Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

István Juhász

Замечания об одной теореме Б. Поспишила

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 8 (1967), No. 2, 231--247

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105107

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
8,2 (1967)

ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ Б. ПОСПИШИЛА

И. ЮХАС (I.JUHÁSZ) , Будапешт

В работе [1] Б. Поспишил доказал следующую теорему: В компактификации Чеха-Стоуна дискретного пространства мощности $\mathfrak{m}$ существуют $\exp \exp \mathfrak{m}$ точек с характером $\exp \mathfrak{m}$. Хотя этот результат может быть сформулирован внутри "чистой" теории множеств, его доказательство существенно опирается на нетривиальные топологические факты.

В § 1 приводятся две топологических теоремы; результат Поспишила является непосредственным следствием каждой из этих теорем.

В § 2 доказывается теорема, которая дает частное улучшение теоремы Поспишила. Но метод доказательства этой теоремы принадлежит уже комбинаторной теории множеств.

В § 3 выясним теоретико-множественный смысл наших результатов и дадим точное описание характеров точек в стоун-чеховском наросте дискретного пространства - при предположении о обобщеной континуум-гипотезы. Наконец поставим некоторые нерешенные проблемы.

В заключение я хочу выразить мою благодарность A. Hajnal-у за некоторые его ценные замечания.

§ 0. Обозначения и определения.

Через R, R', S и S' обозначаются топологические пространства. Пусть

$$f : R \to R'$$

непрерывное отображение пространства R на R'. f называется бикомпактным в точке $y \in R'$, если $f^{-1}(y)$ - бикомпакт, и просто бикомпактным, если f - бикомпактно для всех $y \in R'$. Отображение f называется полуоткрытым, если для любого открытого и непустого множества $G \subset R$ внутренность $f(G)$ не пуста. Мы скажем, что f псевдооткрыто, если для любого $y \in R'$ и для любого открытого $G \supset f^{-1}(y)$, точка y является внутренней для $f(G)$. Наконец f называется неприводимым, если никакое собственное замкнутое подмножество пространства R не отображается на все R'.

Легко видеть, что и открытые и замкнутые отображения являются псевдооткрытыми, далее неприводимое и замкнутое отображение - всегда полуоткрыто.

Через m, n, p и q обозначаем кардинальные числа. N_m - это дискретное пространство мощности m, βN_m - его стоун-чеховское расширение и $X_m = \beta N_m \setminus N_m$.

Для любого множества H, через $|H|$ обозначается его мощность; через $[H]^2$ обозначим множество всех двухэлементных подмножеств $\{x, y\} \subset H$.

Через $\mathfrak{F}(H)$ обозначается множество всех ултрафильтров из H; как известно, если $|H| = m \geq \aleph_0$, то

$$|\mathfrak{F}(H)| = |\beta N_m| = \exp \exp m .$$

Базой ултрафильтра u называется система $\mathfrak{s} \subset u$ такая, что для любого $M \in u$ существует $N \in \mathfrak{s}$ так, что $N \subset M$. Наименьшая мощность всевозможных баз ултрафильтра u обозначается через $\chi(u)$. Наименьшая мощность элементов ултрафильтра u обозначается через $p(u)$.

Характером $\chi(x, R)$ точки x в пространстве R называется наименьшее кардинальное число такое, что существует фундаментальная система окрестностей точки x такой мощности. Известно, что в бикомпактном R, $\chi(x, R)$ будет и наименьшая мощность таких систем открытых множеств, пересечение всех элементов которых содержит только точку x.

§ 1. Подробный анализ оригинального доказательства Поспишила из [1] привел нас к следующему результату:

Теорема 1. Пусть $f: R \to R'$ псевдооткрытое (непрерывное) и бикомпактное в точке $y \in R'$ отображение пространства R на R'; пусть далее $\mathfrak{m}, \mathfrak{n} \geq \aleph_0$ -кардинальные числа, $\mathfrak{m} \geq \mathfrak{n}$, если $\mathfrak{m}$ регулярно и $\mathfrak{m} > \mathfrak{n}$ если $\mathfrak{m}$ сингулярно. Предположим, что существует система $\mathfrak{U}$ мощности $\mathfrak{m}$ окрестностей точки y такая, что пересечение $\mathfrak{n}$ различных элементов системы $\mathfrak{U}$, и даже каждое конечное обединение таких пересечений уже не являются окрестностями точки y. Тогда существует точка $x \in f^{-1}(y)$, для которой

$$\chi(x, R) \geq \mathfrak{m} .$$

Доказательство. Пусть сначала $y \in M \subset R'$ и предположим, что M не является окрестностью точки y. Из псевдооктрытости отображения f следует тогда, что

$$f^{-1}(y) \not\subset \operatorname{Int} f^{-1}(M) ,$$

значит

$$f^{-1}(y) \setminus \operatorname{Int} f^{-1}(M) \neq \emptyset ,$$

ведь

$$y \notin \operatorname{Int} M \supset \operatorname{Int}\{f(\operatorname{Int} f^{-1}(M))\} .$$

