Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Osvald Demuth

О дифференцируемости конструктивных функций

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 10 (1969), No. 2, 167--175

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105224

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
10,2 (1969)

О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ КОНСТРУКТИВНЫХ ФУНКЦИЙ

Освальд ДЕМУТ (*Osvald DEMUTH*), Прага

В классической математике монотонные функции, функции ограниченной вариации и абсолютно непрерывные функции почти всюду дифференцируемы. В конструктивной математике дело обстоит не так. В настоящей заметке построена возрастающая на сегменте $0 \Delta 1$ конструктивная функция, которая удовлетворяет условию Липшица, но не является дифференцируемой ни в одной точке сегмента $0 \Delta 1$.

Как известно из [2], абсолютно непрерывные конструктивные функции почти всюду дифференцируемы. (Конструктивная функция, удовлетворяющая условию Липшица, может не быть абсолютно непрерывной – см. [3], стр. 182.)

В следующем пользуемся определениями и результатами из [1], натуральными числами называем положительные целые числа, <u>точками</u> – вещественные дуплексы (см. [1], стр. 77), <u>функциями</u> – конструктивные функции одной действительной переменной, определенные в каждой точке сегмента $0 \Delta 1$, <u>покрытиями</u> – точные дизъюнктные сегментные покрытия сегмента $0 \Delta 1$ (см. [1], стр. 461-2), последовательностями конструктивных объектов определенного типа – нормальные алгорифмы, перерабатывающие всякое натуральное число в объект этого типа. Буквы k, m, n, p служат переменными для натуральных чисел, c, d - переменными для рациональных чисел а x, y - переменными для точек.

<u>Теорема</u>. Существует функция f такая, что

1) f возрастает на сегменте $0 \Delta 1$,

2) $\forall x y\ (x \in 0 \Delta 1 \ \& \ y \in 0 \Delta 1 \supset |f(x)-f(y)| \leq |x-y|)$ и

3) f не является дифференцируемой ни в одной точке сегмента $0 \Delta 1$.

Замечание. Из 3) и теоремы 1 из [2] следует, что f не является абсолютно непрерывной.

<u>Доказательство теоремы</u>. Пусть $\{\lambda_n\}_n$ возрастающая последовательность рациональных чисел из интервала $\frac{1}{2} \nabla 1$, которая не имеет конструктивного предела (см. [1], стр. 465-73). Для всякого натурального n определим $a_n \rightleftharpoons \lambda_n$, $a_{-n} \rightleftharpoons 1-\lambda_n$ и $a_0 \rightleftharpoons \frac{1}{2}$. Для произвольных целых чисел i и j выполнено $(i < j \supset 0 < a_i < a_j < 1)$. Монотонные последовательности рациональных чисел $\{a_n\}_n$ и $\{a_{-n}\}_n$ не имеют конструктивного предела и следовательно тем же свойством обладают и последовательности $\{a_{p_n}\}_n$ и $\{a_{-p_n}\}_n$, где $\{p_n\}_n$ произвольная возрастающая последовательность натуральных чисел.

Для любых функции g, покрытия Φ и последовательности целых чисел $\{j_n\}_n$ определим

$$A(g, \Phi, \{j_m\}_m) \rightleftarrows \forall m\, x\, (x \in \Phi_m \supset g(x) =$$
$$= g(\ni_\lambda(\Phi_m)) + a_{j_m} \cdot (x - \ni_\lambda(\Phi_m))) .$$

Функцию f будем строить при помощи следующей леммы.

<u>Лемма</u>. Пусть p натуральное число, g возрастающая на $0 \triangle 1$ функция, Φ покрытие, $\{j_m\}_m$ последовательность целых чисел а c рациональное число такое, что выполнено $A(g, \Phi, \{j_m\}_m) \& \forall m (|\Phi_m| < c)$. Тогда можно построить возрастающую на $0 \triangle 1$ функцию h, покрытие Ψ и последовательность целых чисел $\{l_k\}_k$ так, что

а) имеет место $A(h, \Psi, \{l_k\}_k)$;

б) для произвольного натурального m существуют натуральные числа k_1 и k_2 такие, что $\ni_n(\Psi_{k_1}) = \ni_\lambda(\Psi_{k_2}) \& \ni_\lambda(\Psi_{k_1}) \triangle \ni_n(\Psi_{k_2}) = \Phi_m \& l_{k_1} - |j_m| - p = j_m = l_{k_2} + 1$, и выполнено $h(\ni_\lambda(\Phi_m)) = g(\ni_\lambda(\Phi_m)) \& h(\ni_n(\Phi_m)) = g(\ni_n(\Phi_m))$,

в) $|h - g| < c$ и

г) $\forall x y (x \in 0 \triangle 1 \& y \in 0 \triangle 1 \supset |h(x) - h(y)| \leq |x - y|)$.

