Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Osvald Demuth

Заметка к работе: О теореме Фувини для интеграла Римана в конструктивной математике

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 10 (1969), No. 1, 115--120

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/105219`

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

10,1 (1969)

Заметка к работе: О ТЕОРЕМЕ ФУБИНИ ДЛЯ ИНТЕГРАЛА РИМАНА В КОНСТРУКТИВНОЙ МАТЕМАТИКЕ

О. ДЕМУТ, Прага

(O. DEMUTH, Praha)

В [2] доказано, что известный аналог теоремы Фубини для интеграла Римана не имеет в конструктивной математика места. Построенный там пример демонстрирует это на трехмерном случае. Естественно поставить вопрос, можно ли аналогичные примеры построить и для других размерностей. Для бо́льших размерностей решить задачу просто - достаточно в примере из [2] добавить соответствующее число фиктивных переменных. Для двумерного случая ответ дает настоящая заметка.

В следующем пользуемся определениями и результатами заметки [2] .

Обозначение: Для произвольных сегментов $a \triangle b$ и $c \triangle d$ обозначим посредством $a \triangle b \circ c \triangle d$ сегмент $(c + a \cdot (d - c)) \triangle (c + b \cdot (d - c))$.

<u>Теорема</u>: Существует интегрируемая по Риману 2-функция ${}^{\{2\}}\varphi$ такая, что для любого КДЧ x из сегмента $0 \triangle 1$ 1-функция $\widehat{{}^{\{2\}}\varphi_{x\,\square}}$ неинтегрируема по Риману.

<u>Доказательство</u>: Пусть $\{l_m\}_m$ возрастающая последовательность ЧЧ из доказательства теормеы 2 (из [2]), пусть Φ точное дизъюнктное сегментное рациональное

покрытие сегмента $0 \triangle 1$ такое, что $\forall m \left(\sum_{j=1}^{m} |\Phi_j|_1 < \frac{1}{2^i} \right)$ (см. [1], стр. 469).

Пусть n, k, i и t НЧ, для которых выполнено $2^{l_n+1} + 1 \leq k \leq 3 \cdot 2^{l_n} + 1 \;\&\; 1 \leq i \leq n$. Построим возрастающую систему НЧ $\{r_j\}_{j=1}^{2^{l_n-i-1}}$ и систему НЧ $\{s_j\}_{j=1}^{2^{l_n-i-1}}$ так, что первая из этих систем является системой первых 2^{l_n-i-1} НЧ r удовлетворяющих условию $2^{l_n-i} \cdot (2^i-2) \leq r < 2^{l_n-i} \cdot (2^i-1)$ и таких, что система 1-сегментов $\{\Phi_m \circ (1-\frac{1}{2^{i-1}}) \triangle (1-\frac{1}{2^i})\}_{m=1}^{t+1}$ покрывает 1-сегмент $\frac{r}{2^{l_n}} \triangle \frac{r+1}{2^{l_n}}$ меньше чем из одной шестнадцатой, а во второй системе для всякого j, $1 \leq j \leq 2^{l_n-i-1}$, s_j наименьшее из НЧ s, для которых выполнено $1 \leq s < 2^{l_{n+t}-l_n}$ и 1-сегмент $(\frac{r_j}{2^{l_n}} + \frac{s}{2^{l_{n+t}}}) \triangle (\frac{r_j}{2^{l_n}} + \frac{s+1}{2^{l_{n+t}}})$ не перекрывается ни с одним из 1-сегментов системы $\{\Phi_m \circ (1-\frac{1}{2^{i-1}}) \triangle (1-\frac{1}{2^i})\}_{m=1}^{t+1}$. Определим 2-функцию ${}^{\{2\}}\varphi_{n,k,i,t}$ так, что для всяких КДЧ x и y име место

$$
{}^{\{2\}}\varphi_{n,k,i,t}(x \square y) = \sum_{j=1}^{2^{l_n-i-1}} 2^{2l_{n+t}-i} \cdot \Big(\Big|x - \frac{k-2}{2^{l_n}} + 2\Big| - \Big|x - \frac{k-2}{2^{l_n}} + 2 - \frac{1}{2^{l_{n+t}+1}}\Big| - \Big|x - \frac{k}{2^{l_n}} + 2 + \frac{1}{2^{l_{n+t}+1}}\Big| + \Big|x - \frac{k}{2^{l_n}} + 2\Big| \Big) \cdot \Big(\Big|y - \frac{r_j}{2^{l_n}} - \frac{s_j}{2^{l_{n+t}}}\Big| + \Big|y - \frac{r_j}{2^{l_n}} - \frac{s_j+1}{2^{l_{n+t}}}\Big| - \Big|2y - \frac{2r_j}{2^{l_n}} - \frac{2s_j+1}{2^{l_{n+t}}}\Big| \Big) .
$$

