!\int_{\frac{i-1}{2^\ell}}^{\frac{i}{2^\ell}} \sum_{m=1}^{2^\ell}{}^{\circ}\, u_m \,\dot{\circ}\, \varphi(m) = \frac{1}{2}\, u_1 + (-1)^i \cdot$

$$\cdot \frac{1}{2}\cdot u_2 = \frac{1}{2}(f(1) - f(0) + (-1)^i (f(1) - 2f(\frac{1}{2}) + f(0))) = f(\frac{i}{2^\ell}) - f(\frac{i-1}{2^\ell}) .$$

б) Пусть ℓ и j НЧ, $1 \leq j \leq 2^{\ell+1}$, и пусть для всех НЧ i , для которых выполнено $1 \leq i \leq 2^\ell$, имеет место (28). Заметим, что для всякого такого j конструктивная функция $\vartheta_{\sum_{m=1}^{2^\ell}{}^{\circ} u_m \dot{\circ} \varphi(m)}$ определена и постоянна внутри сегмента $\frac{j-1}{2^{\ell+1}} \Delta \frac{j}{2^{\ell+1}}$. Следовательно, если i НЧ такое, что $\frac{j-1}{2^{\ell+1}} \Delta \frac{j}{2^{\ell+1}} \subset \frac{i-1}{2^\ell} \Delta \frac{i}{2^\ell}$, то $1 \leq i \leq 2^\ell$ и

$$\begin{aligned}
{}^{\circ}\!\int_{\frac{j-1}{2^{\ell+1}}}^{\frac{j}{2^{\ell+1}}} \sum_{m=1}^{2^{\ell+1}}{}^{\circ}\, u_m \,\dot{\circ}\, \varphi(m) &= \frac{1}{2}\cdot {}^{\circ}\!\int_{\frac{i-1}{2^\ell}}^{\frac{i}{2^\ell}} \sum_{m=1}^{2^\ell}{}^{\circ}\, u_m \,\dot{\circ}\, \varphi(m) + \\
&+ {}^{\circ}\!\int_{\frac{j-1}{2^{\ell+1}}}^{\frac{j}{2^{\ell+1}}} u_{2^\ell+i} \,\dot{\circ}\, \varphi(2^\ell + i) = \frac{1}{2}\cdot(f(\frac{i}{2^\ell}) - f(\frac{i-1}{2^\ell})) + \\
&+ {}^{\circ}\!\int_{\frac{j-1}{2^{\ell+1}}}^{\frac{j}{2^{\ell+1}}} u_{2^\ell+i} \,\dot{\circ}\, \varphi(2^\ell + i) \quad .
\end{aligned}$$

Последний интеграл равен $\frac{1}{2}\cdot(f(\frac{2i}{2^{l+1}})-2f(\frac{2i-1}{2^{l+1}})+f(\frac{2i-2}{2^{l+1}}))$, если $j=2i$ и $-\frac{1}{2}\cdot(f(\frac{2i}{2^{l+1}})-2f(\frac{2i-1}{2^{l+1}})+f(\frac{2i-2}{2^{l+1}}))$, если $j=2i-1$. В обоих случаях

$$\int_{\frac{j-1}{2^{l+1}}}^{\frac{j}{2^{l+1}}}\sum_{m=1}^{2^{l+1}}{}_{\circ}\, u_m \mathbin{\dot{\circ}} \varphi(m) = f(\frac{j}{2^{l+1}})-f(\frac{j-1}{2^{l+1}}) .$$

2) Пусть последовательность КДЧ (27) сходится к v_0. Пусть c_p РЧ такое, что $(2\leq p \supset c_p = 2^{2-p})\,\&\,(1<p<2\supset c_p = \min((2^p-1-p)\cdot(2^{p-1}-1), \frac{1}{2}p\cdot(p-1)\cdot 2^{p-2}))$.
Имеем $0<c_p\leq 1$.

