I. I. Aleksandrov

Об аналитическом представлении линейных операторов в Банаховых функциональных пространствах

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 8 (1967), No. 3, 359--376

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105119

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
8, 3 (1967)

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В БАНАХОВЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

И.И. АЛЕКСАНДРОВ, Арзамас

В этой работе класс функций множества, введенный нами в [1] применяется к аналитическому представлению операторов. Рассматриваются также некоторые аналоги упомянутого класса.

Приведем определения, относящиеся к банаховым функциональным пространствам [2]. Пусть (Δ, Λ, μ) - пространство с вполне σ-конечной полной мерой. Фиксирована последовательность измеримых множеств конечной положительной меры Δ_n такая, что $\Delta_n \subset \Delta_{n+1}$ и Δ равно соединению всех Δ_n. Измеримое множество e называется ограниченным, если $e \subset \Delta_n$ при некотором n. Класс всех ограниченных множеств мы обозначим через Λ_0. Пусть $\mathcal{P}$ множество всех измеримых неотрицательных функций $f(x)$, определенных на Δ, и $\rho(f)$ метрическая функция на $\mathcal{P}$, $0 \leq \rho(f) \leq \infty$, обладающая свойствами:

1) $\rho(f) = 0$, если и только если $f(x) = 0$ почти всюду на Δ; $\rho(f+\varphi) \leq \rho(f) + \rho(\varphi)$ и $\rho(\varepsilon f) = \varepsilon \rho(f)$, $\varepsilon \geq 0$.

2) Если $f_n \in \mathcal{P}$, $n = 1, \dots,$ и $f_n(x) \uparrow f(x)$ почти всюду, то $\rho(f_n) \uparrow \rho(f)$.

3) Если e ограниченное множество, то $\rho(\chi_e) < \infty$.

4) Для каждого ограниченного множества e существует постоянная A_e такая, что $\int_e f d\mu \leq A_e \rho(f)$ для каждой $f \in \mathcal{P}$.

Соотношением $\rho(f) = \rho(|f|)$ метрическая функция распространяется на все комплексные измеримые функции. Класс функций f таких, что $\rho(f) < \infty$ и образует банахово функциональное пространство $\mathfrak{X}$. Ассоциированное пространство $\mathfrak{X}'$ порождается метрической функцией

$$\rho'(f) = \sup \int |fg| d\mu, \quad \rho(g) \leq 1 .$$

Через $\mathfrak{X}^{\tau}$ обозначается подпространство пространства $\mathfrak{X}$, состоящее из таких функций f, что $e_n \downarrow \theta$ (θ - пустое множество) влечет $\rho(f \chi_{e_n}) \downarrow 0$. Пусть $\tau = \{e_i\}$ - произвольный конечный класс попарно не пересекающихся ограниченных множеств. Через S мы обозначим класс функций $\alpha(x)$, допускающих представление $\alpha(x) = \sum_{\tau} \alpha_i \chi_{e_i}(x)$. $\mathfrak{X}^{b}$ - замыкание множества S в $\mathfrak{X}$.

В дальнейшем через $[\Lambda_0 \to Y]$ обозначаем класс функций множества, конечно-аддитивно отображающих Λ_0 в некоторое линейное векторное пространство Y.

§ 1. Непрерывные операторы. Пусть Y - В -пространство. Норма элемента $y \in Y$ обозначается через $\| y \|$. Пусть $H_b(\mathfrak{X}^b \to Y)$ - класс ограниченных линейных операторов, действующих из $\mathfrak{X}^b$ в Y.

Определение 1. Для $\lambda \in [\Lambda_0 \to Y]$ положим

$$R(\lambda) = \sup_{\tau} \sup_{\substack{\rho(\alpha) \leq 1 \\ \alpha \in S}} \| \sum_{\tau} \alpha_i \lambda(e_i) \| .$$

Покажем, что каждая функция λ такая, что $R(\lambda) < \infty$, порождает оператор класса $H_b(\mathfrak{X}^b \to Y)$.

Для $\varphi = \sum_{\tau} \alpha_i \chi_{e_i}$ положим $L\varphi = \int \varphi d\lambda = \sum_{\tau} \alpha_i \lambda(e_i)$. Пусть теперь $f \in \mathfrak{X}^b$ и функции φ_n таковы, что

$\rho(f-\varphi_n)\to 0$. Тогда из определения 1 следует, что
$$\|\int\varphi_n d\lambda-\int\varphi_m d\lambda\|\le\rho(\varphi_n-\varphi_m)R(\lambda).$$
Но Y полно, значит существует предел $(b)\int f d\lambda=\lim_n\int\varphi_n d\lambda$. Он не зависит от выбора последовательности φ_n. Действительно, пусть последовательность ψ_n обладает теми же свойствами, что и φ_n. Тогда $\|\int\varphi_n d\lambda-\int\psi_n d\lambda\|\le\rho(\varphi_n-\psi_n)R(\lambda)\to 0$.

Из определения 1 следует неравенство $\|\int\varphi_n d\lambda\|\le\rho(\varphi_n)R(\lambda)$. Предельным переходом получим $\|(b)\int f d\lambda\|\le\rho(f)R(\lambda)$. Так что если $Lf=(b)\int f d\lambda$, то $L\in H_b(\mathfrak{X}^b\to Y)$, причем $\|L\|\le R(\lambda)$.