Отсюда и из условий теоремы вытекает, что если $\mathfrak{U}_i \subset \mathfrak{U}$,

$|\mathfrak{U}_i| = \mathfrak{m}$ и $\cap \mathfrak{U}_i = M_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, то

$$\emptyset \neq f^{-1}(y) \setminus \operatorname{Int} f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{k} M_i) \subset f^{-1}(y) \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \operatorname{Int} f^{-1}(M_i) =$$
$$= \bigcap_{i=1}^{k} [f^{-1}(y) \setminus \operatorname{Int} f^{-1}(M_i)] = \bigcap_{i=1}^{k} [f^{-1}(y) \setminus \operatorname{Int} (\cap f^{-1}(\mathfrak{U}_i))],$$

где

$$f^{-1}(\mathfrak{U}_i) = \{ f^{-1}(A) : A \in \mathfrak{U}_i \} .$$

Другими словами: замкнутые множества вида

$$f^{-1}(y) \setminus \operatorname{Int} (f^{-1}(\mathfrak{U}')) ,$$

где $\mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}$ и $|\mathfrak{U}'| = \mathfrak{m}$,

образуют центрированную систему в бикомпакте $f^{-1}(y)$ и поэтому существует точка $x \in f^{-1}(y)$, для которой

$$x \notin \operatorname{Int} (\cap f^{-1}(\mathfrak{U}')) ,$$

если $\mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}$ и $|\mathfrak{U}'| = |f^{-1}(\mathfrak{U}')| = \mathfrak{m}$.

Этот факт может быть сформулирован и следующим образом: хотя все элементы системы $f^{-1}(\mathfrak{U})$ являются окрестностями точки x, пересечение $\mathfrak{m}$ таких окрестностей уже не будет окрестностью x.

Пусть $\mathfrak{V}$ - фундаментальная система окрестностей точки x, и пусть

$$\mathfrak{U}_B = \{ G : G \in \mathfrak{U} \text{ и } f^{-1}(G) \supset B \} \quad (B \in \mathfrak{V}) .$$

Из сказанного выше следует, что $|\mathfrak{U}_B| < \mathfrak{m}$, для всех $B \in \mathfrak{V}$. Но

$$\mathfrak{U} = \bigcup_{B \in \mathfrak{V}} \mathfrak{U}_B ,$$

и поэтому

$$\mathfrak{m} = |\mathfrak{U}| \leq \sum_{B \in \mathfrak{V}} |\mathfrak{U}_B| ,$$

и отсюда получится $|\mathfrak{V}| \geq \mathfrak{m}$, что в силу произвольности $\mathfrak{V}$ в самом деле дает нам

$$\chi(x, R) \geq \mathfrak{m} .$$

Следствие. Пусть $f: R \to \underset{\alpha \in A}{X} R_\alpha$ псевдооткрытое и бикомпактное отображение пространства R на топологическое произведение T_1 -пространств R_α, где $|A| \geq \aleph_0$ и $|R_\alpha| \geq 2$, для всех $\alpha \in A$. Тогда для любого $y = (y_\alpha) \in \underset{\alpha \in A}{X} R_\alpha$ существует точка $x \in f^{-1}(y)$, для которой

$$\chi(x, R) \geq |A|.$$

Доказательство. В самом деле, пусть $x_\alpha \in R_\alpha$ и $x_\alpha \neq y_\alpha$ для любого $\alpha \in A$. Пусть далее $V_\alpha = \pi_\alpha^{-1}(R_\alpha \setminus \{x_\alpha\})$ $(\alpha \in A)$, где π_α обозначает проекцию на R_α. Легко видеть, что $m = |A|$, $n = \aleph_0$ и $\mathcal{U} = \{V_\alpha : \alpha \in A\}$ удовлетворяют условиям теоремы 1, ведь пересечение $\aleph_0$ окрестностей точки y из $\mathcal{U}$ уже нигде не плотно в $\underset{\alpha}{X} R_\alpha$.