Пусть n НЧ. Существует НЧ s_0 так, что для всякого НЧ l, $2^{s_0}<l$, имеет место

$$0\leq \|\{\sum_{m=1}^{l}{}_{\circ}\, u_m \mathbin{\dot{\circ}} \varphi(m)\}_n\|_{L_p}^p - \|\{\sum_{m=1}^{2^{s_0}}{}_{\circ}\, u_m \mathbin{\dot{\circ}} \varphi(m)\}_n\|_{L_p}^p =$$

$$=(\sum_{j=1}^{2(l-2^k)}|f(\frac{j}{2^{k+1}})-f(\frac{j-1}{2^{k+1}})|^p\cdot 2^{(k+1)(p-1)}+\sum_{j=l-2^k+1}^{2^k}|f(\frac{j}{2^k})-f(\frac{j-1}{2^k})|^p\cdot$$

$$\cdot 2^{k\cdot(p-1)})-\sum_{j=1}^{2^{s_0}}|f(\frac{j}{2^{s_0}})-f(\frac{j-1}{2^{s_0}})|^p\cdot 2^{s_0(p-1)}\leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{2^{k+1}}|f(\frac{j}{2^{k+1}})-f(\frac{j-1}{2^{k+1}})|^p\cdot 2^{(k+1)(p-1)}-$$

$$-\sum_{j=1}^{2^{s_0}}|f(\frac{j}{2^{s_0}})-f(\frac{j-1}{2^{s_0}})|^p\cdot 2^{s_0(p-1)}<$$

$$<\frac{c_p}{(v_0+1)\cdot 2^{2(pn+1)}},$$

где k НЧ такое, что $2^k<l\leq 2^{k+1}$.

Покажем, что для любого НЧ i имеет место

$$(29)\quad \|\{\sum_{m=2^{s_0}+1}^{2^{s_0}+i}{}_{\circ}\, u_m \mathbin{\dot{\circ}} \varphi(m)\}_n\|_{L_p}<\frac{1}{2^n} .$$

На основании замечания 5 знаем, что существует система КДЧ $\{w_j^*\}_{j=1}^{2^{k_0}}$ такая, что

$$[|\sum_{j=1}^{2^{k_0}}{}_{\circ}\, u_j \mathbin{\dot{\circ}} \varphi(j)|^{p-2}\cdot(\sum_{j=1}^{2^{k_0}} u_j \mathbin{\dot{\circ}} \varphi(j))] =_{\circ} \sum_{j=1}^{2^{k_0}}{}_{\circ}\, w_j^* \mathbin{\dot{\circ}} \varphi(j)$$

(под $[\,|F|^{p-2}\cdot F\,]$ понимаем $g_{\circ}(F)$, где g всюду определенная конструктивная функция, для которой имеет место $g(0)=0 \,\&\, \forall x\,(x \neq 0 \supset g(x) = |x|^{p-2}\cdot x\,)$).

Но тогда

$$(30)\quad \int_0^1 [|\sum_{j=1}^{2^{k_0}}{}_{\circ}\, u_j \mathbin{\dot{\circ}} \varphi(j)|^{p-2}\cdot(\sum_{j=1}^{2^{k_0}}{}_{\circ}\, u_j \mathbin{\dot{\circ}} \varphi(j))] \mathbin{\dot{\circ}} (\sum_{m=2^{k_0}+1}^{2^{k_0}+i} u_m \mathbin{\dot{\circ}}$$

$$\mathbin{\dot{\circ}} \varphi(m)) = \sum_{j=1}^{2^{k_0}} w_j^* \cdot \sum_{m=2^{k_0}+1}^{2^{k_0}+i} u_m \cdot \int_0^1 \varphi(j) \mathbin{\dot{\circ}} \varphi(m) = 0 \,.$$

а) $2 \leq p$. Тогда, как можно убедиться при помощи стандартных оценок, для всяких КДЧ x и y выполнено $|x+y|^p \geq |x|^p + p\cdot|x|^{p-2}\cdot x\cdot y + c_p\cdot|y|^p$.

