Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

K. K. Mokrishchev

К вопросу о бесконечно малых изгибаниях тора

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 8 (1967), No. 2, 331--333

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105116

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

8,2 (1967)

К ВОПРОСУ О БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ИЗГИБАНИЯХ ТОРА

К.К. МОКРИЩЕВ, Ростов на Дону

Целью этой заметки является доказательство следующего утверждения:

если диаграмма вращений бесконечно малого изгибания куска поверхности тора является минимальной поверхностью, то она есть часть прямого геликоида.

Зададим поверхность тора параметрическими уравнениями:

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \left(a + \dfrac{\varepsilon}{ch\,u}\right)\cos v\,, \\ y = \left(a + \dfrac{\varepsilon}{ch\,u}\right)\sin v\,, \\ x = th\,u\,, \end{cases}$$

где $a = const > 1$, $\varepsilon = +1$ для области положительной кривизны, $\varepsilon = -1$ для области отрицательной кривизны.

Коэффициенты метрической формы, символы Христофелля второго рода и коэффициенты второй основной формы тора (1) представляются формулами:

$$E = \frac{1}{ch^2 u}\,,\quad F = 0\,,\quad G = \frac{(\varepsilon + a\,ch\,u)^2}{ch^2 u}\,,\quad \sqrt{EG - F^2} = \frac{\varepsilon + a\,ch\,u}{ch^2 u}\,,$$

$$\Gamma^1_{11} = -th\,u\,,\qquad \Gamma^2_{11} = 0\,,$$

$$\Gamma^1_{12} = 0\,,\qquad \Gamma^2_{12} = -\frac{\varepsilon\,sh\,u}{(\varepsilon + a\,ch\,u)ch\,u}\,,$$

$$\Gamma^1_{22} = \frac{\varepsilon(\varepsilon + a\,ch\,u)sh\,u}{ch\,u}\,,\qquad \Gamma^2_{22} = 0\,,$$

$$L = \frac{\varepsilon}{ch^2 u}\,,\qquad M = 0\,,\qquad N = \frac{\varepsilon + a\,ch\,u}{ch^2 u}\,.$$

Основная системе дифференциальных уравнений теории бесконечно малых изгибаний поверхностей имеет вид [1]:

$$(2)\quad \begin{cases} L\gamma - 2M\alpha + N\beta = 0, \\ \alpha_v - \gamma_u = \Gamma_{11}^1\gamma - 2\Gamma_{12}^1\alpha + \Gamma_{22}^1\beta, \\ \alpha_u - \beta_v = \Gamma_{11}^2\gamma - 2\Gamma_{12}^2\alpha + \Gamma_{22}^2\beta, \end{cases}$$

а средняя кривизна диаграммы вращений вычисляется в общем случае по формуле [2]:

$$\tilde{H} = -\frac{1}{2(\beta\gamma-\alpha^2)(EG-F^2)}\begin{vmatrix} E & F & G \\ L & M & N \\ \beta & \alpha & \gamma \end{vmatrix}.$$

Поэтому, если диаграмма вращений бесконечно малого изгибания куска поверхности тора будет минимальной поверхностью, то, учитывая, что $F = M = 0$, получим

$$\alpha(EN - LG) = 0,$$

или

$$\alpha\,\frac{\varepsilon + a\,ch\,u}{ch^3 u}\,a = 0,$$

но так как $\varepsilon + a\,ch\,u > 0$, то $\alpha = 0$. Теперь система (2) упрощается и принимает вид

$$\begin{cases} \gamma + \varepsilon(\varepsilon + a\,ch\,u)\beta = 0, \\ \gamma_u = 2\,th\,u \cdot \gamma, \\ \beta_v = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{A\,ch^2 u}{\varepsilon(\varepsilon + a\,ch\,u)}, \quad \gamma = A\,ch^2 u, \quad A = const.$$

Чтобы найти диаграмму вращений

$$\bar{y} = \{X, Y, Z\}$$

онратимся к формулам [1]:

$$\begin{cases} \bar{y}_u = \alpha \bar{x}_u - \beta \bar{x}_v , \\ \bar{y}_v = \gamma \bar{x}_u - \alpha \bar{x}_v , \end{cases}$$

которые, после несложных вычислений, дают

$$\begin{cases} X = - A \varepsilon \operatorname{sh} u \sin v , \\ Y = A \varepsilon \operatorname{sh} u \cos v , \\ Z = A v , \end{cases}$$

или

$$Z = A (\pi - \operatorname{arctg} \frac{X}{Y}) ,$$

а это - прямой геликоид.

Замечание. Последнее уравнение не содержит ε, поэтому, любой замкнутой области на части поверхности тора положительной кривизны и любой замкнутой области на части поверхности тора отрицательной кривизны, соответствует часть геликоида, заключенная между плоскостями

$$Z = 0 , \quad Z = 2 \pi A$$

и точке тора, приближающейся к какой-либо параболической точке его $(u \to \infty)$ соответствует на этой части геликоида точка, уходящая в бесконечность.

Цитированная литература

[1] Н.В. ЕФИМОВ: Качественные вопросы теории деформаций поверхностей, УМН Ш, вып.2(24),(1948).

[2] П.Г. КОЛОВОВ: О бесконечно малом изгибании одного класса поверхностей, Тезиси докладов второй всесоюзной геометрической конференции, Харьков,(1964).

(Received December 12,1966)