Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Alexander Kratochvíl

La méthode des gradients conjugents pour les équations non linéaires dans l'espace de Banach

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 9 (1968), No. 4, 659--676

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/105209`

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
9, 4 (1968)

LA MÉTHODE DES GRADIENTS CONJUGENTS POUR LES ÉQUATIONS NON LINÉAIRES DANS L'ESPACE DE BANACH

Alexander KRATOCHVÍL, Praha

Introduction. La méthode des gradients conjugents était développée par R.M. Hayes (cf.[3]), pour les équations linéaires dans l'espace de Hilbert. J.W. Daniel (cf.[1],[2]) a généralisé cette méthode pour les opérateurs F non linéaires, continues, ayant la différentielle de Fréchet F' bornée, telle que

$$a I \leqq F' \leq A I .$$

(I est un opérateur identique.)

D'après [1] la méthode mentionnée est plus rapide que la méthode de la descente la plus rapide.

Dans cet article on expose la méthode des gradients conjugents pour le cas d'un opérateur F monotone non linéaire, $F: X \longrightarrow X'$, X étant un espace de Banach.

Dans § 2 une généralisation de [2] est exposée, c'est-à-dire, pour trouver l'itération x_{n+1}, "on descends" dans une certaine direction p_n. Dans le paragraphe trois on expose une variation de cette méthode. Nous ne cherchons pas l'élément x_{n+1} dans la direction p_n, mais dans tous le plan, ou plus général dans E_N, l'espace euclidien réel de dimension N, où N est quelconque entier naturel.

On peut appliquer les théorèmes de ce travail à la solution des équations elliptiques non linéaires aux dérivées partielles de la même façon comme dans [4] .

§ 1. Notation. Désignons par X l'espace de Banach réel. On écrit les normes des divers espaces simplément $\| \dots \|$ si l'on ne risque pas d'ambiguïté.

La boule fermée du centre $x_0 \in X$ et du rayon R sera indiquée par $D_{x_0, R}$. Au lieu de $D_{0,R}$ on écrira brièvement D_R .

Soient M et N deux ensembles non vides. Le symbole $F: M \longrightarrow N$ signifie que F est une application de M dans N . On désigne par $\mathcal{R}(F)$ l'ensemble de toutes les valeurs $F(x)$, $x \in M$.

Pour simplifier l'écriture, on va désigner la dualité entre X, X' , un espace de Banach et son adjoint par (x,f), $x \in X$, $f \in X'$.

§ 2. La méthode des gradients conjugents.

Théoreme 2.1. Soient X un espace vectoriel normé réel, réflexif, $F: X \longrightarrow X'$ un opérateur potentiel hemicontinu borné sur X tel que:

1^0 quel que soit $h \in X$,

$$(h, F(h)) \geq \lambda(\|h\|) , \tag{2.1}$$

où $\frac{\lambda(s)}{s}$ est une fonction intégrable sur $(0,R)$ quel que soit $R > 0$ et

(2.2) $$\lim_{R\to+\infty} \int_0^R \frac{\lambda(s)}{s}\, ds = +\infty ;$$

2° quels que soient $x \in X$ et $\ell > 0$, il existe une fonction réelle $\gamma_{x,\ell}$ de la variable réelle t, croissante, continue, définie sur $\langle 0, \ell \rangle$ telle que $\gamma_{x,\ell}(0) = 0$ et

(2.3) $$(h, F(x+h) - F(x) \geq \gamma_{x,\ell}(\| h \|_B)$$

quel que soit $\| h \|_B \leq \ell$, où B est un espace de Banach tel que $X \subset B$ algébriquement et topologiquement; cela signifie que chaque élément de X appartient à B et que pour $x \in X$:

$$\| x \|_B \leq c_1 \| x \|_X ;$$

3° il existe $\varepsilon > 0$ tel que quels que soient $R > 0$ et $x, x+h \in D_R$,

(2.4) $$(h, F(x+h) - F(x)) \leq M(R) \| h \|^{1+\varepsilon}$$

où $M(t)$ est une fonction réelle, positive, définie sur $\langle 0, +\infty)$, bornée sur chaque $\langle \alpha, \beta \rangle \subset \langle 0, +\infty)$;

