Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

A. V. Čakmazjan

К теории двумерных двойственно нормализованных поверхностей

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 9 (1968), No. 1, 79--85

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/105157`

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
9,1 (1968)

К ТЕОРИИ ДВУМЕРНЫХ ДВОЙСТВЕННО НОРМАЛИЗОВАННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ $\mathcal{D}_2$ в E_n

А.В. ЧАКМАЗЯН, Ереван

1. Будем говорить, что поверхность V_m в проективном пространстве $\mathcal{P}_n$ нормализована двойственно, если она нормализована в смысле А.П. Нордена [1] и ее нормаль первого рода содержит характеристику семейства гиперплоскостей, касающихся V_m.

В этой заметке мы рассмотрим поверхность V_2, вложенную в собственно эвклидово пространство E_n. Допустим, что V_2 можно дополнить до гиперполосы так, чтобы характеристики семейства касательных гиперплоскостей были перпендикулярны к касательной плоскости поверхностей V_2. Очевидно, что тогда естественная нормализация V_2 будет одновременно и двойственной, т.е. нормаль первого рода V_2 предполагаетсяа вполне ортогональной к касательной плоскости поверхности и одновременно удовлетворяет условиям двойственной нормализации [2]. Оказывается, что поверхности V_2, удовлетворяющие этим условиям, образуют определенный класс, который в дальнейшем будем обозначать через $\mathcal{D}_2$.

2. Присоединим к поверхности $\mathcal{D}_2$ подвижной полуортогональный репер, образованный точкой $x \in \mathcal{D}_2$, единичными векторами e_i $(i, j, k = 1, 2)$ принадлежащими касательной

плоскости $T_2(x)$ к поверхности в точке x, и единичными взаимно ортогональными векторами e_α $(\alpha, \beta, \gamma = 3, 4, \dots, n)$ лежащими в ортогональном дополнении $N_{n-2}(x)$ к плоскости $T_2(x)$. Если e_{α_0} $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 = 3, 4, \dots, n-1)$ есть векторы характеристической плоскости, а e_n нормальный вектор касательной гиперлоскости, то по условию двойственной нормализации [2] имеем

(1) $$e_{\alpha_0} d e_n = 0 \qquad \text{или} \qquad e_n d e_{\alpha_0} = 0$$

Для компонент инфинитезимальных перемещений репера получим

(2) $$dx = \omega^i e_i, \; de_i = \omega_i^j e_j + \omega_i^{\alpha_0} e_{\alpha_0} + \omega_i^n e_n ,$$
$$de_{\alpha_0} = \omega_{\alpha_0}^i e_i + \omega_{\alpha_0}^{\beta_0} e_{\beta_0} + \omega_{\alpha_0}^n e_n, \; de_n = \omega_n^i e_i + \omega_n^{\alpha_0} e_{\alpha_0}$$

где $x = x(u^1, u^2)$ - радиус-вектор точки $x \in \mathcal{D}_2$, ω^i - линейные формы от дифференциалов криволинейных координат (u^1, u^2) точки x. Если мы продифференцируем выражения $e_i e_\alpha = 0$ то получим соотношения $\omega_\alpha^k + g^{ki}\omega_i^k = 0$, где g^{ki} контравариантные компоненты метрического тензора $g_{ij} = e_i e_j$, поверхности $\mathcal{D}_2$. Продифференцируем внешним образом уравнения $\omega^\alpha = 0$, а затем к полученным ковариантам применим лемму Картана; тогда получим уравнения

(3) $$\omega_i^\alpha = \gamma_{ij}^\alpha \omega^j, \quad \gamma_{ij}^\alpha = \gamma_{ji}^\alpha$$

где γ_{ij}^α - система $n-2$ вторых основных тензоров поверхности,

В силу (2) условия (1) принимают следующий вид $\omega_{\alpha_0}^n = 0$ или $\omega_n^{\alpha_0} = 0$. Дифференцируя внешним образом последние уравнения и имея в виду (3), получим равенства

(4) $$\varepsilon^{ke} g^{ij} \gamma_{kj}^{\alpha_0} \gamma_{ie}^n = 0 \qquad \text{или} \quad g_{ij} = A_{\alpha_0}\gamma_{ij}^{\alpha_0} + A_n \gamma_{ij}^n$$

которые показывают, что главные направления тензоров g_{ij},

$\gamma_{ij}^{\alpha_0}$, γ_{ij}^{n} совпадают.

