Ladislav Procházka

Прямые суммы групп типа $\mathcal{P}^+$

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 8 (1967), No. 1, 85--114

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/105094`

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

8,1 (1967)

ПРЯМЫЕ СУММЫ ГРУПП ТИПА $\mathcal{P}^+$

Ладислав ПРОХАЗКА (Ladislav Procházka), Прага

Настоящая работа тесно примыкает к статьям автора [6] и [5]. Здесь показывается, каким образом можно применить методы из упомянутых статей к другому классу групп.

Всюду в дальнейшем идет речь только об абелевых группах. Буква p представляет всегда некоторое простое число, символ $\mathcal{P}_p$ обозначает кольцо целых p-адических чисел и $\mathcal{P}_p^+$ его аддитивную группу. Модуль (унитарный) над кольцом $\mathcal{P}_p$ будем просто называть $\mathcal{P}_p$-модулем. Группу $\mathcal{P}_p^+$ и группу с ней изоморфную будем часто считать одновременно группой и $\mathcal{P}_p$-модулем; аналогично для прямой суммы групп $\mathcal{P}_p^+$. Если G - группа без кручения и $M \subseteq G$, то символом $\mathcal{S}_G(M)$ будем обозначать наименьшую сервантную подгруппу в G содержащую M. Для произвольной группы G будет G_t периодическая часть группы G. Далее, предполагаем, что такие понятия, как p-высота элемента в группе, p-полная группа и p-сервантная подгруппа, определять не надо.

Во всей статье будем пользоваться p^k-независимостью ($1 \leq k \leq \infty$) множества M в группе без кручения G, как это было определено в [6]. Подгруппу H группы без кручения G будем считать p^∞-независимой в G (см. [5]), если H не содержит ненулевых элементов бесконечной p-высоты в H, и если каждое множество элементов из H, которое p^∞-независимо в H, также p^∞-независимо в G. Следующая лемма описывает другим образом p^{∞}-независимость подгруппы H в группе без кручения G. Притом, если A – произвольная группа без кручения, то $r_p(A)$ представляет ее p-ранг (см.[8] , определение 4).

<u>Лемма 1</u>. Пусть G – группа без кручения и H – ее подгруппа, несодержащая ненулевых элементов бесконечной p-высоты в H. Подгруппа H p^{∞}-независима в G в точности тогда, когда выполнено следующее условие: Если K – такая сервантная подгруппа в H конечного ранга, что $r_p(K) = 0$, то также $r_p(\mathcal{S}_G(K)) = 0$.

<u>Доказательство</u>. Пусть подгруппа H p^{∞}-независима в G и пусть K – такая сервантная подгруппа в H конечного ранга, что $r_p(K) = 0$. Если $g_1, g_2, \dots, g_r$ – некоторое максимальное независимое семейство элементов из K (можно предполагать, что $K \neq 0$), то $K = \mathcal{S}_H(g_1, g_2, \dots, g_r)$, и, в силу леммы 3 из [5], элементы $g_1, \dots, g_r$ p^{∞}-независимы в H. Но тогда элементы g_i $(i = 1, \dots, r)$ также p^{∞}-независимы в G и по той же лемме 3 из [5] имеем $0 = r_p(\mathcal{S}_G(g_1, \dots, g_r)) = r_p(\mathcal{S}_G(K))$.

Пусть теперь выполнено условие леммы и пусть $g_1, \dots, g_r$ – произвольное конечное семейство элементов из H, p^{∞}-независимое в H. Если $K = \mathcal{S}_H(g_1, \dots, g_r)$, то по лемме 3 из [5] имеем $r_p(K) = 0$, или, в силу предположения, $0 = r_p(\mathcal{S}_G(K)) = r_p(\mathcal{S}_G(g_1, \dots, g_r))$. Итак, элементы $g_1, \dots, g_r$ также p^{∞}-независимы в G. Следовательно, каждое (не только конечное) в H p^{∞}-независимое множество из H будет p^{∞}-независимым в G, или, подгруппа H p^{∞}-независима в G. Этим уже лемма доказана.

Лемма 2. Пусть H - p^{∞}-независимая подгруппа в группе без кручения G и пусть K - такая подгруппа в G, что $H \leq K$. Если K/H - периодическая группа, p-примарное слагаемое которой редуцировано, то подгруппа K также p^{∞}-независима в G.