4° il existe un opérateur injectif $A: X' \to X$ jouissant des propriétés suivantes:

a) l'opérateur reciproqué A^{-1} est continue au point $0 \in \mathcal{R}(A)$,

b) il existe $\varepsilon' > 0$ et $c_0 > 0$ tel que quel que soit $z \in X'$,

(2.5) $$(Az, z) \geq c_0 \| Az \|^{1+\varepsilon'} .$$

Alors l'équation $F(x) = 0$ a une solution $x_0 \in X$, cette solution est unique et la suite

(2.6) $$x_{n+1} = x_n + \varepsilon_n \, p_n$$

converge vers x_0 selon la norme de B, où x_1 est quelconque élément de X, ε_n est la plus petite solution positive de l'équation

(2.7) $$\varphi_n(t) \equiv (p_n, F(x_n + t p_n)) = 0 ,$$

ou ε_n est telle solution positive de (2.7) que pour chaque $t \geq 0$

$$f(x_n + \varepsilon_n p_n) \leq f(x_n + t p_n) ,$$

(2.8)
$$p_1 = - A\, F(x_1) ,$$
$$p_n = - A\, F(x_n) + b_{n-1}\, p_{n-1} , \; n \geq 2 ,$$

où b_{n-1} est tel que

(2.9) $$\| b_{n-1}\, p_{n-1} \| \leq c_2 \, \| A\, F(x_n) \| ,$$
$c_2 > 0$.

<u>Démonstration</u>. La hypothèse 2^o entraîne l'inégalité:

(2.10) $$(h, F(x+h) - F(x)) > 0$$

quelques soient $x, h \in X$, $h \neq 0$.

La démonstration de l'existence et l'unicité de la solution x_0 de l'équation $F(x) = 0$ est la même comme dans l'article [4]. (Il suffit d'utiliser la hypothèse 1^o, la condition (2.10) et la hypothèse de la hemicontinuité de l'opérateur F.)

Soit f une fonctionnelle telle que $F(x) =$ $=$ grad $f(x)$ (cf.[5]). On obtient de la proposition 1.1 de

[4] et (2.1)

$$f(x) = f(0) + \int_0^1 (tx, F(tx))\frac{dt}{t} \geq f(0) + $$
$$+ \int_0^1 \frac{\lambda(t\|x\|)}{t}\, dt .$$

Posons $\|x\| = R$; alors

$$f(x) \geq f(0) + \int_0^1 \frac{\lambda(tR)}{t}\, dt = f(0) + \int_0^R \frac{\lambda(s)}{s}\, ds .$$

Il en suit en vertu de (2.2)

$$\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = +\infty . \tag{2.11}$$

D'après (2.6),(2.7) on a

$$(p_n, F(x_{n+1})) = 0 . \tag{2.12}$$

Il suit de (2.5),(2.8) et (2.12) que

$$\begin{aligned} (p_n, F(x_n)) &= -(AF(x_n), F(x_n)) + \\ &+ b_{n-1}(p_{n-1}, F(x_n)) \leq -c_0 \|AF(x_n)\|^{1+\varepsilon'} . \end{aligned} \tag{2.13}$$

On obtient de (2.8),(2.9) la relation

$$\|p_n\| \leq \|AF(x_n)\| + \|b_{n-1}p_{n-1}\| \leq (1+c_2)\|AF(x_n)\| . \tag{2.14}$$

Pour la fonction $f_n(t) = f(x_n + tp_n)$, où $t \geq 0$, on a

$$f_n'(t) = (p_n, F(x_n + tp_n))$$

alors d'après (2.13)

$$f_n'(0) = (p_n, F(x_n)) \leq -c_0 \|AF(x_n)\|^{1+\varepsilon'} < 0 . \tag{2.15}$$

La fonction réelle $f_n(t)$ de la variable réelle t est continue sur $\langle 0, +\infty)$ et d'après (2.11)

$\lim\limits_{t\to+\infty} f_n(t) = +\infty$, donc il existe $t_o \geq 0$ tel que $f_n(t) \geq f_n(t_o)$ quel que soit $t \geq 0$. Il suit de (2.15) que $t_o > 0$, donc $f'_n(t_o) = 0$. Alors pour chaque n entier naturel $\varepsilon_n > 0$ existe.