Из этого следствия легко выводится уже теорема Поспишила, если взять непрерывное и сюрективное отображение

$$f: \beta N_m \to D^{\exp m} = \underset{\alpha \in A}{X} D_\alpha \quad (D_\alpha = \{0, 1\},\ |A| = \exp m),$$

которое существует, так как $D^{\exp m}$ содержит плотное подмножество мощности m, и которое замкнутое и бикомпактное.

Для второй теоремы нам понадобятся две леммы.

Лемма 1. Пусть $f: R \to R'$, непрерывное и бикомпактное отображение пространства R на R'. Тогда существует такое замкнутое подмножество $S \subset R$, для которой сужение $f|S: S \to R'$ тоже сюрективно - но уже неприводимо.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ - множество всех таких замкнутых подмножеств $F \subset R$, для которых $f(F) = R'$. Тогда $R \in \mathfrak{M} \neq \emptyset$. Пусть $\{F_\alpha\}$ - некоторая цепь - по выключению - элементов множества $\mathfrak{M}$ и $F =$

$= \cap \{F_\alpha\}$. Докажем, что $F \in \mathfrak{M}$. В самом деле, F замкнуто, и если $y \in R'$, то все множества вида $f^{-1}(y) \cap \cap F_\alpha$ являются непустыми и также образуют цепь; но отсюда в силу бикомпактности $f^{-1}(y)$ получается

$$\bigcap_\alpha [f^{-1}(y) \cap F_\alpha] = f^{-1}(y) \cap F \neq \emptyset,$$

значит и $y \in f(F)$, итак $f(F) = R'$. Применив теперь лемму Куратовского-Цорна на систему $\mathfrak{M}$ получится, что в $\mathfrak{M}$ содержится минимальное по включению множество S, что и требовалось, ведь легко видеть, что f является уже неприводимым на S.

Лемма 2. При полуоткрытом и замкнутом отображении $f: R \to R'$ канонически замкнутые множества переходят в канонически замкнутые.

Доказательство. Пусть $F = \overline{G}$ канонически замкнутое подмножество пространства R, $G = \operatorname{Int} F$. Пусть $f(F) = F'$ и $\operatorname{Int} F' = G'$. Нам надо показать, что $F' \subset \overline{G'}$.

Рассмотрим поэтому любую точку $z \in F'$, где $f(x) = z$ и $x \in F$, и пусть V - произвольная окрестность z. Тогда существует окрестность U точки x, для которой $f(U) \subset V$. Так как $x \in \overline{G}$, то $U \cap G \neq \emptyset$, и из полуоткрытости f вытекает

$$\emptyset \neq \operatorname{Int} f(U \cap G) \subset f(U) \cap \operatorname{Int} F' \subset V \cap G'.$$

Это значит, что любая окрестность $V \ni z$ пересекает G', то есть $z \in \overline{G'}$, что и требовалось.

Основная идея доказательства следующей теоремы принадлежит В.А. Ефимову.

Теорема 2. Пусть $m \geq \aleph_0$ и

$$f : R \to D^{m}$$

замкнутое и бикомпактное отображение регулярного пространства R на D^{m}. Тогда существует замкнутое подмножество $F \subset R$ мощности $\exp m$ такое, что для любой точки $x \in F$,

$$\chi(x, R) \geq \chi(x, F) \geq m .$$

<u>Доказательство</u>. Прежде всего нам понадобится понятие σ-системы, введенное Б.А. Ефимовым. Пусть x – некоторая точка пространства S. σ-системой точки x в S называется произвольная система γ канонических замкнутых подмножеств пространства S, удовлетворяющая следующим двум утверждениям:

(i) $Z \in \gamma \Rightarrow x \in Z$;

(ii) если U – произвольная окрестность точки x, то существует $Z \in \gamma$, для которого $Z \subset U$.

Наименьшее кардинальное число σ-систем точки x в S называется σ-характером точки x в S, и обозначается через $\sigma(x, S)$.