Обратно, пусть дан оператор $L\in H_b(\mathfrak{X}^b\to Y)$. Для $e\in\Lambda_0$ положим $\lambda(e)=L\chi_e$. Если $\alpha(x)=\sum_i\alpha_i\chi_{e_i}(x)$, $\rho(\alpha)\le 1$, то
$$\|\sum_i\alpha_i\lambda(e_i)\|=\|L\sum_i\alpha_i\chi_{e_i}\|\le\|L\|\rho(\alpha)\le\|L\|.$$

Следовательно, $R(\lambda)\le\|L\|$. Тогда существует $(b)\int f d\lambda$. Операторы L и $(b)\int f d\lambda$ совпадают на S; по непрерывности они совпадают и на $\mathfrak{X}^b$. Доказана

Теорема 1. Соотношение $Lf=(b)\int f d\lambda$, где $R(\lambda)<\infty$ дает аналитическое представление операторов класса $H_b(\mathfrak{X}^b\to Y)$. При этом $\|L\|=R(\lambda)$.

Заметим, что если Y - пространство скаляров, то $(b)\int f d\lambda=\int f d\lambda$ (интегралу справа приписывается такой смысл, как в [3]). Отсюда

Следствие [1;стр.88]. Соотношение $Lf=\int f d\lambda$, где $R(\lambda)<\infty$, дает представление ограниченных линейных функционалов в пространстве $\mathfrak{X}^b$. При этом $\|L\|=R(\lambda)$.

В дальнейшем используем такие обозначения: если $F(u,v)$ - функция двух переменных, то через $F(\cdot,v)$ обозначаем функцию переменного u, которая получится, если фиксировать v. Аналогичный смысл имеет $F(u,\cdot)$.

Пусть Σ - некоторая алгебра подмножеств множества T. Через $ba = ba(T, \Sigma)$ обозначается B-пространство скалярных ограниченных функций множества, конечно-аддитивных на Σ. Нормой функции ξ служит $\|\xi\| = \sup_{a \in \Sigma} |\xi(a)|$ [3; стр.177-179].

Теорема 2. Пусть функция $\lambda = \lambda(a, e)$, $a \in \Sigma$, $e \in \Lambda_o$, удовлетворяет условиям: 1) $\lambda(a,\cdot)$ конечно-аддитивна при каждом фиксированном a, 2) $\lambda(\cdot, e) \in ba$ при всех $e \in \Lambda_o$, 3) $\ell = \sup_{a \in \Sigma} R[\lambda(a,\cdot)] < \infty$.

Тогда операторы класса $H_b(\mathfrak{X}^b \longrightarrow ba)$ допускают представление $(Lf)(a) = \int f d\lambda(a,\cdot)$. При этом $\|L\| = \ell$.

Доказательство. Пусть $L \in H_b(\mathfrak{X}^b \longrightarrow ba)$. Каждое множество $a \in \Sigma$ определяет линейный функционал на $ba(T, \Sigma)$: $\mathcal{A}\xi = \xi(a)$. Из $|\mathcal{A}\xi| \le \sup_{a \in \Sigma} |\xi(a)|$ следует, что $\|\mathcal{A}\| \le 1$. Далее, $\mathcal{A}L$ является ограниченным линейным функционалом на $\mathfrak{X}^b$. По следствию из теоремы 1 существует функция множества $\lambda(a,\cdot)$ такая, что для $f \in \mathfrak{X}^b$ имеем $(Lf)(a) = \mathcal{A}Lf = \int f d\lambda(a,\cdot)$ и $\|\mathcal{A}L\| = R[\lambda(a,\cdot)]$. Из $\|\mathcal{A}L\| \le \|\mathcal{A}\|\|L\|$ следует $R[\lambda(a,\cdot)] \le \|L\|$. Поскольку a произвольно, то $\ell \le \|L\|$. Так что условие 3) выполнено. Возьмем $e \in \Lambda_o$. Тогда $(\mathcal{A}L)\chi_e = \int \chi_e d\lambda(a,\cdot) = \lambda(a,e)$.

Отсюда следует выполнение условий 1) и 2).

Обратно, пусть условия 1) - 3) выполняются. Тогда для любых $f \in \mathfrak{X}^b$ и $a \in \Sigma$ существует интеграл $\int f d\lambda(a,\cdot)$.

Поскольку функция λ конечно-аддитивна относительно a, то таков же и этот интеграл. Далее $\|\int f d\lambda(a,\cdot)\| \leq \rho(f) R[\lambda(a,\cdot)] \leq$ $\leq \ell \rho(f)$. Если определить оператор L соотношением $(Lf)(a) = \int f d\lambda(a,\cdot)$, то $L \in H_b(\mathcal{X}^b \to ba)$. При этом $\|L\| \leq \ell$. Обратное неравенство было доказано выше.

<u>Теорема 3</u>. Пусть функция $\mathcal{K}(a,x), a \in \Sigma, x \in \Delta$, такова, что:

1) $\ell = \sup_{a \in \Sigma} \rho'[\mathcal{K}(a,\cdot)] < \infty$, 2) $\int_e \mathcal{K}(a,x)\mu(dx) \in ba$

для каждого $e \in \Lambda_0$. Тогда соотношение

(1) $$Lf = \int \mathcal{K}(\cdot,x) f(x) \mu(dx)$$

определяет оператор класса $H_b(\mathcal{X}^b \to ba)$, причем $\|L\| = \ell$. Если $\mathcal{X}^b = \mathcal{X}^\tau$, то каждый оператор упомянутого класса допускает представление в форме (1).