Soient n entier naturel, $0 < t \leq \varepsilon_n$. Posons

(2.16) $$R_n = \| x_n \| + \varepsilon_n \| p_n \| .$$

Alors pour chaque $0 < \tau < 1$ on a

$$\| x_n + \tau t p_n \| \leq \| x_n \| + t \| p_n \| \leq \| x_n \| + \varepsilon_n \| p_n \| = R_n .$$

D'après (5.8) de [5] et (2.4),(2.13),(2.14) on a

$$f(x_n + t p_n) - f(x_n) = (t p_n, F(x_n + \tau t p_n)) =$$

$$= (t p_n, F(x_n)) + \frac{1}{\tau}(\tau t p_n, F(x_n + \tau t p_n) - F(x_n)) \leq$$

$$\leq -c_o t \| AF(x_n) \|^{1+\varepsilon'} + \frac{1}{\tau} M(R_n) \| \tau t p_n \|^{1+\varepsilon} =$$

$$= -c_o t \| AF(x_n) \|^{1+\varepsilon'} + \tau^{\varepsilon} t^{1+\varepsilon} M(R_n) \| p_n \|^{1+\varepsilon} <$$

$$< -\frac{c_o t}{(1+c_2)^{1+\varepsilon'}} \| p_n \|^{1+\varepsilon'} + t^{1+\varepsilon} M(R_n) \| p_n \|^{1+\varepsilon} =$$

$$= t \| p_n \|^{1+\varepsilon'} \{ t^{\varepsilon} M(R_n) \| p_n \|^{\varepsilon-\varepsilon'} - \frac{c_o}{(1+c_2)^{1+\varepsilon'}} \} .$$

Alors pour chaque $0 < t \leq \varepsilon_n$ on a l'inégalité

(2.17) $$f(x_n + t p_n) - f(x_n) <$$

$$< t \| p_n \|^{1+\varepsilon'} \{ t^{\varepsilon} M(R_n) \| p_n \|^{\varepsilon-\varepsilon'} - \frac{c_o}{(1+c_2)^{1+\varepsilon'}} \} .$$

Il suit de (2.4),(2.6),(2.12),(2.13) que

$$M(R_n)\varepsilon_n^{1+\varepsilon}\|p_n\|^{1+\varepsilon} \geq (\varepsilon_n p_n, F(x_n+\varepsilon_n p_n)-F(x_n)) =$$
$$= (\varepsilon_n p_n, F(x_{n+1})-F(x_n)) = \varepsilon_n (p_n, F(x_{n+1})) -$$
$$- \varepsilon_n (p_n, F(x_n)) \geq \varepsilon_n c_0 \|AF(x_n)\|^{1+\varepsilon'},$$

donc d'après (2.14) on a

$$\varepsilon_n^{\varepsilon} \geq \frac{c_0}{M(R_n)} \frac{\|AF(x_n)\|^{1+\varepsilon'}}{\|p_n\|^{1+\varepsilon}} > \frac{c_0 \|p_n\|^{\varepsilon'-\varepsilon}}{2M(R_n)(1+c_2)^{1+\varepsilon'}} .$$

En utilisant (2.17) pour

$$(2.18) \quad t = \left(\frac{c_0}{2M(R_n)(1+c_2)^{1+\varepsilon'}} \|p_n\|^{\varepsilon'-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}$$

on obtient (en vertu de (2.6) et de la hypothèse des ε_n),

$$f(x_{n+1})-f(x_n) = f(x_n+\varepsilon_n p_n)-f(x_n) <$$

$$< f\left(x_n+\left(\frac{c_0}{2M(R_n)(1+c_2)^{1+\varepsilon'}}\|p_n\|^{\varepsilon'-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} p_n\right)-f(x_n) <$$

$$< \left(\frac{c_0}{2M(R_n)(1+c_2)^{1+\varepsilon'}}\|p_n\|^{\varepsilon'-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} \|p_n\|^{1+\varepsilon'} \cdot$$

$$\cdot \left\{\frac{c_0}{2M(R_n)(1+c_2)^{1+\varepsilon'}}\|p_n\|^{\varepsilon'-\varepsilon} M(R_n)\|p_n\|^{\varepsilon-\varepsilon'} - \frac{c_0}{(1+c_2)^{1+\varepsilon'}}\right\} =$$

$$= -\frac{c_0}{2(1+c_2)^{1+\varepsilon'}}\left(\frac{c_0}{2M(R_n)(1+c_2)^{1+\varepsilon'}}\|p_n\|^{\varepsilon'-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\|p_n\|^{1+\varepsilon'} .$$