Таким образом, сети $\gamma_{ij}^{\alpha_0} du^i du^j = 0$, $\gamma_{ij}^{n} du^i du^j = 0$ имеют общую биссекторную сеть [3]. Тогда их биссекторные направления порождают на поверхности ортогональную сеть, аполярную нулевым линиям тензоров $\gamma_{ij}^{\alpha_0}$, γ_{ij}^{n}. Сеть, аполярная тензорам $\gamma_{ij}^{\alpha_0}$, γ_{ij}^{n}, называется сопряженной сетью. Таким образом мы получаем, что на поверхности $\mathcal{D}_2$, вложенной в E_n, существует ортогональныя сопряженная сеть.

Если в нормальной плоскости произвести замену базиса $\{e_\alpha\}$, то величины γ_{ij}^{α} (при фиксированных i, j) преобразуются как компоненты вектора.
Действително, пусть в нормальной плоскости имеем вращение $e'_\alpha = a_\alpha^\beta e_\beta$ где $\| a_\alpha^\beta \|$ - ортогональная матрица. В этом случае формы ω_i^α преобразуются по формулам

$$\tilde{\omega}_i^\alpha = a_\beta^\alpha \omega_i^\beta .$$

До вращения имеем $\omega_i^\alpha = \gamma_{ij}^\alpha \omega^j$, а после вращения $\tilde{\omega}_i^j = \tilde{\gamma}_{ij}^\alpha \tilde{\omega}^j$. Учитывая $\tilde{\omega}^i = \omega^i$, из последнего получим

$$\tilde{\gamma}_{ij}^\alpha = a_\beta^\alpha \gamma_{ij}^\beta .$$

Это показывает, что при вращениях в нормальной плоскости величины γ_{ij}^α преобразуются как компоненты векторов h_{ij} (γ_{ij}^α). Мы имеем три вектора $h_{ij} = \gamma_{ij}^\alpha e_\alpha$. Так как поверхность V_2 несет сопряженную сеть, то в общем случае ранг этой системы векторов равен двум. Вместе с точкой x векторы h_{ij} определяют 2-плоскость $N_2(x) \subset N_{n-2}(x)$ которую мы, следуя В.Т. Базылеву [4] назовем главной нормалью поверхности $\mathcal{D}_2$ в точке x. Если векторы e_a $(a, b = 3, 4)$ расположены в плоскости $N_2(x)$ то все векторы h_{ij} будут линейно выражаться через векторы

$$e_a : h_{ij} = \gamma_{ij}^a e_a$$

а следовательно $\gamma_{ij}^\sigma = 0 \quad (\sigma = 5, 6, \ldots, n)$.

Как известно [4] на поверхности V_2 в точке x в направлении орта $t = t^i e_i$ вектор нормальной кривизны имеет вид

(5) $$K_N(t) = \gamma_{ij}^a t^i t^j e_a$$

Одномерная нормаль $[x, n] \subset N_2(x)$ называется особой [4], если относительно этой нормали любое направление на поверхности является главным.

Доказано [4], что для того, чтобы на поверхности V_m существовало поле особых нормалей, необходимо и достаточно, чтобы метрический тензор g_{ij} поверхности был линейной комбинацией ее вторых тензоров γ_{ij}^a. Имея в виду (4) и последний результат мы можем формировать:

<u>Теорема 1</u>. Поверхность $\mathcal{D}_2$, вложенная в E_n характеризуется тем, что она допускает существование поля особых нормалей в смысле Василева.

Теперь найдем положение особой нормали в плоскости $N_2(x)$. Так как для поверхности $\mathcal{D}_2$ главные направления тензоров γ_{ij}^a, совпадают, то эти главные направления назовем главными направлениями поверхности в точке $x \in \mathcal{D}_2$.

Обозначим орты главных направлений через $(a_i, \tilde{a}_i)$; тогда

(6) $$\gamma_{ij}^a = \overset{a}{\underset{1}{\sigma}} a_i a_j + \overset{a}{\underset{2}{\sigma}} \tilde{a}_i \tilde{a}_j$$

где $(\overset{a}{\underset{1}{\sigma}}, \overset{a}{\underset{2}{\sigma}})$ - главные значения тензоров γ_{ij}^a

Как известно, геометрическое место концов вектора нормальной кривизны (5) отложенных из точки $x \in \mathcal{D}_2$, называется индикатрисой кривизны поверхности в этой точке. Запишем параметрические уравнения индикатрисы относительно репера в плоскости $N_2(x)$. Если x^a - координаты произвольной точки индикатрисы кривизны относительно указанного репера, то в силу (5) получим

(7) $$x^a = \gamma^a_{ij} t^i t^j, \quad g_{ij} t^i t^j = 1 .$$

Это и есть параметрические уравнения индикатрисы кривизны. Имея в виду (7) и (4), получим

(8) $$A_a x^a = 1$$

а это показывает, что индикатриса лежит на прямой (8) плоскости $N_2(x)$.