Следовательно, $\frac{c_p}{2^{pn}} > \|\{\sum_{m=1}^{2^{k_0}+i}{}_{\circ}\, u_m \mathbin{\dot{\circ}} \varphi(m)\}_n\|_{L_p}^p - \|\{\sum_{m=1}^{2^{k_0}}{}_{\circ}\, u_m \mathbin{\dot{\circ}}$ $\varphi(m)\}_n\|_{L_p}^p = \int_0^1 |\sum_{m=1}^{2^{k_0}+i}{}_{\circ}\, u_m \mathbin{\dot{\circ}} \varphi(m)|_{\circ}^p - \int_0^1 |\sum_{m=1}^{2^{k_0}}{}_{\circ}\, u_m \mathbin{\dot{\circ}} \varphi(m)|_{\circ}^p \geq p\,\cdot$

$$\cdot \int_0^1 [|\sum_{j=1}^{2^{k_0}}{}_{\circ}\, u_j \mathbin{\dot{\circ}} \varphi(j)|^{p-2}\cdot(\sum_{j=1}^{2^{k_0}}{}_{\circ}\, u_j \mathbin{\dot{\circ}} \varphi(j))] \mathbin{\dot{\circ}} \sum_{m=2^{k_0}+1}^{2^{k_0}+i} u_m \mathbin{\dot{\circ}} \varphi(m) +$$

$$+ c_p\cdot \int_0^1 |\sum_{m=2^{k_0}+1}^{2^{k_0}+i} u_m \mathbin{\dot{\circ}} \varphi(m)|_{\circ}^p = c_p\cdot \int_0^1 |\sum_{m=2^{k_0}+1}^{2^{k_0}+i} u_m \mathbin{\dot{\circ}} \varphi(m)|_{\circ}^p =$$

$$= c_p\cdot \|\{\sum_{m=2^{k_0}+1}^{2^{k_0}+i}{}_{\circ}\, u_m \mathbin{\dot{\circ}} \varphi(m)\}_n\|_{L_p}^p \,.$$

Но тогда $\|\{\sum_{m=2^{k_0}+1}^{2^{k_0}+i}{}_{\circ}\, u_m \mathbin{\dot{\circ}} \varphi(m)\}_n\|_{L_p}^p < \frac{1}{2^{p\cdot n}}$ и получаем (29).

б) $1 < p < 2$. Тогда для всяких КДЧ x и y выполнено

$$|x+y|^p \geqslant \begin{cases} |x|^p + p\cdot y\cdot [|x|^{p-2}\cdot x] + c_p |y|^p & \text{если } |x| \leq |y| \text{ и} \\ |x|^p + p\cdot y\cdot [|x|^{p-2}\cdot x] + c_p y^2\cdot |x|^{p-2} & \text{если } |x| > |y| . \end{cases}$$

Не может не существовать система неперекрывающихся сегментов $\{a_i \Delta b_i\}_{i=1}^{s_1+s_2}$, где s_1 и s_2 целые неотрицательные числа и $0 < s_1 + s_2$, такая, что объединением сегментов этой системы является сегмент $0 \Delta 1$ и выполнено $\forall x y z j (x \simeq \vartheta((\sum_{m=1}^{2^{s_0}}{}_\circ u_m \circ \varphi(m))z) \& y \simeq$
$\simeq \vartheta((\sum_{m=2^{s_0}+1}^{2^{s_0}+i}{}_\circ u_m \circ \varphi(m))z) \& 1 \leq j \leq s_1 + s_2 \& a_j < z < b_j \supset$
$\supset (1 \leq j \leq s_1 \supset |x| \leq |y|) \& (s_1 + 1 \leq j \leq s_1 + s_2 \supset |y| < |x|))$.

Имеем

$$\frac{c_p}{(v_0+1)\cdot 2^{2(pn+1)}} > \|\{\sum_{m=1}^{2^{s_0}+i}{}_\circ u_m \circ \varphi(m)\}_n\|_{L_p}^p - \|\{\sum_{m=1}^{2^{s_0}}{}_\circ u_m \circ \varphi(m)\}_n\|_{L_p}^p \geqslant$$

$$\geqslant p \cdot {}^\circ\!\!\int_0^1 [|\sum_{j=1}^{2^{s_0}}{}_\circ u_m \circ \varphi(m)|^{p-2} \circ (\sum_{j=1}^{2^{s_0}}{}_\circ u_m \circ \varphi(m))] \circ \sum_{m=2^{s_0}+1}^{2^{s_0}+i}{}_\circ u_m \circ \varphi(m) +$$