Доказательство леммы. Для всякого натурального числа m пусть

$$b_m \rightleftarrows \ni_\lambda(\Phi_m) + \frac{a_{j_m} - a_{j_m - 1}}{a_{j_m + |j_m| + p} - a_{j_m - 1}} \cdot |\Phi_m| \quad \text{и}$$

$$y_m \rightleftarrows g(\ni_\lambda(\Phi_m)) + a_{j_m + |j_m| + p} \cdot (b_m - \ni_\lambda(\Phi_m)) .$$

Очевидно имеем $\ni_\lambda(\Phi_m) < b_m < \ni_n(\Phi_m)$ и $y_m = g(\ni_n(\Phi_m)) + a_{j_m - 1} \cdot (b_m - \ni_n(\Phi_m))$.

Функцию h построим так, что для всяких натураль-

ного m и точки x выполнено $(x \in \partial_1(\Phi_m) \Delta b_m \supset$
$\supset h(x) = g(\partial_1(\Phi_m)) + a_{j_m+|j_m|+p} \cdot (x - \partial_1(\Phi_m)))\&$
$\& (x \in b_m \Delta \partial_n(\Phi_m) \supset h(x) = y_m + a_{j_m-1} \cdot (x - b_m))$.

Ввиду того, что g возрастает на $0 \Delta 1$ и что все a_i положительны, h несомненно возрастает на $0 \Delta 1$. Кроме того имеет место $\forall m x (x \in \Phi_m \supset |h(x)-$
$-g(x)| \leq |y_m - g(b_m)| < |g(\partial_n(\Phi_m)) - g(\partial_1(\Phi_m))| = a_{j_m} \cdot |\Phi_m| < c)$

и следовательно выполнено в).

Пусть Ψ последовательность сегментов а $\{\ell_k\}_k$ последовательность целых чисел такие, что для всякого натурального m выполнено $\Psi_{2m-1} \rightleftharpoons \partial_1(\Phi_m) \Delta b_m$ &
$\& \Psi_{2m} \rightleftharpoons b_m \Delta \partial_n(\Phi_m) \& \ell_{2m-1} = j_m + |j_m| + p \& \ell_{2m} = j_m - 1$.

Ввиду того, что Φ покрытие, Ψ является тоже покрытием. Очевидно выполнены части а) и б) утверждения.

г) следует из а) и того, что для всякого целого числа j имеет место $0 < a_j < 1$. Действительно, предположим, что для рациональных чисел c_0 и d_0 выполнено $0 < c_0 < d_0 < 1 \& \dfrac{h(d_0)-h(c_0)}{d_0 - c_0} > 1$. Тогда ввиду того, что имеет место $\forall x y\ (0 \leq y < x \leq 1 \&$

$$\& \frac{h(x)-h(y)}{x-y} > 1 \supset \left(\frac{h(x)-h(\frac{x+y}{2})}{x-\frac{x+y}{2}} > 1 \vee \frac{h(\frac{x+y}{2})-h(y)}{\frac{x+y}{2}-y} > 1\right)),$$

можно построить последовательность сегментов $\{c_m \Delta d_m\}_m$ такую, что

(1) $\forall m\, ((c_m \triangle d_m \subset c_{m-1} \triangle d_{m-1}) \,\&\, d_m - c_m =$

$= \frac{1}{2} \cdot (d_{m-1} - c_{m-1}) \,\&\, \frac{h(d_m) - h(c_m)}{d_m - c_m} > 1)$.