<u>Доказательство</u>. Пусть дана функция $\mathcal{K}(a,x)$. Из условия 1) следует, что $\mathcal{K}(a,\cdot) \in \mathcal{X}'$. Тогда при любом $f \in \mathcal{X}^b$ существует интеграл $\int \mathcal{K}(a,x) f(x) \mu(dx)$ [2;стр.7]. При этом

(2) $$\left|\int \mathcal{K}(a,x) f(x) \mu(dx)\right| \leq \rho(f) \rho'[\mathcal{K}(a,\cdot)] \leq \rho(f)\ell$$

Далее,

(3) $$\sup_{\rho(f)\leq 1} \sup_{a \in \Sigma} \left|\int \mathcal{K}(a,\cdot) f d\mu\right| = \sup_{a \in \Sigma} \sup_{\rho(f)\leq 1} \left|\int \mathcal{K}(a,\cdot) f d\mu\right| = \ell .$$

Перестановка знаков $\sup$ законна по [4;стр.149].

Возьмем последовательность $\varphi_n \in S$ такую, что $\rho(f - \varphi_n) \to 0$. Если $\varphi_n = \sum_i \alpha_i \chi_{e_i}$, то $(L\varphi_n)(a) =$ $= \sum_i \int_{e_i} \mathcal{K}(a,x) \alpha_i \mu(dx)$ является конечно-аддитивной функцией от a (см.условие 2)).

Далее, $(Lf)(a)=\lim_n (L\varphi_n)(a)$. Значит $(Lf)(a)$ также конечно-аддитивная функция от a. Теперь из (2) следует, что $Lf\in ba$, а из (3), что $\|L\|=\ell$.

Обратно, пусть дан оператор $L\in H_b(\mathfrak{X}^b\to ba)$. По теореме 2 $(Lf)(a)=\int f\,d\lambda(a,\cdot)$. Поскольку $R[\lambda(a,\cdot)]<\infty$, то существует функция $\mathcal{K}(a,\cdot)\in\mathfrak{X}'$ такая, что $\lambda(a,e)=\int_e \mathcal{K}(a,x)\mu(dx)$, причем $R[\lambda(a,\cdot)]=\rho'[\mathcal{K}(a,\cdot)]$ [1; стр.89]. Ясно, что интеграл $\int\mathcal{K}(a,x)f(x)\mu(dx)$ определяет оператор класса $H_b(\mathfrak{X}^b\to ba)$. Пусть $\varphi\in S$, $\varphi=\sum_i \alpha_i\chi_{e_i}$, тогда $\int\varphi\,d\lambda(a,\cdot)=\sum_i\alpha_i\lambda(a,e_i)=$ $=\int\mathcal{K}(a,x)\varphi(x)\mu(dx)$.

Но S плотно в $\mathfrak{X}^b$, так что это равенство верно при всех $\varphi\in\mathfrak{X}^b$. Доказательство завершено.

Пусть (T,Σ,ν) – пространство с вполне σ-конечной мерой. Через $ca=ca(T,\Sigma,\nu)$ обозначим подпространство пространства $ba(T,\Sigma)$ состоящее из счетно-аддитивных функций, абсолютно непрерывных относительно ν.

<u>Теорема 4</u>. Пусть функция λ удовлетворяет условиям 1) и 3) теоремы 2, а также условию 2^*) $\lambda(\cdot,e)\in ca(T,\Sigma,\nu)$ при всех $e\in\Lambda_0$. Тогда соотношение $(Lf)(a)=\int f\,d\lambda(a,\cdot)$ дает представление операторов класса $H_b(\mathfrak{X}^b\to ca)$. При этом $\|L\|=\ell$.

<u>Доказательство</u> проводится как в теореме 2. Дополнительно нужно доказать лишь следующее. Если условия 1), 2^*), 3) выполнены, то при $f\in\mathfrak{X}^b$ функция множества $\omega(a)=\int f\,d\lambda(a,\cdot)$ счетно-аддитивна и абсолютно непрерывна относительно ν. Пусть $f=\sum_i\alpha_i\chi_{e_i}$, тогда $\omega(\cdot)=\sum_i\alpha_i\lambda(\cdot,e_i)\in ca(T,\Sigma,\nu)$ по условию 2^*).

Теперь возьмем $f\in\mathfrak{X}^b$ и последовательность $\varphi_n\in S$

такую, что $\rho(f - g_n) \to 0$. Если положить $\omega_n(a) = \int g_n \, d\lambda(a, \cdot)$, то $\lim\limits_n \omega_n(a) = \omega(a)$ при всех $a \in \Sigma$. Тогда ω счетно-аддитивна [3;стр.177]. Кроме того, $\lim\limits_{\nu(a)\to 0} \omega_n(a) = 0$ равномерно по n [3;стр.176]. Значит $\lim\limits_{\nu(a)\to 0} \omega(a) = \lim\limits_n \lim\limits_{\nu(a)\to 0} \omega_n(a) = 0$, т.е. ω абсолютно непрерывна.

Аналогично может быть доказана

<u>Теорема 5</u>. Пусть функция $\mathcal{K}(a, x)$ удовлетворяет условию 1) теоремы 3, а также условию 2*) $\int\limits_e \mathcal{K}(\cdot, x)\mu(dx) \in ca(T, \Sigma, \nu)$.

Тогда соотношение (1) определяет оператор $L \in H_b(\mathfrak{X}^b \to ca)$, причем $\| L \| = \ell$. Если $\mathfrak{X}^b = \mathfrak{X}^{\tau}$, то каждый оператор класса $H_b(\mathfrak{X}^b \to ca)$ допускает представление в форме (1).