Posons $r_n = f(x_n) - f(x_0)$. En vertu de ces dernières inégalités on obtient

$$(2.19) \quad \begin{aligned} &r_n - r_{n+1} = f(x_n)-f(x_{n+1}) > \\ &> \frac{c_0}{2(1+c_2)^{1+\varepsilon'}}\left(\frac{c_0}{2M(R_n)(1+c_2)^{1+\varepsilon'}}\|p_n\|^{\varepsilon'-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\|p_n\|^{1+\varepsilon'} > 0 . \end{aligned}$$

Il suit de (5.8) de [6], (2.10) et de la relation $F(x_0) = 0$ que

$$r_n = f(x_n)-f(x_0) = (x_n-x_0, F(x_0+\tau(x_n-x_0))) =$$

$$= \frac{1}{\tau}(\tau(x_n - x_o), F(x_o + \tau(x_n - x_o)) - F(x_o)) \geq 0 .$$

Donc la suite $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$, formée d'éléments non-négatifs, décroissante, converge vers un élément $r \geq 0$. Alors en vertu de (2.19) il existe

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(M(R_n))^{\frac{1}{\varepsilon}}} \|r_n\|^{\frac{\varepsilon'-\varepsilon}{\varepsilon}+1+\varepsilon'} =$$

(2.20)

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(M(R_n))^{\frac{1}{\varepsilon}}} \|r_n\|^{\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}+\varepsilon'} = 0 .$$

La suite $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ est décroissante d'après (2.19), d'où il suit en vertu de (2.11) que la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ est bornée, donc d'après la relation (2.6) aussi $\{\varepsilon_n r_n\}_{n=1}^{\infty}$ est bornée. D'après la définition des nombres positifs R_n la suite $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ est bornée. Il en suit en vertu de la hypothèse 3° l'existence de $M_o > 0$ tel que $0 < M(R_n) \leq M_o$ quel que soit n entier naturel, alors d'après la relation (2.20) on a

$$\lim_{n\to\infty} \|r_n\|^{\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}+\varepsilon'} = 0 ,$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \|r_n\| = 0 . \tag{2.21}$$

De la relation (2.13), il suit l'inégalité

$$-\|r_n\| \|F(x_n)\| \leq (r_n, F(x_n)) \leq -c_o \|AF(x_n)\|^{1+\varepsilon'} ,$$

alors

$$0 < c_o \|AF(x_n)\|^{1+\varepsilon'} \leq \|r_n\| \|F(x_n)\| .$$

L'opérateur F est borné, donc la suite $\{F(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$

est bornée; il en suit en vertu de (2.21) que

$$\lim_{n\to\infty} \|AF(x_n)\|^{1+\varepsilon'} = 0 ,$$

donc $\lim\limits_{n\to\infty} AF(x_n) = 0$, alors d'après la hypothèse 4a) on a $\lim\limits_{n\to\infty} F(x_n) = 0$.

Pour finir la démonstration, on utilisera la hypothèse 2°. On a démontré que la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ est bornée. Alors il existe un nombre $R_o > 0$ tel que $x_o \in D_{R_o}$ et $x_n \in D_{R_o}$ quel que soit n entier naturel. Alors on a : $\|x_o\|_B \leq c_1 \|x_o\| \leq c_1 R_o$, $\|x_n\|_B \leq c_1 R_o$ pour chaque n . De la hypothèse 2° , il suit l'inégalité

$$\gamma_{x_o, 2c_1R_o}(\|x_n - x_o\|_B) \leq (x_n - x_o, F(x_n) - F(x_o)) =$$

$$= (x_n - x_o, F(x_n)) \leq \|x_n - x_o\| \, \|F(x_n)\| \leq 2R_o \|F(x_n)\| .$$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x_o\|_B = 0$, car $\lim\limits_{n\to\infty} \|F(x_n)\| = 0$.

§ 3. Une variation de la méthode des gradients conjugents.

Théoreme 3.1. Soient X un espace vectoriel normé réel, réflexif, $F: X \longrightarrow X'$ un opérateur potentiel hemicontinu sur X tel que les conditions 1°, 2° et 3° avec $\varepsilon = 1$ du théorème 2.1 sont satisfaites. Soit $A: X' \longrightarrow X$ un opérateur injectif jouissant des propriétés 4a, 4b) du théoreme 2.1 et tel que A F est borné.