Выполнено $0 \leq {}^{\{2\}}\varphi_{n,k,i,t} \leq \frac{1}{2^i}$ и ${}^{\{2\}}\varphi_{n,k,i,t}$ равномерно непрерывная 2-функция отличная от нулевой функции только внутри сегментов

$(\frac{k-2}{2^{l_n}}-2)\Delta(\frac{k}{2^{l_n}}-2)\square(\frac{r_j}{2^{l_n}}+\frac{s_j}{2^{l_{n+i}}})\Delta(\frac{r_j}{2^{l_n}}+\frac{s_j+1}{2^{l_{n+i}}})$, где $1 \leq j \leq 2^{l_n-i-1}$.
Для всякого такого j и для любого КДЧ x из сегмента $(\frac{k-\frac{7}{4}}{2^{l_n}}-2)\Delta(\frac{k-\frac{1}{4}}{2^{l_n}}-2)$ колебание 1-функции $\widehat{({}^{\{2\}}\wp_{n,k,i,t})_{x\square}}$ на сегменте $\frac{r_j}{2^{l_n}}\ \Delta\ \frac{r_j+1}{2^{l_m}}$ равно $\frac{1}{2^i}$. Сумма длин всех таких сегментов равна $\frac{1}{2^{i+1}}$. Следовательно, если x КДЧ из сегмента $(\frac{k-\frac{7}{4}}{2^{l_n}}-2)\Delta(\frac{k-\frac{1}{4}}{2^{l_n}}-2)$ а $\{\tau_m\}_m$ возрастающая последовательность НЧ такая, что $\tau_{2^{i+2}} < 2^{l_n}$, то имеет место $\neg R_1((\widehat{{}^{\{2\}}\wp_{n,k,i,t}})_{x\square}, \{\tau_m\}_m, 1)$.

Пусть ϑ_1 нормальный алгорифм такой, что для всяких НЧ p и t выполнено $(!\vartheta_1\llcorner p\square t\lrcorner \,\&\, (\vartheta_1\llcorner p\square t\lrcorner \neq \Lambda \supset$
$\supset \vartheta_1\llcorner p\square t+1\lrcorner \neq \Lambda) \,\&\, (\exists\tau\,(\vartheta_1\llcorner p\square\tau\lrcorner \neq \Lambda) \equiv$
$\equiv !\,\mathfrak{U}\llcorner p\square p\lrcorner) \,\&\, \vartheta_1\llcorner p\square 1\lrcorner \neq \Lambda)$
(см. [1], стр. 305). Для произвольных НЧ k, p и n пусть $Q_{k,p}(n) \rightleftharpoons (p \leq n \,\&\, 2^{l_n+1}+1 \leq k \leq 3\cdot 2^{l_n}+1)$ и пусть $\alpha_{k,p}$ целое число, для которого выполнено $((\exists\tau\, Q_{k,p}(\tau) \supset Q_{k,p}(\alpha_{k,p}))\,\&$
$\&\,(\neg\exists\tau\, Q_{k,p}(\tau)\supset \alpha_{k,p}=0))$. Заметим, что
$\forall k p m n\,(Q_{k,p}(m)\,\&\, Q_{k,p}(n)\supset m=n)$.

Переходим к постройке 2-функции ${}^{\{2\}}\varphi$. Пусть p и t натуральные числа. Определим 2-функцию ${}^{\{2\}}\varphi_{p,t}$ так, что

1) если выполнено $(\vartheta_1\llcorner p\square t\lrcorner \neq \Lambda \vee (1 < t \supset$

$\supset \vartheta_1 \llcorner n \square t-1 \lrcorner \equiv \Lambda) \vee (\vartheta_1 \llcorner n \square t \lrcorner \equiv \Lambda \supset \alpha_{\mathfrak{n} \llcorner n \square n \lrcorner, n} = 0))$

то ${}^{\{2\}}\varphi_{n,t}$ нулевая функция, и

2) если имеет место $(1 < t \;\&\; \vartheta_1 \llcorner n \square t-1 \lrcorner \not\equiv \Lambda \;\&\; \vartheta_1 \llcorner n \square t \lrcorner \equiv$ $\equiv \Lambda \;\&\; 0 < \alpha_{\mathfrak{n} \llcorner n \square n \lrcorner, n})$, определим ${}^{\{2\}}\varphi_{n,t} \rightleftharpoons {}^{\{2\}}\wp_{\alpha_{\mathfrak{n} \llcorner n \square n \lrcorner, n}, \mathfrak{n} \llcorner n \square n \lrcorner, n, t}$.

Видим, что ${}^{\{2\}}\varphi_{n,t}$ равномерно непрерывная 2-функция и что выполнено

$0 \leq {}^{\{2\}}\varphi_{n,t} \leq \frac{1}{2^n} \;\&\; \forall x y j ((y \leq 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \vee 1 - \frac{1}{2^n} \leq y \vee (1 \leq j \leq t+1) \;\&$
$\& \; y \in \Phi_j \circ (1 - \frac{1}{2^{n-1}}) \Delta (1 - \frac{1}{2^n})) \supset {}^{\{2\}}\varphi_{n,t}(x \square y) = 0)$.