Разложим единичный касательный вектор t^i кривой в данной точке по главным направлениям:

$$t^i = a^i \cos\varphi + \tilde{a}^i \sin\varphi .$$

Подставляя это выражение в (7) и имея в виду (4), получаем

$$x^a = \overset{a}{\underset{1}{\sigma}} \cos^2\varphi + \overset{a}{\underset{2}{\sigma}} \sin^2\varphi \qquad \text{или} \qquad \frac{x^3 - \overset{3}{\underset{1}{\sigma}}}{\overset{3}{\underset{2}{\sigma}} - \overset{3}{\underset{1}{\sigma}}} + \frac{x^4 - \overset{4}{\underset{2}{\sigma}}}{\overset{4}{\underset{1}{\sigma}} - \overset{4}{\underset{2}{\sigma}}} = 1 ,$$
$(a = 3, 4)$

Таким образом, мы получаем, что для $\mathcal{D}_2$ индикатриса нормальной кривизны вырождается в отрезок прямой (8), не проходящей через точку x. Так как A_α - компоненты вектора нормали к прямой (8), то мы приходим к такому утверждению.

<u>Теорема 2</u>. Поверхность $\mathcal{D}_2$, вложенная в E_n, характеризуется тем, что индикатриса кривизны вырождается в отрезок прямой, не проходящей через точку $x \in \mathcal{D}_2$. Особая нормаль $[x, n]$ ортогональна этой прямой.

Известно [5], что вектор средней кривизны поверхности имеет вид

$$M = \frac{1}{2} \gamma^\alpha_{ij} g^{ij} e_\alpha .$$

Базылев В.Т. в работе [4] рассматривает два симметрических тензора на поверхности $\alpha_{ij} = m h_{ij}$, $\beta_{ij} = h_{ik} h_{je} g^{ke}$, где $m = m^{\alpha} e_{\alpha}$ орт вектора M средней кривизны. Тензор Риччи для V_2 имеет вид [4]

$$R_{ij} = 2M\alpha_{ij} - \beta_{ij} \tag{9}$$

Так как внутренняя геометрия поверхности $\mathcal{D}_2$ риманова, то ее тензор Риччи имеет вид $R_{ij} = K g_{ij}$, где K -Гауссова кривизна $\mathcal{D}_2$, вследствие чего получим

$$K g_{ij} = 2M\alpha_{ij} - \beta_{ij} \, . \tag{10}$$

Но так как для $\mathcal{D}_2$ тензоры g_{ij}, γ^{α}_{ij} имеют общие главные направления, то из последнего равенства следует, что тензоры α_{ij}, β_{ij}, тоже имеют общие главные направления.

Следуя Базылеву В.Т. сеть $\Sigma_2 \subset V_2$ назовем средней сетью поверхности, если направления ее линий сопряжены относительно двух конусов $\alpha_{ij}\omega^i\omega^j = 0$, $\beta_{ij}\omega^i\omega^j = 0$. Из (9) следует что они сопряжены и относительно конуса Риччи $R_{ij}\omega^i\omega^j = 0$. На всякой поверхности $V_2 \subset E_m$ существует средняя сеть (не всегда единственная) определяемая системой уравнений [4]

$$(\alpha_{ij} - \lambda\beta_{ij})\omega^i = 0$$

где λ - корень уравнения

$$\mathcal{D}et \, \| \alpha_{ij} - \lambda\beta_{ij} \| = 0 \, .$$

Как известно [4], что если поверхность несет ортогональную сопряженную сеть, то такая сеть является средней сетью поверхности. Но так как поверхность $\mathcal{D}_2$ несет ортогональную сопряженную сеть, значит, эта сеть и будет средней сетью.

Эти результаты были доложены на втором съезде болгарских математиков в г. Варне 1967 году. Выражаю благодарность В.Т. Вазылеву за полезные замечания.

Литература

[1] А.П. НОРДЕН: Пространства аффинной связности,ГИТЛ,1950.

[2] А.В. ЧАКМАЗЯН: САН АРм.ССР,т.28,№ 4(1959).

[3] А.П. НОРДЕН: Теория поверхностей.ГИТЛ,1956.

[4] В.Т. ВАЗЫЛЕВ: Сибирский мат.журнал,т.УП,№ 3(1966).

[5] И.А. СХОУТЕН и Д.Дж. СТРОЙК: Введение в новые методы дифференциальной геометрии,ИЛ,М.1948.

(Received December 1,1967)