Существует точка x из интервала $0 \triangle 1$, для которой выполнено $\forall m\, (x \in c_m \triangle d_m)$. Ввиду того, что Ψ покрытие, можно построить натуральные числа p и q так, что $Э_n(\Psi_p) = Э_1(\Psi_q) \,\&\, Э_1(\Psi_p) < x < Э_n(\Psi_q)$. Но тогда для достаточно большого m имеет место $c_m \triangle d_m \subset Э_1(\Psi_p) \triangle Э_n(\Psi_q)$, и, следовательно, $|h(d_m) - h(c_m)| \leq max(|a_{\ell_p}|, |a_{\ell_q}|) \cdot |d_m - c_m| < |d_m - c_m|$, что противоречит (1). Таким образом, мы доказали, что выполнено $\forall c d\, (0 < c < d < 1 \supset |h(d) - h(c)| \leq |d - c|)$. Отсюда получаем ввиду непрерывности функции h на $0 \triangle 1$ (см.[1], стр.445) сразу г). Лемма доказана.

Построим последовательности возрастающих на $0 \triangle 1$ функций $\{f_n\}_n$, покрытий $\{\Phi^n\}_n$ и последовательностей целых чисел $\{\{j_m^n\}_m\}_n$.

Пусть Φ^1 покрытие а f_1 функция такие, что $\forall m\, (|\Phi_m^1| < \frac{1}{2}) \,\&\, \forall x\, (f_1(x) = \frac{1}{2} x)$. Тогда f_1 возрастает на сегменте $0 \triangle 1$ и выполнено $A(f_1, \Phi^1, \{0\}_m)$.

Пусть n натуральное число и пусть уже построены возрастающая на $0 \triangle 1$ функция f_n, покрытие Φ^n и последовательность целых чисел $\{j_m^n\}_m$ такие, что выполнено $A(f_n, \Phi^n, \{j_m^n\}_m) \,\&\, \forall m\, (|\Phi_m^n| < \frac{1}{2^n})$.

К n, f_n, Φ^n, $\{j_m^n\}_m$ и $\frac{1}{2^n}$ применим лемму. Построим возрастающую на $0 \Delta 1$ функцию f_{n+1}, покрытие Ψ и последовательность целых чисел $\{\ell_k\}_k$ такие, что $A(f_{n+1}, \Psi, \{\ell_k\}_k) \& |f_{n+1} - f_n| < \frac{1}{2^n}$ &
$\& \forall xy (x \in 0 \Delta 1 \& y \in 0 \Delta 1 \supset |f_{n+1}(x) - f_{n+1}(y)| \leq$
$\leq |x-y|) \& \forall m \exists p (\Psi_m \subset \Phi_p^n \& (\partial_1(\Psi_m) = \partial_1(\Phi_p^n) \&$
$\& \ell_m = j_p^n + |j_p^n| + n \vee \partial_n(\Psi_m) =$
$= \partial_n(\Phi_p^n) \& \ell_m = j_p^n - 1))$.

Последовательность сегментов

$$\{(\partial_1(\Psi_m) + \partial_1(\Phi_k^1) \cdot |\Psi_m|) \Delta (\partial_1(\Psi_m) + \partial_n(\Phi_k^1) \cdot |\Psi_m|)\}_{m,k}$$

образует покрытие, которое обозначим посредством Φ^{n+1}. Имеем $\forall k \exists mp (\Phi_k^{n+1} \subset \Psi_m \subset \Phi_p^n \& |\Phi_k^{n+1}| < \frac{1}{2}|\Psi_m| \leq \frac{1}{2}|\Phi_p^n| < \frac{1}{2^{n+1}})$ и следовательно существует последовательность целых чисел $\{j_m^{n+1}\}_m$ такая, что выполнено $A(f_{n+1}, \Phi^{n+1}, \{j_m^{n+1}\}_m)$ и

(2) $\forall kp (\Phi_k^{n+1} \subset \Phi_p^n \supset (j_k^{n+1} = j_p^n + |j_p^n| + n \vee j_k^{n+1} = j_p^n - 1))$.

Последовательность возрастающих на $0 \Delta 1$ функций $\{f_n\}_n$ равномерно сходится на $0 \Delta 1$. Ее предел обозначим посредством f. f является очевидно возрастающей на $0 \Delta 1$ функцией, для которой ввиду $\forall nxy (x \in 0 \Delta 1 \& y \in 0 \Delta 1 \supset |f_n(x) - f_n(y)| \leq |x-y|)$ выполнено 2).