Alors l'équation $F(x) = 0$ a une solution unique $x_o \in X$ et la suite

$$x_2 = x_1 - \varepsilon_1 AF(x_1)$$

(3.1)

$$x_{n+1} = x_n - \varepsilon_n AF(x_n) - \sigma_n AF(x_{n-1}), \quad n \geq 2,$$

converge vers x_0 selon la norme de B, où x_1 est un élément quelconque de X, ε_n et σ_n satisfaisant aux conditions suivantes:

(3.2)
$$\min\left(\frac{1}{2}, \frac{c_0}{8M(R_n)} \|AF(x_n)\|^{\varepsilon'-1}\right) \leq \varepsilon_n \leq$$
$$\leq \min\left(1, \frac{c_0}{4M(R_n)} \|AF(x_n)\|^{\varepsilon'-1}\right) ;$$

(3.3a) $$0 \leq \sigma_n \leq \min\left(1, \frac{(AF(x_{n-1}), F(x_n))}{2M(R_n)\|AF(x_{n-1})\|^2}\right),$$

si $(AF(x_{n-1}), F(x_n)) > 0$;

(3.3b) $$0 \leq |\sigma_n| \leq \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{2}} \frac{\|AF(x_n)\|}{\|AF(x_{n-1})\|},$$

si $(AF(x_{n-1}), F(x_n)) = 0$;

(3.3c) $$\max\left(-1, \frac{(AF(x_{n-1}), F(x_n))}{2M(R_n)\|AF(x_{n-1})\|^2}\right) \leq \sigma_n \leq 0,$$

si $(AF(x_{n-1}), F(x_n)) < 0$.

On pose

(3.4) $$R_n = \|x_n\| + 2\|AF(x_n)\| + \|AF(x_{n-1})\| .$$

<u>Démonstration</u>. On obtient comme dans le théorème 2.1 l'existence et l'unicité de la solution $x_0 \in X$ de l'équation $F(x) = 0$ et la validité des relations (2.10), (2.11).

D'après (5.8) de [6] on a :

$$f(x_n)-f(x_{n+1})=(x_n-x_{n+1},F(x_{n+1}+\tau(x_n-x_{n+1})))=$$

$$=-(x_{n+1}-x_n,F(x_n))-\frac{1}{1-\tau}((1-\tau)(x_{n+1}-x_n),$$

$$F(x_{n+1}-\tau(x_{n+1}-x_n))-F(x_n)) ,$$

où $0<\tau<1$.

Il suit de (3.1) - (3.4) que

$$\|x_{n+1}\|\leq\|x_n\|+\varepsilon_n\|AF(x_n)\|+|\sigma_n|\,\|AF(x_{n-1})\|\leq$$

$$\leq\|x_n\|+\|AF(x_n)\|+\|AF(x_{n-1})\|\leq R_n ,$$

si $(AF(x_{n-1}),F(x_n))\neq 0$,

$$\|x_{n+1}\|\leq\|x_n\|+\|AF(x_n)\|+\frac{\varepsilon_n}{\sqrt{2}}\|AF(x_n)\|\leq$$

$$\leq\|x_n\|+2\|AF(x_n)\|\leq R_n ,$$

si $(AF(x_{n-1}),F(x_n))=0$.

On a supposé $\sigma_n\neq 0$; si $\sigma_n=0$ donc ces inégalités sont triviales.

Alors

$$\|x_n+(1-\tau)(x_{n+1}-x_n)\|=\|x_{n+1}-\tau(x_{n+1}-x_n)\|\leq$$

$$\leq(1-\tau)\|x_{n+1}\|+\tau\|x_n\|\leq(1-\tau)R_n+\tau R_n=R_n .$$

Alors d'après la hypothèse 3° et (2.5),(3.1) - (3.4) on a

$$f(x_n)-f(x_{n+1})\geq\varepsilon_n(AF(x_n),F(x_n))+$$

$$+\sigma_n(AF(x_{n-1}),F(x_n))-\frac{1}{1-\tau}M(R_n)\|(1-\tau)(x_{n+1}-x_n)\|^2\geq$$

$$\geq c_0 \varepsilon_n \|AF(x_n)\|^{1+\varepsilon'} + \sigma_n (AF(x_{n-1}), F(x_n)) -$$

$$-(1-\tau) M(R_n) \|x_{n+1} - x_n\|^2 > c_0 \varepsilon_n \|AF(x_n)\|^{1+\varepsilon'} +$$