$$+ c_p (\sum_{j=1}^{s_1} {}^\circ\!\!\int_{a_j}^{b_j} |\sum_{m=2^{s_0}+1}^{2^{s_0}+i} u_m \circ \varphi(m)|_\circ^p +$$

$$+ \sum_{j=s_1+1}^{s_1+s_2} {}^\circ\!\!\int_{a_j}^{b_j} (\sum_{m=2^{s_0}+1}^{2^{s_0}+i}{}_\circ u_m \circ \varphi(m))^2 \circ |\sum_{m=1}^{2^{s_0}}{}_\circ u_m \circ \varphi(m)|^{p-2}) .$$

Ввиду этого и (30) выполнено $\sum_{j=s_1+1}^{s_1+s_2} {}^\circ\!\!\int_{a_j}^{b_j} |\sum_{m=2^{s_0}+1}^{2^{s_0}+i}{}_\circ u_m \circ \varphi(m)|_\circ^p \leq$

$$\leq \sum_{j=s_1+1}^{s_1+s_2} {}^\circ\!\!\int_{a_j}^{b_j} |\sum_{m=1}^{2^{s_0}}{}_\circ u_m \circ \varphi(m)|_\circ^{p-1} \circ |\sum_{m=2^{s_0}+1}^{2^{s_0}+i}{}_\circ u_m \circ \varphi(m)|_\circ \leq$$

$$\leq \sum_{j=s_1+1}^{s_1+s_2} ({}^\circ\!\!\int_{a_j}^{b_j} |\sum_{m=1}^{2^{s_0}}{}_\circ u_m \circ \varphi(m)|_\circ^p)^{1/2} \cdot ({}^\circ\!\!\int_{a_j}^{b_j} (\sum_{m=2^{s_0}+1}^{2^{s_0}+i}{}_\circ u_m \circ \varphi(m))^2 \circ$$

$$\circ |\sum_{m=1}^{2^{s_0}}{}_\circ u_m \circ \varphi(m)|_\circ^{p-2})^{1/2} \leq (\sum_{j=s_1+1}^{s_1+s_2} {}^\circ\!\!\int_{a_j}^{b_j} |\sum_{m=1}^{2^{s_0}}{}_\circ u_m \circ \varphi(m)|_\circ^p)^{1/2} \cdot (\sum_{j=s_1+1}^{s_1+s_2} {}^\circ\!\!\int_{a_j}^{b_j} (\sum_{m=2^{s_0}+1}^{2^{s_0}+i}{}_\circ u_m \circ$$

$$\circ \varphi(m))^2 \circ |\sum_{m=1}^{2^{s_0}}{}_\circ u_m \circ \varphi(m)|_\circ^{p-2})^{1/2} \leq (v_0+1)^{1/2} \cdot \frac{1}{c_p^{1/2}} \cdot \frac{c_p^{1/2}}{(v_0+1)^{1/2} 2^{pn+1}} = \frac{1}{2^{pn+1}} .$$

Таким образом

$$\|\{\sum_{m=2^{s_0}+1}^{2^{s_0}+i}{}^{\circ}\, u_m \circ \varphi(m)\}_n\|_{L_p}^p = \sum_{j=1}^{s_1} {}^{\circ}\!\int_{a_j}^{b_j} |\sum_{m=2^{s_0}+1}^{2^{s_0}+i}{}^{\circ}\, u_m \circ \varphi(m)|_0^p + $$
$$+ \sum_{j=s_1+1}^{s_1+s_2} {}^{\circ}\!\int_{a_j}^{b_j} |\sum_{m=2^{s_0}+1}^{2^{s_0}+i}{}^{\circ}\, u_m \circ \varphi(m)|_0^p < \frac{1}{c_p} \cdot \frac{c_p}{(v_0+1)\cdot 2^{2(pn+1}} +$$
$$+ \frac{1}{2^{pn+1}} < \frac{1}{2^{pn}} \quad .$$

Итак, не может не быть (29). Ввиду того, что двойное отрицание можно с неравенства снять (см.[2],стр.106), опять имеем (29).