Замечание. Известно, что за норму в пространствах ba и ca можно брать и $v(\xi, T)$ - полную вариацию функции ξ [3;стр.261]. Теоремы 2 - 5 остаются верными с той оговоркой, что норма оператора L вместо равенства $\| L \| = \ell$ будет удовлетворят неравенствам

$$\ell \le \begin{cases} \| L \| \le 2\ell, & \text{если } ba \text{ - вещественное пространство,} \\ \| L \| \le 4\ell, & \text{если } ba \text{ - комплексное пространство.} \end{cases}$$

Это следует из свойств полной вариации [3;стр.111-112].

В дальнейшем мы ограничимся случаем вещественных пространств.

Пространство $ca(T, \Sigma, \nu)$ (нормой служит полная вариация) изометрически изоморфно пространству $L_1(T, \Sigma, \nu)$ [3;стр. 194,129]. Соответствующие элементы связаны соотношением

$$\mathcal{K}(t) = \frac{d\xi}{d\nu} \quad \text{или, что то же,}$$

$$\xi(e) = \int\limits_e \mathcal{K}(t)\nu(dt), \quad e \in \Sigma, \quad t \in T.$$

Это дает возможность сформулировать теорему, аналогичную теореме 5.

Теорема 6. Пусть функция $\mathcal{K}(a,x),\ a\in\Sigma,\ x\in\Delta$, удовлетворяет условиям: 1) $\int\limits_{e}\mathcal{K}(\cdot,x)\mu(dx)\in ca(T,\Sigma,\nu)$ для каждого $e\in\Lambda_0$; 2) $\ell=\sup\limits_{a\in\Sigma}\rho'[\mathcal{K}(a,\cdot)]<\infty$. Тогда соотношение

$$(4)\qquad Lf=\frac{d}{d\nu}\int\mathcal{K}(\cdot,x)f(x)\mu(dx)$$

определяет оператор класса $H_{\ell}[\mathfrak{X}^{b}\to L_1(\nu)]$. При этом $\ell\le\|L\|\le 2\ell$. Если $\mathfrak{X}^{b}=\mathfrak{X}^{\chi}$, то каждый оператор упомянутого класса допускает представление в форме (4).

Заметим еще, что если $\rho(f)=[\int|f|^{r}d\mu]^{\frac{1}{r}}$, то получается результат, приведенный в [5;стр.692-693]. См. также [3;стр.544].

Теперь рассмотрим вопрос о представлении операторов, областью определения которых служит некоторое F-пространство $\mathfrak{Z}$.

F-пространство - это линейное полное метрическое пространство, метрика которого r удовлетворяет условиям:

1) $r(x_1,x_2)=r(x_1-x_2,0)$,

2) для скаляра α и $x\in\mathfrak{Z}$ произведение αx непрерывно по каждому переменному [3;стр.64].

Пусть $|x|_{\mathfrak{Z}}=r(x,0)$ а $\mathfrak{Z}^*$ - пространство непрерывных линейных функционалов на $\mathfrak{Z}$. Будем рассматривать функции $\lambda(x,e),\ x\in\mathfrak{Z},\ e\in\Lambda_0$. Пусть 1) $\lambda(\cdot,e)\in\mathfrak{Z}^*$, 2) $\lambda(x,\cdot)\in(\mathfrak{X}^{b})^*$.

Покажем, что каждая такая функция определяет непрерывный линейный оператор, действующий из $\mathfrak{Z}$ в $(\mathfrak{X}^{b})^*$. Положим $Lx=\lambda(x,\cdot)$. В доказательстве нуждается лишь непрерывность этого оператора. Используем следующую лемму [3;стр.65].

Лемма. Пусть для каждого элемента a множества A определено непрерывное отображение $V_a(x)$ F - пространства $\mathfrak{X}$ в F -пространство $\mathfrak{X}_1$. Предположим, что $V_a(x)$ удовлетворяет условиям:

I. $|V_a(x'+x'')|_{\mathfrak{X}_1} \le |V_a(x')|_{\mathfrak{X}_1} + |V_a(x'')|_{\mathfrak{X}_1}$.

II. $|\alpha V_a(x)|_{\mathfrak{X}_1} = |V_a(\alpha x)|_{\mathfrak{X}_1}$, $\alpha \ge 0$.

Тогда, если для каждого $x \in \mathfrak{X}$ множество $\{V_a(x) / a \in A\}$ ограничено, то $\lim\limits_{x \to 0} V_a(x) = 0$ равномерно относительно $a \in A$.

В качестве $\mathfrak{X}_1$ мы возьмем вещественную прямую. Пусть A - множество таких функций $a \in S$, $a(x) = \sum\limits_i \alpha_i \chi_{e_i}(x)$, что $\rho(a) \le 1$. Наконец, $V_a(x) = |\sum\limits_i \alpha_i \lambda(x, e_i)|$. Множество $\{V_a(x) \mid a \in A\}$ ограничено, ибо $0 \le V_a(x) \le$ $\le R[\lambda(x, \cdot)]$. Остальные условия леммы также выполняются, тогда по этой лемме

$$\lim_{x \to 0} R[\lambda(x, \cdot)] = \lim_{x \to 0} \sup_{a \in A} V_a(x) = 0 .$$

Это означает непрерывность оператора L.