Легко видеть, что в регулярном пространстве S всегда $\sigma(x, S) \leq \chi(x, S)$. В то же время, в D^{m}: $\sigma(x, D^{m}) = \chi(x, D^{m})$. В самом деле, пусть γ – σ-система точки x из D^{m} мощности $\sigma(x, D^{m})$. В силу результата Б.А. Ефимова (см.[2], Теорема 4) каждое канонически замкнутое подмножество D^{m} является G_{σ}-множеством. Отсюда следует, что $\{x\}$ получается пересечением не больше чем $|\gamma| \cdot \aleph_0 = |\gamma| = \sigma(x, D^{m})$ открытых множеств, что в силу бикомпактности пространства D^{m} дает нам $\chi(x, D^{m}) = \sigma(x, D^{m})$.

Вернемся теперь к доказательству теоремы. В силу леммы

1 существует замкнутое подмножество $F \subset R$ такое, что $f(F) = D^{m}$ и $f \mid F$ уже неприводимо. Очевидно, что $|F| \geq |D^{m}| = \exp m$. Как мы заметили в § 0, $f \mid F$ является полуоткрытым (и замкнутым) отображением и поэтому возможно воспользоваться леммой 2 в случае отображения $f \mid F : F \longrightarrow D^{m}$: канонически замкнутые подмножества пространства F переходят при $f \mid F$ в канонически замкнутые.

Докажем, что для любого $x \in F$ σ-система γ точки x в F переходит при $f \mid F$ в σ-систему $f(\gamma) = \{ f(A) : A \in \gamma \}$ точки $f(x)$ в D^{m}. В самом деле, каждый элемент системы $f(\gamma)$ является канонически замкнутым и содержит точку $f(x)$. Чтобы доказать (ii) на $f(\gamma)$, возьмем произвольную окрестность U точки $f(x)$ и такую окрестность V точки x, что $f(V) \subset U$. Если теперь взять $Z \in \gamma$ так, что $Z \subset V$, то

$$f(Z) \subset f(V) \subset U,$$

что и требовалось.

Из этих соображений сразу получается нижеследующее неравенство, для любого $x \in F$:

$$\chi(x, R) \geq \chi(x, F) \geq \sigma(x, F) \geq \sigma(f(x), D^{m}),$$

итак утверждение теоремы имеет место.

Если теперь снова рассматривать сюрективное отображение $f : \beta N_{m} \longrightarrow D^{\exp m}$, то из Теоремы 2 сразу получается теорема Поспишила в следующей форме: в βN_{m} содержится замкнутое подмножество мощности $\exp \exp m$, каждая точка которого имеет характер $\exp m$.

§ 2. Главным результатом этого §-а является следующая теорема, выражающая, что в Хаусдорфовом пространстве "большой" мощности и не содержащем "много" попарно дизъюнктных открытых множеств, "почти все" точки имеют "большой" характер (см. и [3], Th.5).

Теорема 3. Пусть R – Хаусдорфово пространство, $\aleph_0 \leq \mathfrak{m} \leq \mathfrak{q}$, и предположим, что в R не содержится дизъюнктная система открытых множеств, мощности больше чем $\mathfrak{m}$. Тогда

$$|\{x : x \in R \text{ и } \chi(x, R) \leq \mathfrak{q}\}| \leq \exp \mathfrak{q} .$$

Доказательство. Пусть $\{x \in R : \chi(x,R) \leq \mathfrak{q}\} = S$, и предположим, что $|S| > \exp \mathfrak{q}$. Начальное ординальное число мощности $\mathfrak{q}$ обозначается через φ. Тогда для любой точки $x \in S$ существует последовательность типа φ: $\{U_\nu^x : \nu < \varphi\}$ открытых окрестностей точки x, все члены которой образуют базу окрестностей точки x.

Пусть (μ, ν) – некоторая упорядоченная пара ординальных чисел $\mu, \nu < \varphi$, далее

$$\mathcal{J}(\mu,\nu) = \{\{x,y\} \in [S]^2 : U_\mu^x \cap U_\nu^y = \emptyset\} .$$

Из Хаусдорфовости пространства R сразу следует, что

$$[S]^2 = \bigcup_{(\mu,\nu)\in\varphi\times\varphi} \mathcal{J}_{(\mu,\nu)} ;$$

но когда из $|S| > \exp \mathfrak{q}$ и $|\varphi \times \varphi| = \mathfrak{q}$, в силу теоремы 39 из [5], получается существование пары

$$(\mu_0, \nu_0) \in \varphi \times \varphi ,$$

и такого подмножества $H \subset S$, $|H| > \mathfrak{m}$, что

$$[H]^2 \subset \mathcal{J}_{(\mu_0,\nu_0)} .$$

Пусть теперь для любого $x \in H$

$$U_x = U_{\mu_0}^x \cap U_{\nu_0}^x \ldots$$

Из определений $\mathcal{J}(\mu_0, \nu_0)$ и H сразу получается, что

$$x, y \in H \text{ и } x \neq y$$

влечет

$$U_x \cap U_y = \emptyset ,$$

что невозможно, ведь $|H| > m$. Полученное противоречие завершает доказательство.