Заметим, что для всяких НЧ n, t_1 и t_2, где $t_1 \neq$ $\neq t_2$, по крайней мере одна из 2-функций ${}^{\{2\}}\varphi_{n,t_1}$, ${}^{\{2\}}\varphi_{n,t_2}$ является нулевой.

Из выше сказанного следует, что для любого НЧ n ряд 2-функций $\sum_t {}^{\{2\}}\varphi_{n,t}$ сходится в каждой точке. Сумму этого ряда обозначим через ${}^{\{2\}}\varphi_n$. Имеем $0 \leq {}^{\{2\}}\varphi_n \leq \frac{1}{2^n}$.

Сумму равномерно сходящегося ряда 2-функций $\sum_n {}^{\{2\}}\varphi_n$ обозначим посредством ${}^{\{2\}}\varphi$.

Без особых трудностей можно убедиться в том, что выполнено $R_2({}^{\{2\}}\varphi, \{2^{l_m}\}_m, 1)$. Таким образом 2-функция ${}^{\{2\}}\varphi$ интегрируема по Риману.

Пусть x КДЧ из 1-сегмента $0 \Delta 1$. Докажем, что 1-функция $\widehat{{}^{\{2\}}\varphi_{x \square}}$ неинтегрируема по Риману.

Имеем $0 \leq \widehat{{}^{\{2\}}\varphi_{x \square}} \leq 1$. Предположим, что 1-функция $\widehat{{}^{\{2\}}\varphi_{x \square}}$ интегрируема по Риману. Тогда, как следует из теоремы 1 ([2]), существует возрастающая последовательность НЧ $\{\tau_m\}_m$ такая, что выполнено

(1) $$R_1(\widehat{{}^{\{2\}}\varphi_{x\square}}, \{\tau_m\}_m, 1) .$$

Пусть $\{\tau_m\}_m$ последовательность, обладающая такими свойствами. Для всякого НЧ n положим $\sigma_n \rightleftharpoons \tau_{2n+2}$. Как отмечено в доказательстве теоремы 2 из [2] к x и последовательности НЧ $\{\sigma_m\}_m$ существует НЧ p такое, что имеет место

$$!\,\mathcal{U}_{\llcorner}p\square p_{\lrcorner} \,\&\, \left(\frac{\mathcal{U}_{\llcorner}p\square p_{\lrcorner}-\frac{7}{4}}{2^{l_{\sigma_p}}}-2 < x < \frac{\mathcal{U}_{\llcorner}p\square p_{\lrcorner}-\frac{1}{4}}{2^{l_{\sigma_p}}}-2\right)$$

и следовательно выполнено $p \le \sigma_p \,\&\, 2^{l_{\sigma_p}+1}+1 \le$

$\le \mathcal{U}_{\llcorner}p\square p_{\lrcorner} \le 3\cdot 2^{l_{\sigma_p}}+1$. Но тогда $\alpha_{\mathcal{U}_{\llcorner}p\square p_{\lrcorner},\,p} = \sigma_p$ и существует НЧ t_0 такое, что 1-функция

$(\widehat{{}^{\{2\}}\rho_{\sigma_p,\mathcal{U}_{\llcorner}p\square p_{\lrcorner},p,t_0}})_{x\square}$ равна на 1-сегменте

$(1-\frac{1}{2^{p-1}})\Delta(1-\frac{1}{2^p})$ 1-функции $\widehat{{}^{\{2\}}\varphi_{x\square}}$ и обращается в ноль в других точках. Отсюда на основании (1) получаем

$R_1((\widehat{{}^{\{2\}}\rho_{\sigma_p,\mathcal{U}_{\llcorner}p\square p_{\lrcorner},p,t_0}})_{x\square}, \{\tau_m\}_m, 1)$. С другой стороны ввиду выше приведенных свойств 2-функций типа ${}^{\{2\}}\rho_{n,k,i,t}$ и того, что имеет место $\tau_{2p+2} = \sigma_p < 2^{l_{\sigma_p}}$, выполнено $\neg R_1((\widehat{{}^{\{2\}}\rho_{\sigma_p,\mathcal{U}_{\llcorner}p\square p_{\lrcorner},p,t_0}})_{x\square}, \{\tau_m\}_m, 1)$.

Л и т е р а т у р а

[1] Проблемы конструктивного направления в математике - 2

(сборник работ), Труды мат.инст.им.В.А.Стеклова,
Том LXVII (1962).

[2] О. ДЕМУТ: О теореме Фубини для интеграла Римана в конструктивной математике, Comment.Math.Universit. Carolinae Volume 9(1968), 677-686.

(Received December 18, 1968)