Остается доказать часть 3 утверждения теоремы. Пусть x точка из $0\Delta 1$. Тогда не может не иметь место один из следующих трех случаев: I) $x = 1$, II) $\exists n m (x = \partial_\lambda(\Phi^n_m))$ и III) $\forall n \exists m (\partial_\lambda(\Phi^n_m) < x < \partial_n(\Phi^n_m))$. В каждом из этих случаев существует последовательность натуральных чисел $\{m_n\}_n$ такая, что $\forall n (x \in \Phi^n_{m_n} \& (\partial_n(\Phi^n_{m_n}) = 1 \vee x < \partial_n(\Phi^n_{m_n})))$. Для всякого натурального n выполнено $f(\partial_n(\Phi^n_{m_n})) - f(\partial_\lambda(\Phi^n_{m_n})) = f_n(\partial_n(\Phi^n_{m_n})) - f_n(\partial_\lambda(\Phi^n_{m_n})) = a_{j^n_{m_n}} \cdot |\Phi^n_{m_n}|$, где $|\Phi^n_{m_n}| < \frac{1}{2^n}$. Следовательно, если функция f имеет в точке x производную, то последовательность $\{a_{j^n_{m_n}}\}_n$ сходится к значению этой производной. Таким образом к завершению доказательства достаточно доказать, что последовательность $\{a_{j^n_{m_n}}\}_n$ не имеет конструктивного предела. Для этого - ввиду отмеченных в начале доказательства свойств последовательностей $\{a_n\}_n$ и $\{a_{-n}\}_n$ - достаточно доказать, что не может не существовать возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_k$ такая, что последовательность целых чисел $\{j^{n_k}_{m_{n_k}}\}_k$ является возрастающей или убывающей.

I) $x = 1$. Тогда ввиду способа конструкции последовательности покрытий $\{\Phi^n\}_n$ и ввиду части б) утверждения леммы имеем $\forall n (j^n_{m_n} = 1 - n)$ и следовательно последовательность $\{j^n_{m_n}\}_n$ является убывающей.

II) Пусть для натурального числа n_0 выполнено $x = \ni_\lambda(\Phi^{n_0}_{m_{n_0}})$. Тогда очевидно $\forall n (n_0 \leq n \supset x = \ni_\lambda(\Phi^n_{m_n}))$ и следовательно по отмеченным свойствам последовательности покрытий $\{\Phi^n\}_n$ имеет место $\forall n (n_0 \leq n \supset j^n_{m_n} < j^{n+1}_{m_{n+1}})$. Последовательность $\{j^{n_0+k}_{m_{n_0+k}}\}_k$ является возрастающей.

III) $\forall n (\ni_\lambda(\Phi^n_{m_n}) < x < \ni_n(\Phi^n_{m_n}))$. Тогда не может не иметь место один из следующих двух случаев.

α) Существует натуральное число n_0 такое, что $\forall n (n_0 \leq n \supset j^n_{m_n} \leq 0)$. Тогда на основании (2) имеем $\forall n (n_0 \leq n \supset j^{n+1}_{m_{n+1}} = j^n_{m_n} - 1)$ и $\{j^{n_0+k}_{m_{n_0+k}}\}_k$ убывающая последовательность.

β) Выполнено $\forall p \exists n (p \leq n \,\&\, j^n_{m_n} > 0)$. Тогда на основании (2) получаем $\forall p \exists n (p \leq n \,\&\, j^n_{m_n} \geq n)$ и следовательно существует возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_k$ такая, что последовательность $\{j^{n_k}_{m_{n_k}}\}_k$ возрастает.

Литература

[1] - Проблемы конструктивного направления в математике, 2(сборник работ),Труды мат.инст.им.В.А.Стеклова, том LXVII (1962).

[2] О. ДЕМУТ: Интеграл Лебега и понятие измеримости функций в конструктивном анализе, Записки научных семинаров Ленинградского отд.мат.инст.им. В.А.Стеклова, том 8(1968),21-28.

[3] - Труды Третьего всесоюзного математического съезда, том 1, Москва,1956.

(Received March 18, 1969)