<u>Следствие</u>. Для любого $m \geq \aleph_0$,

$$|\{x \in \beta N_m : \exp \chi(x, \beta N_m) < \exp \exp m\}| < \exp \exp m .$$

Другими словами: Не только для многих (как в теореме Поспишила), но и почти для всех $x \in \beta N_m$ выполняется равенство

$$\exp \chi(x, \beta N_m) = \exp \exp m .$$

<u>Доказательство</u>. Пусть $m \leq q (< \exp m)$, и предположим, что $\exp q < \exp \exp m$. Из Теоремы 3 получается, что

$$|\{x \in \beta N_m : \chi(x, \beta N_m) \leq q\}| \leq \exp q < \exp \exp m .$$

Но отсюда уже сразу выводится наше утверждение, так как $\exp \exp m$ не может быть представлено в виде суммы $\exp m$ меньших его кардинальных чисел, итак

$$\sum_{\substack{m \leq q < \exp m \\ \exp q < \exp \exp m}} |\{x : \chi(x, \beta N_m) \leq q\}| < \exp \exp m .$$

Этот результат сильнее чем теорема Поспишила, если предположить обобщенную континуум-гипотезу, и так обстоит дело и при некоторых других предположениях о функции $\exp$. Так например, если предположить

$$\exp \aleph_0 = \exp \aleph_1 = \aleph_2 \quad \text{и} \quad \exp \aleph_2 = \aleph_3 = \exp \exp \aleph_0 ,$$

(эти предположения являются совместными с обычными аксиомами теории множеств), то по следствию,

$$|\{x \in \beta N_{\aleph_0} : \chi(x, \beta N_{\aleph_0}) \leq \aleph_1\}| \leq \exp \aleph_1 = \aleph_2 ,$$

значит, почти все точки из $\beta N_{\aleph_0}$ имеют характер

$$\aleph_2 = \exp \aleph_0 .$$

Все-таки, без какого-то дальнейшего предположения, нельзя улучшить этот результат в том виде, что "почти все точки из $\beta N_{\mathfrak{m}}$ имеют характер $\exp \mathfrak{m}$". В самом деле, совместно и такое предположение, что для некоторых $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{m}$: $\exp \mathfrak{n} < \exp \mathfrak{m}$ и $\exp \exp \mathfrak{n} = \exp \exp \mathfrak{m}$. Но $\beta N_{\mathfrak{m}}$ содержит открыто-замкнутое подмножество $\beta N_{\mathfrak{n}}$, как замыкание множества $N_{\mathfrak{n}} \subset N_{\mathfrak{m}}$, и в $\beta N_{\mathfrak{n}}$ для всех $\exp \exp \mathfrak{n} = \exp \exp \mathfrak{m}$ точек x

$$\chi(x, \beta N_{\mathfrak{n}}) = \chi(x, \beta N_{\mathfrak{m}}) \leq \exp \mathfrak{n} < \exp \mathfrak{m} .$$

§ 3. Хорошо известно, что пространство $\beta N_{\mathfrak{m}}$ строится как множество $\mathcal{F}(N_{\mathfrak{m}})$ всех ултрафильтров в $N_{\mathfrak{m}}$, базой топологии которого служит система множества вида

$$s(A) = \{ \mathfrak{u} \in \mathcal{F}(N_{\mathfrak{m}}) : A \in \mathfrak{u} \} ,$$

для всех $A \subset N_{\mathfrak{m}}$.

В дальнейшем точка из $\beta N_{\mathfrak{m}}$, соответствующая ультрафильтру $\mathfrak{u} \in \mathcal{F}(N_{\mathfrak{m}})$ обозначается через $\tilde{\mathfrak{u}}$. Так как $s(A) \subset s(B) \Longleftrightarrow A \subset B$, очевидно, что для любого $\mathfrak{u} \in \mathcal{F}(N_{\mathfrak{m}})$:

$$\chi(\mathfrak{u}) = \chi(\tilde{\mathfrak{u}}, \beta N_{\mathfrak{m}}) .$$

Поэтому, теорема Поспишила соотв.Следствие Теоремы 3 выражаются следующим образом:

а) $|\{ \mathfrak{u} \in \mathcal{F}(N_{\mathfrak{m}}) : \chi(\mathfrak{u}) = \exp \mathfrak{m} \}| = \exp \exp \mathfrak{m}$,

соотв.