$$+\sigma_n (AF(x_{n-1}), F(x_n)) - 2M(R_n)\varepsilon_n^2 \|AF(x_n)\|^2 -$$

$$-2M(R_n)\sigma_n^2 \|AF(x_{n-1})\|^2 = \varepsilon_n \|AF(x_n)\|^{1+\varepsilon'} \cdot$$

$$\cdot \{c_0 - 2M(R_n)\varepsilon_n \|AF(x_n)\|^{1-\varepsilon'}\} +$$

$$+\sigma_n \{(AF(x_{n-1}), F(x_n)) - 2M(R_n)\sigma_n \|AF(x_{n-1})\|^2\}.$$

Soit $(A\, F(x_{n-1}), F(x_n)) \neq 0$; alors de la relation (3.2) et (3.3a),(3.3c) respectivement, il suit que

$$f(x_n) - f(x_{n+1}) > \frac{c_0}{2} \varepsilon_n \|AF(x_n)\|^{1+\varepsilon'} +$$

$$+\sigma_n \{(AF(x_{n-1}), F(x_n)) - (AF(x_{n-1}), F(x_n))\} =$$

$$= \frac{c_0}{2} \varepsilon_n \|AF(x_n)\|^{1+\varepsilon'} > 0 .$$

Soit $(A\, F(x_{n-1}), F(x_n)) = 0$; alors d'après (3.2) et (3.3b) on a

$$f(x_n) - f(x_{n+1}) > \varepsilon_n \|AF(x_n)\|^{1+\varepsilon'} \cdot$$

$$\cdot \{c_0 - 2M(R_n)\varepsilon_n \|AF(x_n)\|^{1-\varepsilon'}\} - 2M(R_n)\sigma_n^2 \|AF(x_{n-1})\|^2 \geq$$

$$\geq \varepsilon_n \|AF(x_n)\|^{1+\varepsilon'} \{c_0 - 2M(R_n)\varepsilon_n \|AF(x_n)\|^{1-\varepsilon'}\} -$$

$$- \varepsilon_n^2 M(R_n) \| A F(x_n) \|^2 = \varepsilon_n \| A F(x_n) \|^{1+\varepsilon'} \cdot$$
$$\cdot \{ c_0 - 3M(R_n)\varepsilon_n \| A F(x_n) \|^{1-\varepsilon'} \} \geq$$
$$\geq \frac{c_0}{4} \varepsilon_n \| AF(x_n) \|^{1+\varepsilon'} > 0 .$$

Pendant la démonstration et aussi dans la formulation de ce théorème on suppose $A\,F(x_n) \neq 0$ quel que soit n entier naturel. Si $A\,F(x_{n_0}) = 0$, donc $F(x_{n_0}) = 0$ en vertu du (2.5). Il suit de l'unicité de la solution que $x_{n_0} = x_0$.

De l'inégalité

$$(3.5) \quad f(x_n) - f(x_{n+1}) > \frac{c_0}{4} \varepsilon_n \| AF(x_n) \|^{1+\varepsilon'} > 0 ,$$

il suit comme dans la démonstration du théorème 2.1 que

$$(3.6) \qquad \lim_{n \to \infty} \varepsilon_n \| AF(x_n) \|^{1+\varepsilon'} = 0 .$$

Les relations (2.11) et (3.5) entraînent que la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ est bornée, donc $\{A\,F(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ est bornée, d'où il suit que $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ est bornée d'après (3.4); alors il existe $M_0 > 0$ tel que $0 < M(R_n) \leq M_0$ pour chaque n entier naturel.

Maintenant, on va construire deux sous-suites: $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ et $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$. Ces n, pour lesquels on a

$$\varepsilon_n \geq \frac{c_0}{8M(R_n)} \| AF(x_n) \|^{\varepsilon'-1}$$

on énumera n_k. Les autres n, c'est-à-dire pour lesquels on a dans (3.2)

$$\varepsilon_n \geq \frac{1}{2}$$

on énumera n_j .

Alors:

$$\varepsilon_{n_k} \geq \frac{c_0}{8M(R_{n_k})} \| A F(x_{n_k}) \|^{\varepsilon' - 1} \geq \frac{c_0}{8M_0} \| A F(x_{n_k}) \|^{\varepsilon' - 1} .$$

Produissons cette inégalité par le nombre $\| A F(x_{n_k}) \|^{1+\varepsilon'}$:

$$\varepsilon_{n_k} \| A F(x_{n_k}) \|^{1+\varepsilon'} \geq \frac{c_0}{8M_0} \| A F(x_{n_k}) \|^{2\varepsilon'} > 0 .$$

Alors en vertu de (3.6) on a $\lim_{k \to \infty} A F(x_{n_k}) = 0$.