Покажем, что любой непрерывный линейный оператор, действующий из $\mathfrak{X}$ в $(\mathfrak{X}^b)^*$, порождает функцию λ описанного выше типа.

Пусть L - такой оператор. Каждому $x \in \mathfrak{X}$ он ставит в соответствие элемент из $(\mathfrak{X}^b)^*$, который мы обозначим через $\lambda(x, \cdot)$. Каждое множество $e \in \Lambda_0$ порождает функционал на $(\mathfrak{X}^b)^*$, $E\lambda(x, \cdot) = \lambda(\cdot, e)$. Этот функционал линеен. Из неравенства $|E\lambda(x, \cdot)| \le R[\lambda(x, \cdot)]\rho(\chi_e)$ вытекает его непрерывность.

Итак, EL - непрерывный функционал на $\mathfrak{Z}$. Поэтому $\lambda(\cdot, e) \in \mathfrak{Z}^*$.

Доказана

Теорема 7. Аналитическое представление непрерывного линейного оператора L, действующего из F-пространства $\mathfrak{Z}$ в $(\mathfrak{X}^b)^*$ дается соотношением $Lz = \lambda(z, \cdot)$, где функция $\lambda = \lambda(z, e)$ такова, что: 1) $\lambda(\cdot, e) \in \mathfrak{Z}^*$, $e \in \Lambda_0$, 2) $\lambda(z, \cdot) \in (\mathfrak{X}^b)^*$, $z \in \mathfrak{Z}$.

Частный случай этой теоремы приведен в [6;стр.327].

§ 2. Регулярные операторы. Пусть Y является КВ-пространством. Это значит, что Y - К-пространство (условно полная линейная структура) и одновременно В-пространство. Если $|y|$ - модуль элемента $y \in Y$, то $|y_1| \leq |y_2|$ влечет $\|y_1\| \leq \|y_2\|$ (монотонность нормы).

Упорядоченность порождает в Y так называемую (0)-сходимость. Этот вид сходимости в КВ-пространстве связан со сходимостью по норме следующим образом: А) если $y_n \downarrow 0$, то $\|y_n\| \downarrow 0$; В) если $0 \leq y_n$, $y_n \uparrow +\infty$, то $\|y_n\| \to +\infty$ ($\downarrow$ и $\uparrow$ означают здесь монотонную (0)-сходимость) [7;стр.207].

Заметим, что из определений, относящихся к банаховым функциональным пространствам, следует, что $\mathfrak{X}^z$ является КВ-пространством. $\mathfrak{X}^b$ будет лишь так называемым КВ-линеалом (линейной структурой с монотонной нормой и одновременно В-пространством) [7;стр.195].

Оператор L, действующий из $\mathfrak{X}^b$ в Y, называем положительным, если $f \geq 0$ влечет $Lf \geq 0$. Оператор называем регулярным, если он представим в виде разности положительных аддитивных операторов.

Пусть $H_r(\mathfrak{X}^b \to Y)$ - класс регулярных операторов. Он является частью класса $H_b(\mathfrak{X}^b \to Y)$ [7;стр.249]. Выясним, каким дополнительным условиям должна удовлетворять функция λ, чтобы оператор $Lf = (b)\int f\,d\lambda$ (см. теорему 1) был регулярным.

Если оператор L регулярен, то имеют смысл операторы [7;стр.231]

$$L_+ f = \sup_{0 \le \varphi \le f} L\varphi, \quad L_- f = -\inf_{0\le\varphi\le f} L\varphi, \quad |L| = L_+ + L_- .$$

Для $e \in \Lambda_0$ имеем $\lambda^+(e) = \sup\limits_{e' \subset e} \lambda(e') \le \sup\limits_{0\le\varphi\le\chi_e} (b)\int \varphi\,d\lambda = L_+\chi_e < \infty$.

С другой стороны $L_+\chi_e \le \sup\limits_{0\le\varphi\le\chi_e} (b)\int\varphi\,d\lambda^+ = \lambda^+(e)$.

Итак, $L_+\chi_e = \lambda^+(e)$. Аналогично $\lambda^-(e) = -\inf\limits_{e'\subset e} \lambda(e') = L_-\chi_e$.

Значит $|\lambda|(e) = \lambda^+(e) + \lambda^-(e) = |L|\chi_e$. Тогда при всех $f \in \mathfrak{X}^b$ имеем $|L|f = (b)\int f\,d\lambda$. Отсюда $R(|\lambda|) = \| \, |L| \, \| < \infty$.

Обратно, пусть функция λ такова, что $R(|\lambda|) < \infty$. Используя свойство монотонности нормы в Y легко получить, что

$$R(|\lambda|) = \sup_{\tau} \sup_{\rho(\alpha)\le 1} \Big\| \sum_{\tau} |\alpha_i| \, |\lambda|(e_i) \Big\| \text{ и } R(\lambda) \le R(|\lambda|).$$

Тогда по теореме 1 существуют $Lf = (b)\int f\,d\lambda$, $L_1 f = (b)\int f\,d|\lambda|$.

Оператор L регулярен, т.к. L_1 является его мажорантой [7;стр.226].

Доказана

<u>Теорема 8</u>. Соотношение $Lf = (b)\int f\,d\lambda$, где $R(|\lambda|) < \infty$ дает представление операторов класса

$H_n(\mathcal{X}^b \to Y)$. При этом $|L|f = (b)\int f\,d|\lambda|$.