б) $|\{ \mathfrak{u} \in \mathcal{F}(N_{\mathfrak{m}}) : \exp \chi(\mathfrak{u}) < \exp \exp \mathfrak{m} \}| < \exp \exp \mathfrak{m}$.

Функцию $p(\mathfrak{u})$ введенную в § 0 также возможно охарактеризовать посредством топологических свойств пространства βN_m:

$$p(\mathfrak{u}) = \min\{|A| : A \subset N_m,\ \tilde{\mathfrak{u}} \in \bar{A}\}\quad (= p(\tilde{\mathfrak{u}}))\ .$$

В самом деле, легко видеть, что

$$A \in \mathfrak{u} \Longleftrightarrow \tilde{\mathfrak{u}} \in \bar{A}\ .$$

<u>Теорема 4</u>. Для любого $\mathfrak{u} \in \mathcal{F}(N_m) \setminus N_m$:

$$p(\mathfrak{u}) < \chi(\mathfrak{u}) \leq \sup p(\mathfrak{u})\ .$$

<u>Доказательство</u>.

А) Пусть $p(\mathfrak{u}) = \mathfrak{n} \geq \aleph_0$ и $H \in \mathfrak{u}$, $|H| = \mathfrak{n}$; система $\mathfrak{u}(H) = \{A : A \subset H, A \in \mathfrak{u}\}$ является ультрафильтром в множестве H . В самом деле, если $A \subset H$ и $A \notin \mathfrak{u}(H)$, то $A \notin \mathfrak{u}$, и поэтому $(N_m \setminus A) \in \mathfrak{u}$, итак

$$H \cap (N_m \setminus A) = H \setminus A \in \mathfrak{u} \Longrightarrow H \setminus A \in \mathfrak{u}(H)\ .$$

Далее очевидно, что все элементы $\mathfrak{u}(H)$ имеют мощность $\mathfrak{n}$. Если $\mathfrak{b}$ - база ультрафильтра $\mathfrak{u}$, то, легко видеть, что $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{u}(H)$ есть база $\mathfrak{u}(H)$; покажем, что уже $\chi(\mathfrak{u}(H)) > \mathfrak{n}$.

Пусть $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{u}(H)$, $|\mathfrak{k}| = \mathfrak{n}$ и упорядочим все элементы системы $\mathfrak{k}$ в последовательность

$$\mathfrak{k} = \{A_\mu : \mu < \varphi\}\ ,$$

где φ - начальное ординальное число мощности $\mathfrak{n}$.

Трансфинитной индукцией определим две последовательности $\{x_\mu : \mu < \varphi\}$ и $\{y_\mu : \mu < \varphi\}$ следующим образом: пусть $x_0, y_0 \in A_0$ и $x_0 \neq y_0$.

Если уже для некоторого $\mu < \varphi$ все элементы x_ν и y_ν $(\nu < \mu)$ уже определены, возьмем множество

$$A_\mu \setminus \{x_\nu, y_\nu : \nu < \mu\},$$

которое имеет мощность m, так как $|A_\mu| = m > |\mu|$.

x_μ соотв. y_μ определяются тогда как два произвольных различных элемента этого множества.

Пусть теперь $\tilde{A} = \{x_\mu : \mu < \varphi\}$; тогда

$$H \setminus \tilde{A} \supset \{y_\mu : \mu < \varphi\}.$$

Поэтому, по нашей конструкции, для каждого $A_\mu \in k$:

$$A_\mu \not\subset \tilde{A} \quad \text{и} \quad A_\mu \not\subset H \setminus \tilde{A}.$$

Но или $\tilde{A}$, или $H \setminus \tilde{A}$ принадлежит $u(H)$, итак система k не может быть базой ултрафильтра $u(H)$, что докажет нам неравенство

$$m = p(u) < \chi(u).$$

B) Покажем, что $u(H)$ является базой ултрафильтра u. Так как $|u(H)| = \exp m = \exp p(u)$, отсюда получается второе неравенство.

В самом деле, пусть $A \in u$, тогда и $A \cap H \in u$, значит $A \supset A \cap H \in u(H)$, что и требовалось.