D'après (3.6) on a aussi $\lim_{j \to \infty} A F(x_{n_j}) = 0$. Donc $\lim_{n \to \infty} A F(x_n) = 0$, alors d'après la hypothèse 4a)

$$\lim_{n \to \infty} F(x_n) = 0 .$$

Il en suit en vertu de la hypothèse 2^0 comme dans le théorème 2.1

$$\lim_{n \to \infty} \| x_n - x_0 \|_B = 0 .$$

<u>Théorème 3.2.</u> Sous les hypothèses du théorème 3.1, la suite

$$(3.7) \quad \begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \varepsilon_n A F(x_n) - \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_n^i A F(x_{n-i}), \; n \leq N , \\ x_{n+1} &= x_n - \varepsilon_n A F(x_n) - \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_n^i A F(x_{n-i}), \; n > N \end{aligned}$$

converge vers la solution unique de l'équation $F(x) = 0$ selon la norme de B , où N est un entier naturel quelconque, $x_1 \in X$ quelconque, ε_n et σ_n^i satisfaisent aux conditions suivantes :

$$\min\left(\frac{1}{2}, \frac{c_0}{4NM(R_n)} \|AF(x_n)\|^{\varepsilon'-1}\right) \le \varepsilon_n \le$$

(3.8)

$$\le \min\left(1, \frac{c_0}{2NM(R_n)} \|AF(x_n)\|^{\varepsilon'-1}\right) \; ;$$

pour $i \le n - 1$ si $n \le N$, pour $i = 1,\dots, N - 1$ si $n > N$ on a :

(3.9a) $$0 \le \delta_n^i \le \min\left(1, \frac{(AF(x_{n-i}), F(x_n))}{NM(R_n)\|AF(x_{n-i})\|^2}\right) ,$$

si $(AF(x_{n-i}), F(x_n)) > 0$;

(3.9b) $$0 \le |\delta_n^i| \le \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{N}} \; \frac{\|AF(x_n)\|}{\|AF(x_{n-i})\|} ,$$

si $(AF(x_{n-i}), F(x_n)) = 0$;

(3.9c) $$\max\left(-1, \frac{(AF(x_{n-i}), F(x_n))}{NM(R_n)\|AF(x_{n-i})\|^2}\right) \le \delta_n^i \le 0 ,$$

si $(AF(x_{n-i}), F(x_n)) < 0$.

On pose

(3.10) $$R_n = \|x_n\| + N\, \|AF(x_n)\| + \sum_{i=1}^{N-1} \|AF(x_{n-i})\| .$$

<u>Démonstration</u>. Il suffit de démontrer $\| x_{n+1} \| \le R_n$ et l'inégalité

$$f(x_n) - f(x_{n+1}) > c\, \varepsilon_n \|AF(x_n)\|^{1+\varepsilon'} > 0 .$$

Soit $n > N$; les rélations (3.7) - (3.10) entraînent (si $(AF(x_{n-i}), F(x_n)) \neq 0$ pour chaque $i = 1,\dots,N-1$)

$$\|x_{n+1}\| \leq \|x_n\| + \varepsilon_n \|AF(x_n)\| + \sum_{i=1}^{N-1} |\sigma_n^i| \, \|AF(x_{n-i})\| \leq$$

$$\leq \|x_n\| + \|AF(x_n)\| + \sum_{i=1}^{N-1} \|AF(x_{n-i})\| \leq R_n \,.$$

S'il existe $1 \leq i_0 \leq N-1$ tel que

$(AF(x_{n-i_0}), \; F(x_n)) = 0$, donc

$$\|x_{n+1}\| \leq \|x_n\| + \|AF(x_n)\| + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{N-1} \|AF(x_{n-i})\| +$$

$$+ \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{N}} \|AF(x_n)\| \leq R_n \,.$$