<u>Определение 2</u>. $R^{(1)}(\lambda) = \sup\limits_{\tau} \sup\limits_{\rho(\alpha)\le 1} \| \sum\limits_{\tau} |\alpha_i \lambda(e_i)| \|$.

<u>Теорема 9</u>. Пусть $Lf = (b)\int f\,d\lambda$. Для того, чтобы оператор L принадлежал классу $H_n(\mathcal{X}^b \to Y)$ необходимо, а если $\mathcal{X}^b = \mathcal{X}^\chi$, то и достаточно, чтобы $R^{(1)}(\lambda) < \infty$.

<u>Необходимость</u>. Поскольку $\| \sum\limits_{\tau} |\alpha_i \lambda(e_i)| \| \le$

$\le \| \sum\limits_{\tau} |\alpha_i| |\lambda| (e_i) \|$, то $R^{(1)}(\lambda) \le R(|\lambda|) < \infty$.

<u>Достаточность</u>. $\mathcal{X}^\chi$ является КВ-пространством, поэтому для доказательства регулярности оператора L достаточно проверить, что существует такая постоянная C, что (см. [7; стр.250])

(5) $\| \sup\limits_{1\le k\le n} |Lf_k| \| \le C\rho(\sup\limits_{1\le k\le n} |f_k|)$, $f_k \in \mathcal{X}^\chi$, $n = 1, 2, \ldots$.

Сначала предположим, что $f_k \in S$, $f_k = \sum\limits_{\tau_k} \alpha_{ik} \chi_{e_{ik}}$, $k = 1, \ldots, n$.

Возьмем $\tau = \{e_i\}$ так, чтобы каждое множество e_{ik} являлось вы соединением некоторых e_i. Тогда функции f_k можно представить в виде $f_k = \sum\limits_{\tau} \beta_{ik} \chi_{e_i}$. Теперь $\| \sup\limits_k |Lf_k| \| =$ $= \| \sup\limits_k |\int f_k\,d\lambda| \| = \| \sup\limits_k | \sum\limits_{\tau} \beta_{ik} \lambda(e_i)| \| \le \| \sum\limits_{\tau} \sup\limits_k |\beta_{ik}| \lambda(e_i)| \| \le$

$\le R^{(1)}(\lambda)\rho(\sum\limits_{\tau} \sup\limits_k |\beta_{ik}| \chi_{e_i}) = R^{(1)}(\lambda)\rho(\sup\limits_k |f_k|)$.

Получим (5), причем $C = R^{(1)}(\lambda)$. Поскольку S плотно в $\mathcal{X}^b = \mathcal{X}^\chi$, неравенство (5) выполняется и при любых $f_k \in \mathcal{X}^\chi$. Итак, $L \in H_n(\mathcal{X}^\chi \to Y)$.

<u>Следствие</u>. Если $\mathcal{X}^b = \mathcal{X}^\chi$, то $R^{(1)}(\lambda) = R(|\lambda|)$.

Действительно, известно, что наименьшая из постоянных C в (5) - это $|||L|||$ [7;стр.250]. Следовательно, $|||L||| \leq R^{(1)}(\lambda)$. Но $|||L||| = R(|\lambda|)$, значит $R(|\lambda|) \leq R^{(1)}(\lambda)$. Обратное очевидно.

Две последние теоремы обобщают одну теорему из [6;стр.310].

Используя результаты этого параграфа, дополним некоторые теоремы, полученные в § 1. Будем рассматривать операторы, действующие из $\mathfrak{X}^b$ в $ba(T, \Sigma)$. За норму $\xi \in ba$ берем $v(\xi, T)$.

Заметим, что ba является К-пространством. По существу это доказано в [3;стр.180]. Модулем функции $\xi \in ba$ служит полная вариация: $|\xi|(a) = v(\xi, a)$, $a \in \Sigma$. Поскольку из $|\xi_1| \leq |\xi_2|$ следует $v(\xi_1, T) \leq v(\xi_2, T)$, то норма в ba монотонна. Следовательно, ba - КВ-линеал. Далее, при любых $\xi_1, \xi_2 \geq 0$ выполняется $v(\xi_1 + \xi_2, T) = v(\xi_1, T) + v(\xi_2, T)$ (свойство аддитивности нормы). Но КВ-линеал с аддитивной нормой является КВ-пространством [7;стр.214]. Итак, ba является КВ-пространством и мы можем положить в теоремах этого параграфа $Y = ba$.

Выясним, что представлает собой в этом случае функция $|\lambda|$.

Функция λ множеству $e \in \Lambda_0$ ставит в соответствие элемент пространства ba, который мы обозначим через $\lambda(\cdot, e)$. Таким образом, векторнозначной функции λ соответствует скалярная функция $\lambda(a, e)$, $a \in \Sigma$, $e \in \Lambda_0$. Оператор, устанавливающий это соответствие, обозначим через $\mathcal{J}: \mathcal{J}\lambda = \lambda(\cdot, \cdot)$.

Имеем $\lambda^+(e) = \sup\limits_{e' \subset e} \lambda(e')$. Это значит, что

$$(6) \quad (\mathcal{J}\lambda^+)(a, e) = \sup\{\lambda(a_1, e'_1) + \ldots + \lambda(a_m, e'_m)\}$$

где $\sup$ берется по всем n, всем $e_i' \subset e'$ и всем попарно непересекающимся $a_i \subset a$ [3;стр.180]. (Заметим, что в [3] выдвинуто требование, чтобы соединение множеств a_i было равно a. Однако оно является излишним.)