На основании теорем 2 и 4,лемм 3 и 4 и замечания 3 сразу получаем

<u>Теорема 5</u>. Пусть p и q РЧ, $1<q \mathbin{\&} \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\mathcal{F}$ линейный функционал в L_q а КДЧ z норма функционала $\mathcal{F}$. Тогда можно построить $\{F_n\}_n \in L_p$ так, что $\forall \varkappa (\varkappa \in L_q \supset \mathcal{F}(\varkappa) = \int_0^1 (\{F_n\}_n \cdot \varkappa) \mathbin{\&} \|\{F_n\}_n\|_{L_p} = z$.

Видим, что линейный функционал в L_q, где q РЧ и $1<q$, имеет норму тогда и только тогда, когда является функционалом "интегрального типа" (см. лемму 4 и теорему 5). Для линейных функционалов в L_1 такое утверждение не имеет места (см. примеры 2 и 3).

Непосредственным следствием теоремы 4 является

<u>Теорема 6</u>. Пусть p РЧ, $1<p$. Функция f является неопределенным интегралом от элемента L_p тогда и только тогда, когда сходится неубывающая последовательность КДЧ

(31) $$\{\sum_{i=1}^{2^n} |f(\frac{i}{2^n}) - f(\frac{i-1}{2^n})|^p \cdot 2^{n(p-1)}\}_n$$

Заметим, что ограниченность последовательности (31) не является достаточным условием для того, чтобы функция

f была неопределенным интегралом от элемента L_p, даже если ограничимся классом абсолютно непрерывных на $0 \Delta 1$ функций (см. пример 4). Классическое доказательство соответствующей теоремы (см. например [4], стр. 85) основано на лемме Фату, которая, как показывает пример 1 из [8] не верна в конструктивной математике.

<u>Теорема 7</u>. Для всякого РЧ p, $1 \leq p$, последовательность ступенчатых остовов $\{\varphi(m)\}_m$ является базисом в нормированном пространстве $(L_p, \| \quad \|_{L_p})$. Действительно, пусть $\{F_n\}_n \in L_p$ а $\{u_m\}_m$ последовательность КДЧ такая, что

$$(32) \qquad \forall m \left(u_m = \int_0^1 \left(\frac{1}{\|\{\varphi(m)\}_n\|_{L_1}} \circ \varphi(m)\right) \cdot \{F_n\}_n\right).$$

Тогда ряд $\sum\limits_m u_m \circ \varphi(m)$ сходится в L_p к $\{F_n\}_m$.

<u>Замечание 6</u>. Ввиду того, что для всяких НЧ m_1 и m_2 имеет место

$$(m_1 = m_2 \supset \int_0^1 \varphi(m_1) \circ \varphi(m_2) = \|\{\varphi(m_1)\}_n\|_{L_1}) \& (m_1 \neq m_2 \supset \int_0^1 \varphi(m_1) \circ \varphi(m_2) = 0),$$

получаем на основании предположения, что ряд $\sum\limits_m u_m \circ \varphi(m)$ сходится в L_p к $\{F_n\}_n$, сразу (32).

<u>Доказательство теоремы 7</u>. Ввиду теорем 4 и 6 достаточно ограничиться случаем, когда $p = 1$.

Пусть $\{G_n\}_n \in L_1$ и пусть функция g является неопределенным интегралом от $\{G_n\}_n$. Тогда, как знаем по теореме 1 из [8], КДЧ $\int_0^1 |\{G_n\}_n|$ является вариацией функции g на сегменте $0 \Delta 1$. Пусть $\{v_m\}_m$ последовательность КДЧ такая, что

$$\forall m \left(v_m = \int_0^1 \left(\frac{1}{\|\{\varphi(m)\}_m\|_{L_1}} \mathbin{\dot{\circ}} \varphi(m) \right) \cdot \{G_n\}_n \right) .$$