Из Теоремы 4 сразу вытекает следующее интересное

Следствие. Для любого $m \geq \aleph_0$, множество точек из βN_m с характером $\leq \exp \aleph_0$ содержит открытое, всюду плотное в βN_m подмножество.

Доказательство. Пусть

$$M = \cup\{\bar{A} : A \subset N_m, |A| \leq \aleph_0\}.$$

Из Теоремы 4 дается, что для любого $\tilde{u} \in M$,

$$\chi(\tilde{u}, \beta N_m) \leq \exp \aleph_0.$$

M является открытым множеством, так как $\bar{A}$ - открыто-замкнуто, если $A \subset N_m$.

Наконец, для любого множества базы вида $b(A)$ существует не более чем счетное подмножество $A' \subset A$, и тогда $s(A') = \overline{A'} \subset s(A)$, итак M в самом деле всюду плотно в βN_m.

Интересно сравнить этот результат со следствием Теоремы 3. Хотя последнее выражает, что почти все – в смысле теории множеств – точки из βN_m имеют большой характер, все-таки в смысле топологии очень мало таких точек: их множество нигде не плотно.

Другое интересное и непосредственное следствие Теоремы 4, что – при предположении обобщенной континуум-гипотезы – $p(u) = q \Longleftrightarrow \chi(u) = \exp q$, итак в этом случае каждая точка $x \in \beta N_m \setminus N_m$ имеет характер вида $\exp q$, где $\aleph_0 \leq q \leq m$. Следующая теорема дает нам точное число точек из βN_m с характером $\exp q$:

<u>Теорема 5</u>. Если предположить обобщенную континуум-гипотезу, то для любого $\aleph_0 \leq q \leq m$,

$$|\{x \in \beta N_m : \chi(x, \beta N_m) = \exp q\}| = m^q \cdot \exp \exp q .$$

<u>Доказательство</u>. Очевидно, что это равенство эквивалентно следующему:

$$|\{u \in \mathcal{F}(N_m) : p(u) = q\}| = m^q \exp \exp q .$$

Очевидно, что последнее множество ултрафильтров имеет мощность не больше чем $m^q \cdot \exp \exp q$, и по теореме Поспишила $\geq \exp \exp q$. Поэтому достаточно показать, что его мощность $\geq m^q$.

Пусть m^* – наименьшее такое кардинальное число, что $m = \sum_{\alpha \in A} m_\alpha$, где $|A| = m^*$ и $m_\alpha < m$ при $\alpha \in A$. Так, если $m = \aleph_\varphi$ то $m^* = \aleph_{cf(\varphi)}$.

Пусть далее $\mathfrak{m}^+ = \aleph_{\varphi+1}$.

Хорошо известно (см.напр.[6]), что $\mathfrak{q} < \mathfrak{m}^*$ влечет $\mathfrak{m}^{\mathfrak{q}} = \mathfrak{m}$ и $\mathfrak{m}^* \leq \mathfrak{q} \leq \mathfrak{m}$ влечет $\mathfrak{m}^{\mathfrak{q}} = \mathfrak{m}^+ = \exp \mathfrak{m}$. Поэтому для $\mathfrak{q} < \mathfrak{m}^*$ наше утверждение тривиально выполняется, так как $N_{\mathfrak{m}}$ представило в виде

$$N_{\mathfrak{m}} = \bigcup_{\alpha \in A} N_{\mathfrak{q}}^{(\alpha)} ,$$

где $|A| = \mathfrak{m}$ и при $\alpha, \alpha' \in A$, $\alpha \neq \alpha'$:

$$N_{\mathfrak{q}}^{(\alpha)} \cap N_{\mathfrak{q}}^{(\alpha')} = \emptyset .$$

По теореме Поспишила, в любом множестве $N_{\mathfrak{q}}^{(\alpha)}$ существует ультрафильтр $\mathfrak{u}_\alpha$ с $\chi(\mathfrak{u}_\alpha) = \exp \mathfrak{q}$. Как было показано в доказательстве Теоремы 4, каждое $\mathfrak{u}_\alpha$ порождает в $N_{\mathfrak{m}}$ ултрафильтр $\mathfrak{u}_\alpha^*$, для которого очевидно $\chi(\mathfrak{u}_\alpha^*) = \exp \mathfrak{q}$. Легко видеть, что при $\alpha \neq \alpha' : \mathfrak{u}_\alpha^* \neq \mathfrak{u}_{\alpha'}^*$.