Фиксируем $\bar{a}_1 \in \Sigma$, $\bar{e}_1 \in \Lambda_0$. Пусть Λ_1 - класс всех измеримых подмножеств множества $\bar{e}_1$. Аналогичный смысл имеет и Σ_1. Рассмотрим декартово произведение $(\bar{a}_1 \times \bar{e}_1, \Sigma_1 \times \Lambda_1)$. $\Sigma_1 \times \Lambda_1$ - это алгебра множеств, представимых в виде конечного соединения попарно непересекающихся прямоугольников $a \times e$, $a \in \Sigma_1$, $e \in \Lambda_1$ [3;стр.203]. Соединение любых двух прямоугольников можно представить как соединение прямоугольников с попарно непересекающимися "основаниями":

$$(a' \times e') \cup (a'' \times e'') = (a' - a'' \times e') \cup (a'a'' \times e' \cup e'') \cup (a'' - a' \times e'').$$

Значит $\Sigma_1 \times \Lambda_1$ - алгебра множеств, представимых в виде конечного соединения прямоугольников с попарно непересекающимися "основаниями".

Функцию $\lambda(\cdot, \cdot)$ можно рассматривать как функцию одного переменного, определенную на $\Sigma_1 \times \Lambda_1$. Тогда имеет смысл

$$(7) \quad \lambda^+(\bar{a}_1 \times \bar{e}_1) = \sup\{\lambda(c_1) + \ldots + \lambda(c_n)\},$$

где $\sup$ берется по всем конечным системам прямоугольников c_i, $c_i \subset \bar{a}_1 \times \bar{e}_1$, с попарно непересекающимися "основаниями".

Сопоставляя (6) с (7) заключаем, что $(\mathcal{J}\lambda^+)(\bar{a}_1, \bar{e}_1) = \lambda^+(\bar{a}_1 \times \bar{e}_1)$. Аналогичный результат получается и для λ^-. Следовательно,

$$(8) \quad (\mathcal{J}|\lambda|)(\bar{a}_1, \bar{e}_1) = |\lambda|(\bar{a}_1 \times \bar{e}_1) = v(\lambda, \bar{a}_1 \times \bar{e}_1), \bar{a}_1 \in \Sigma, \ \bar{e}_1 \in \Lambda_0.$$

Теперь легко дополнить результаты § 1. Ограничимся одним примером.

Теорема 10. Пусть функция $\lambda(a, e)$, $a \in \Sigma$, $e \in \Lambda$. удовлетворяет условиям: 1) $\lambda(a, \cdot)$ конечно-аддитивна при каждом a; 2) $\lambda(\cdot, e) \in ba$ при каждом e; 3) $\ell_1 = R[v(\lambda, Tx\cdot)] < \infty$.

Представление операторов класса $H_K(\mathfrak{X}^b \to ba)$ дается соотношением $(Lf)(a) = \int f d\lambda(a, \cdot)$. При этом $(|L|f)(a) = \int f d|\lambda|(a, \cdot)$, $|||L||| = \ell_1$.

Доказательство. Заметим, что $\ell_1 = \sup\limits_{a \in \Sigma} R[v(\lambda, a x\cdot)]$.

Основные утверждения теоремы получаются сопоставлением соотношения (8) с теоремами 8 и 2. Подробнее остановимся на доказательстве равенства $|||L||| = \ell_1$.

Оператор $|L|$ положителен, поэтому

$$|||L||| = \sup \| |L| f \|, \quad \rho(f) \le 1, \quad f \ge 0 \qquad [7;\text{стр.}245].$$

Далее, если $\xi \in ba(T, \Sigma)$, $\xi \ge 0$, то $v(\xi, T) = \sup\limits_{a \in \Sigma} |\xi(a)|$.

Обе нормы в пространстве ba совпадают для положительных функций.

Поэтому при вычислении нормы оператора $|L|$ можно воспользоваться теоремой 2. Привлекаля соотношение (8), получим

$$|||L||| = \sup_{a \in \Sigma} R[v(\lambda, a x \cdot)] = \ell_1 .$$

§ 3. Операторы с абстрактной нормой. Пусть Y является К-пространством (наличие нормы в Y не предполагается). Класс аддитивных операторов, действующих из $\mathfrak{X}^b$ в Y, и таких, что

$$|L|_a = \sup_{\rho(f) \le 1} |Lf| < +\infty ,$$

обозначим через $H_a(\mathfrak{X}^b \to Y)$. $|L|_a \in Y$ называем абстрактной нормой оператора L [7;стр.246].

Теория операторов класса H_a аналогична теории операторов из H_b (см. § 1). Роль, которую в § 1 играла сходимость по норме, здесь играет так называемая (κ) -сходимость. Последовательность $y_n \in Y$ (κ) -сходится к $y \in Y$, если существуют $y_0 \in Y$ и $\alpha_n \to 0$ такие, что $|y_n - y| < \alpha_n y_0$.

Аналогично определению 1 выскажем

<u>Определение 3</u>. $R^{(2)}(\lambda) = \sup_{\tau} \sup_{\rho(\alpha)\leq 1} |\sum_{\tau} \alpha_i \lambda(e_i)|$.