Тогда, как можно убедиться прямым подсчетом, выполнено

$\|\{v_1 \cdot \varphi(1)\}_n\|_{L_1} = |g(1) - g(0)| \le \int_0^1 |\{G_n\}_n|$ и для всякого НЧ ℓ, $1 < \ell$, $\|\{\sum_{m=1}^{\ell} v_m \varphi(m)\}_n\|_{L_1} = \sum_{j=1}^{2\cdot(\ell-2^{k-1})} |g(\frac{j}{2^k}) - g(\frac{j-1}{2^k})| +$

$$+ \sum_{j=\ell-2^{k-1}+1}^{2^{k-1}} |g(\frac{j}{2^{k-1}}) - g(\frac{j-1}{2^{k-1}})| \le \int_0^1 |\{G_n\}_n| ,$$

где k НЧ такое, что $2^{k-1} < \ell \le 2^k$.

Пусть $\{F_n\}_n \in L_1$ а $\{u_m\}_m$ последовательность КДЧ такая, что (32). Пусть ℓ НЧ. Как знаем по части 2б) леммы 1 из [8], существует ступенчатый д-остов H для которого выполнено $\int_0^1 |\{F_n\}_n - H| = \|\{F_n\}_n - H\|_{L_1} < \frac{1}{2^{\ell+1}}$.

К остову H можно на основании замечания 5 построить НЧ k и систему КДЧ $\{w_m\}_{m=1}^{2^k}$ так, что $H \mathrel{\overline{\overline{\circ}}}$ $\mathrel{\overline{\overline{\circ}}} \sum_{m=1}^{2^k}{}^{\circ} w_m \mathbin{\dot{\circ}} \varphi(m)$. Положим $\forall m (2^k < m \supset w_m \rightleftharpoons 0)$.

Тогда для всякого НЧ i ввиду аддитивности интеграла имеем $\|\{F_n\}_n - \sum_{m=1}^{2^k+i}{}^{\circ} u_m \mathbin{\dot{\circ}} \varphi(m)\|_{L_1} \le$

$$\le \|\{F_n\}_n - H\|_{L_1} + \|\{H \mathbin{\overline{\circ}} \sum_{m=1}^{2^k+i}{}^{\circ} u_m \mathbin{\dot{\circ}} \varphi(m)\}_n\|_{L_1} =$$

$$= \|\{F_n\}_n - H\|_{L_1} + {}^{\circ}\!\!\int_0^1 |\sum_{m=1}^{2^k+i}{}^{\circ} (u_m - w_m) \mathbin{\dot{\circ}} \varphi(m)|_{\circ} =$$

$$= \|\{F_n\}_n - H\|_{L_1} + {}^{\circ}\!\!\int_0^1 |\sum_{m=1}^{2^k+i}{}^{\circ} \left(\int_0^1 \left(\frac{1}{\|\{\varphi(m)\}_n\|_{L_1}} \mathbin{\dot{\circ}} \varphi(m) \right) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot (\{F_n\}_n - H) \right) \mathbin{\dot{\circ}} \varphi(m)|_{\circ} \le 2 \cdot \|\{F_n\}_n - H\|_{L_1} < \frac{1}{2^{\ell}} .$$

Литература

[1] А. МАРКОВ: Теория алгорифмов, Труды мат.инст.им.В. А. Стеклова,том XLII (1954).

[2] - Проблемы конструктивного направления в математике, 2(сборник работ), Труды мат.инст.им.В.А. Стеклова,том LXVII (1962).

[3] - Труды Третьего всесоюзного съезда,том 1,Москва, 1956.

[4] Ф. РИСС, Б.С. НАДЬ: Лекции по функциональному анализу, Москва, 1954.

[5] О. ДЕМУТ: Интеграл Лебега в конструктивном анализе, Записки научных семинаров Ленинградского отд.мат.инст.им.В.А. Стеклова,том 4(1967), 30-43.

[6] О. ДЕМУТ: Интеграл Лебега и понятие измеримости функций в конструктивном анализе, там же,том 8 (1968),21-8.

[7] О. ДЕМУТ: О дифференцируемости конструктивных функций, CMUC 10(1969), 167-175.

[8] О. ДЕМУТ: Пространства L_n и S в конструктивной математике, CMUC 10(1969),261-284.

(Oblatum April 15, 1969)