Пусть теперь $\mathfrak{m}^* \leq \mathfrak{q} \leq \mathfrak{m}$. По одной теореме Тарского из [5], существует такая система $\mathfrak{h}$ подмножеств $N_{\mathfrak{m}}$, что $|\mathfrak{h}| = \mathfrak{m}^+ = \exp \mathfrak{m}$, $H \in \mathfrak{h}$ влечет $|H| = \mathfrak{m}^*$ и $\mathfrak{h}$ - почти дисьюнктно, т.е. H , $H' \in \mathfrak{h}$ и $H \neq H'$ влекут $|H \cap H'| < \mathfrak{m}^*$. Для любого $H \in \mathfrak{h}$ и $x \in H$ возьмем некоторое множество A_x мощности $\mathfrak{q}$, так что все эти множества являются попарно пересекающимися.

Пусть

$$N'_{\mathfrak{m}} = \bigcup_{\substack{H \in \mathfrak{h} \\ x \in H}} A_x \quad \text{и} \quad M_H = \bigcup_{x \in H} A_x .$$

Легко видеть, что $|N'_{\mathfrak{m}}| = \mathfrak{m}$ и $|M_H| = \mathfrak{q}$.

Возьмем для всех $H \in \mathfrak{h}$ систему $\mathfrak{k}_H$ подмножеств $S \subset M_H$, где $S \in \mathfrak{k}_H$ тогда и только тогда, если

$$|\{x : x \in H,\ |A_x \setminus S| = \mathfrak{q}\}| < \mathfrak{m}^* .$$

Легко видеть, что система k_H - центрирована, и поэтому существует ултрафильтр $v_H \supset k_H$ в M_H. Пусть теперь u_H ултрафильтр, порожденный посредством v_H. Так как каждое подмножество M_H дополнение которого имеет мощность меньше чем q очевидно принадлежит k_H,

$$p(v_H) = p(u_H) = q,$$

для всех $H \in \mathfrak{H}$. Нам нужно еще доказать, что $H_1 \neq H_2$ влечет $u_{H_1} \neq u_{H_2}$. Но в самом деле, $M_{H_1} \in u_{H_1}$ и $M_{H_2} \in u_{H_2}$, и по определению $M_{H_1} \cap M_{H_2} = \bigcup_{x \in H_1 \cap H_2} A_x$ (где $|H_1 \cap H_2| < m^*$), не является элементом ни u_{H_1}, ни u_{H_2}, так как очевидно

$$M_{H_1} \setminus M_{H_1} \cap M_{H_2} \in k_{H_1} \subset u_{H_1},$$

соотв.

$$M_{H_2} \setminus M_{H_1} \cap M_{H_2} \in k_{H_2} \subset u_{H_2}.$$

Но отсюда $M_{H_1} \notin u_{H_2}$, значит $u_{H_1} \neq u_{H_2}$.

Наконец мы поставим некоторые проблемы:

Проблема 1. Возможно ли доказать теоремы Поспишила или по крайней мере существование ултрафильтра в N_m характера $\exp m$, чисто теоретико-множественными средствами?

Проблема 2. Верно ли, что из $p(u) = m$ следует $\chi(u) = \exp m$, независимо от какой-то гипотезы о функции $\exp$?

Проблема 3. Выполняется ли неравенство

$$|\{x : \chi(x, \beta N_{\aleph_0}) < \exp \aleph_0\}| < \exp \exp \aleph_0,$$

также независимо от континуум-гипотезы?

Проблема 4. Остается ли верным утверждение Теоремы 5 без предположения обобщенной континуум-гипотезы?

Литература

[1] ...: On bicompact spaces,Publ.Fac.Sci.Univ. Masaryk,No.270(1939).

[2] B.A. ЕФИМОВ: Диадические бикомпакты,Труды ММО,14(1965), 211-247.

[3] A. HAJNAL and I. JUHÁSZ: Discrete subspaces of topological spaces,Indag.Math.(In print)

[4] A. TARSKI: Sur la décomposition des ensembles en sous-ensembles prèsque disjoint ,Fund.Math.14 (1929),205-215.

[5] P. ERDÖS and R. RADO: A partition calculus in set theory,Bull.Amer.Math.Soc.62(1956),427-489.

[6] H. BACHMANN: Transfinite Zahlen (Berlin,Springer,1955).

(Received October 20,1966)