D'après (5.8) de [6], la hypothèse 3^0 et (2.5),(3.7)-(3.10) on a

$$f(x_n) - f(x_{n+1}) \geq \varepsilon_n (AF(x_n), F(x_n)) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_n^i (AF(x_{n-i}), F(x_n)) -$$

$$- \frac{1}{1-\tau} M(R_n) \|(1-\tau)(x_{n+1} - x_n)\|^2 > c_0 \varepsilon_n \|AF(x_n)\|^{1+\varepsilon'} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_n^i (AF(x_{n-i}), F(x_n)) - NM(R_n)\varepsilon_n^2 \|AF(x_n)\|^2 -$$

$$- NM(R_n) \sum_{i=1}^{N-1} (\sigma_n^i)^2 \|AF(x_{n-i})\|^2 \,.$$

Si $(AF(x_{n-i}), F(x_n)) = 0$ pour $i - 1,\dots,N-1$, donc

$$f(x_n) - f(x_{n+1}) > c_0 \varepsilon_n \|AF(x_n)\|^{1+\varepsilon'} -$$

$$- NM(R_n)\varepsilon_n^2 \|AF(x_n)\|^2 - M(R_n)\sum_{i=1}^{N-1} \varepsilon_n^2 \|AF(x_n)\|^2 =$$

$$= \varepsilon_n \|AF(x_n)\|^{1+\varepsilon'} \cdot \{c_0 - (2N-1)M(R_n)\,\varepsilon_n \cdot$$

$$\cdot \|AF(x_n)\|^{1-\varepsilon'}\} \geq$$

$$\geq \frac{c_0}{2N}\,\varepsilon_n \|AF(x_n)\|^{1+\varepsilon'} > 0 .$$

S'il existe $1 \leq i_0 \leq N-1$ tel que

$(AF(x_{n-i_0}), F(x_n)) \neq 0$, donc

$$f(x_n) - f(x_{n+1}) > c_0\,\varepsilon_n \|AF(x_n)\|^{1+\varepsilon'} +$$

$$+ \delta_n^{i}\cdot(AF(x_{n-i_0}), F(x_n)) - NM(R_n)\,\varepsilon_n^2 \|AF(x_n)\|^2 -$$

$$- M(R_n)\sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{N-1} \varepsilon_n^2 \|AF(x_n)\|^2 - NM(R_n)(\delta_n^{i_0})^2 \|AF(x_{n-i_0})\|^2 \geq$$

$$\geq \varepsilon_n \|AF(x_n)\|^{1+\varepsilon'}\{c_0 - (2N-2)M(R_n)\,\varepsilon_n \|AF(x_n)\|^{1-\varepsilon'}\} +$$

$$+ \delta_n^{i_0}\{(AF(x_{n-i_0}), F(x_n)) - \delta_n^{i_0} NM(R_n)\|AF(x_{n-i_0})\|^2\} \geq$$

$$\geq \frac{c_0}{N}\,\varepsilon_n \|AF(x_n)\|^{1+\varepsilon'} + \delta_n^{i_0}\{(AF(x_{n-i_0}), F(x_n)) -$$

$$- (AF(x_{n-i_0}), F(x_n))\} =$$

$$= \frac{c_0}{N}\,\varepsilon_n \|AF(x_n)\|^{1+\varepsilon'} > 0 .$$

<u>Remarque 3.1.</u> On peut poser $\delta_n = 0$ pour chaque n entier naturel. Donc on obtient la méthode de la descente la plus rapide (cf.[4]).

Remarque 3.2. Pour les théorèmes 2.1,3.1 et 3.2, les remarques 1.1 - 1.7 de [4] et les analogues du théorème 1.2 de [4] sont valables. Spécialement, on obtient de la remarque 1.1 de [4] l'estimation de la vitesse de la convergence.

Remarque 3.3. On peut appliquer les théorèmes 2.1, 3.I et 3.2 à la solution des équations elliptiques non linéaires aux dérivées partielles de la même manière comme dans [4].

B i b l i o g r a p h i e

[1] J.W. DANIEL: Convergence of the conjugate gradient method with computationally convenient modifications,Num.Math.10,125-131(1967),

[2] J.W. DANIEL: The conjugate gradient method for linear and nonlinear operator equations.J.Soc.Indust. Appl.Math.,Ser.B,Numer.Anal.4,10-26(1967).

[3] R.M. HAYES: Iterative methods of solving linear problems in Hilbert spaces.Nat.Bur.Standards Appl.Math.Ser.,39(1954),71-104.

[4] A. KRATOCHVÍL: Les méthodes approximatives de la solution des équations elliptiques non linéaires, Comment.Math.Univ.Carolinae 9,3(1968),455-510.

[5] M.M. VAJNBERG: Variacionnyje metody issledovanija nelinejnych operatorov,Moskva 1956.

(Received November 29,1968)