Пусть $R^{(2)}(\lambda) < +\infty$. Тогда λ порождает оператор класса $H_a(\mathfrak{X}^b \to Y)$. Действительно, для $\varphi = \sum_{\tau} \alpha_i \chi_{e_i}$ мы можем положить, как и в доказательстве теоремы 1, $L\varphi = \int \varphi d\lambda = \sum_{\tau} \alpha_i \lambda(e_i)$. Пусть $f \in \mathfrak{X}^b$, $\varphi_n \in S$, $\rho(f - \varphi_n) \to 0$. Используя (κ) -полноту К-пространства [7;стр.143], легко докажем существование $(\kappa)\int f d\lambda = (\kappa)-\lim_n \int \varphi_n d\lambda$, не зависящего от выбора последовательности φ_n. Далее, как и в теореме 1, получим $|(\kappa)\int f d\lambda| \leq R^{(2)}(\lambda)\rho(f)$. Теперь, если положить $Lf = (\kappa)\int f d\lambda$, то $L \in H_a(\mathfrak{X}^b \to Y)$, $|L|_a \leq R^{(2)}(\lambda)$.

Перефразируя таким образом доказательство теоремы 1, получим

<u>Теорему 11</u>. Операторы класса $H_a(\mathfrak{X}^b \to Y)$ имеют аналитическое представление $Lf = (\kappa)\int f d\lambda$, где $R^{(2)}(\lambda) < \infty$. При этом $|L|_a = R^{(2)}(\lambda)$.

Легко получить аналоги и других теорем. Сделаем это для теоремы 7.

Пусть $\mathfrak{Z}$ -произвольное нормированное пространство. Норму в сопряженном пространстве $\mathfrak{Z}^*$ будем обозначать через $\|\cdot\|_*$.

Пусть функция множества λ конечно-аддитивно отображает Λ_0 в $\mathcal{Z}^*$.

<u>Определение 4</u>. $R^{(3)}(\lambda) = \sup\limits_{\tau} \sup\limits_{\rho(\alpha)\le 1} \left| \sum\limits_{\tau} \alpha_i \|\lambda(e_i)\|_* \right|$.

Вполне аналогично тому, как это было сделано в [1;стр.86], можно показать, что $R^{(3)}(\lambda) = \sup\limits_{\tau} \sup\limits_{\rho(\alpha)\le 1} \sum\limits_{\tau} |\alpha_i| \, \|\lambda(e_i)\|_* = R^{(3)}[v(\lambda)]$.

Поскольку $v(\lambda)$ - неотрицательная скалярная функция, то $R^{(3)}[v(\lambda)] = R[v(\lambda)]$.

Пусть $R^{(3)}(\lambda) < \infty$. Функция λ каждому $e \in \Lambda_0$ ставит в соответствие функционал $z^* \in \mathcal{Z}^*$. Обозначим его через $\lambda(\cdot, e)$. Иначе говоря, $\lambda(z, e) = z^* z$. Тогда $|\lambda(z,e)| \le \|\lambda(\cdot,e)\|_* \|z\|$. Далее, поскольку $\|\lambda(\cdot, e)\|_* \le v(\lambda, e)$, то $|\lambda(z,e)| \le v(\lambda, e)\|z\|$. Если положить $Lz = \lambda(z, \cdot)$, то $L \in H_a[\mathcal{Z} \to (\mathcal{X}^b)^*]$, $|L|_a \le v(\lambda, \cdot)$.

Обратно, пусть дан оператор $L \in H_a[\mathcal{Z} \to (\mathcal{X}^b)^*]$. Каждому $z \in \mathcal{Z}$ соответствует $\lambda(z, \cdot) \in (\mathcal{X}^b)^*$. При каждом $e \in \Lambda_0$ получаем линейный функционал $\lambda(\cdot, e) \in \mathcal{Z}^*$. Таким образом, можно считать, что λ отображает Λ_0 в $\mathcal{Z}^*$.

По определению абстрактной нормы $|\lambda(z,e)| \le |L|_a(e)\|z\|$. Отсюда $\|\lambda(\cdot, e)\|_* \le |L|_a(e)$ и $v(\lambda) \le |L|_a$. Поскольку $|L|_a \in (\mathcal{X}^b)^*$, то $R^{(3)}(\lambda) \le R^{(3)}(|L|_a) < \infty$.

Доказана

<u>Теорема 12</u>. Аналитическое представление оператора класса $H_a[\mathcal{Z} \to (\mathcal{X}^b)^*]$ дается соотношением $Lz = \lambda(z, \cdot)$, где $R^{(3)}(\lambda) < \infty$. При этом $|L|_a = v(\lambda, \cdot)$.

И эта теорема обобщает один результат из [6;стр.329]. Можно сформулировать еще ряд теорем, обобщающих другие результаты из [6].

Определения 1 - 4 содержат различные обобщения понятия полной вариации функции множества. Каждое из них является полезным. Доказательство этого утверждения и является основной целью работы.

Литература

[1] И.И. АЛЕКСАНДРОВ: О представлении конечно-аддитивной функции множества, Comment.Math.Univ.Carolinae 7(1966), No 1,85-91.

[2] W. LUXEMBURG: Banach function spaces, Delft,1955.

[3] Н. ДАНФОРД и Дж. ШВАРЦ: Линейные операторы,Москва,1962.

[4] Н. БУРБАКИ: Теория множеств, Москва,1965.

[5] R. FULLERTON: The representation of linear operators from L^p to L, Proc.Amer.Math.Soc. 5(1954),No 5,689-696.

[6] Л.В. КАНТОРОВИЧ, Б.З.ВУЛИХ, А.Г. ПИНСКЕР: Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах,Москва, 1950.

[7] Б.З. ПИНСКЕР: Введение в теорию полуупорядоченных пространств,Москва,1961.

(Received December 3, 1966)