Доказательство. Предположим, что в K имеется ненулевой элемент бесконечной p-высоты в K. Так как K/H - периодическая, то отсюда следует существование ненулевого $h \in H$ такого, что h - бесконечной p-высоты в K и уравнение $px = h$ неразрешимо в H. Но отсюда уже нетрудно вывести, что p-примарное слагаемое группы K/H содержит подгруппу типа $C(p^{\infty})$, и это противоречит предположению. Итак, подгруппа K не содержит ненулевых элементов бесконечной p-высоты в K.

Пусть S - такая сервантная подгруппа в K конечного ранга, что $\kappa_p(S) = 0$. Тогда $T = S \cap H$ - сервантная подгруппа в H. Так как группа K/H периодическая, то группы S, T обладают одинаковым рангом, или, $\mathcal{S}_G(T) = \mathcal{S}_G(S)$. Из соотношения $T \leq S$ имеем $\kappa_p(T) = 0$, итак, в силу p^{∞}-независимости подгруппы H в G и в силу леммы 1 должно быть $0 = \kappa_p(\mathcal{S}_G(T)) = \kappa_p(\mathcal{S}_G(S))$. Следуя опять лемму 1, можем утверждать, что подгруппа K p^{∞}-независима в G, и лемма доказана.

Лемма 3. Пусть группа без кручения G вида $G = \sum_{\iota \in I} G_{\iota}$ не содержит ненулевых элементов бесконечной p-высоты в G. Если $0 \neq g_{\iota} \in G_{\iota}$ $(\iota \in I)$, то множество $(g_{\iota}; \iota \in I)$ p^{∞}-независимо в G.

Доказательство. Достаточно показать, что в G p^{∞}-независимо каждое конечное множество $g_{\iota_1}, g_{\iota_2}, \ldots, g_{\iota_m}$. Очевидно, имеем

$$S = \mathcal{S}_G(q_{i_1}, \dots, q_{i_n}) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{S}_G(q_{i_i}) .$$

Так как в G нет элементов бесконечной p-высоты, то $h_p(\mathcal{S}_G(q_{i_i})) = 0$ $(i = 1, \dots, n)$ (см.[11], лемма 6.1), или, $h_p(S) = 0$. Теперь остается применить лемму 3 из [5] и лемма полностью доказана.

Теперь докажем несколько вспомогательных утверждений о $\mathcal{P}_p$-модулях.

Лемма 4. Пусть группа без кручения G служит одновременно $\mathcal{P}_p$-модулем и пусть H - $\mathcal{P}_p$-подмодуль в G порожденный элементами y_ι $(\iota \in I)$. Если множество $(y_\iota ; \iota \in I)$ p-независимо в группе G, то $H = \sum_{\iota \in I} \mathcal{P}_p y_\iota$, где $\mathcal{P}_p y_\iota$ $(\iota \in I)$ представляет циклический $\mathcal{P}_p$-подмодуль в G порожденный элементом y_ι.

Доказательство. Достаточно доказать, что множество $(y_\iota ; \iota \in I)$ независимо над $\mathcal{P}_p$. Пусть наоборот для некоторых y_{ι_i} $(\iota_i \in I ;\ i = 1, 2, \dots, n;\ \iota_i \neq \iota_j$ для $i \neq j)$ существуют ненулевые $\alpha_i \in \mathcal{P}_p$ $(i = 1, \dots, n)$ так, что

(1) $\quad \alpha_1 y_{\iota_1} + \alpha_2 y_{\iota_2} + \dots + \alpha_n y_{\iota_n} = 0 .$

Так как G - группа без кручения, то можно предполагать, что не все α_i $(i = 1, \dots, n)$ делятся на p (в $\mathcal{P}_p$); итак, пусть $p \nmid \alpha_1$. Если представим все α_i в виде $\alpha_i = a_i - p\beta_i$, где $0 \leq a_i < p$ и $\beta_i \in \mathcal{P}_p$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, то необходимо $0 < a_1 < p$. Отсюда и из (1) следует

$$a_1 y_{\iota_1} + \dots + a_n y_{\iota_n} = p(\beta_1 y_{\iota_1} + \dots + \beta_n y_{\iota_n}) ,$$

и это противоречит p-независимости множества $(y_\iota ; \iota \in I)$ в G. Итак, множество $(y_\iota ; \iota \in I)$ должно быть независимым над $\mathcal{P}_p$, и лемма доказана.

Если G – группа без кручения, $\emptyset \neq M \subseteq G$ и $0 \neq q \in G$, то символом $\mathcal{E}_p(g; M)$ будем обозначать точную верхнюю грань множества всех таких целых $k \geq 0$, для которых разрешимо в G некоторое уравнение вида

$$p^k x = g + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \quad ,$$

где $x_i \in M$ $(i = 1, \dots, n)$ и a_i $(i = 1, \dots, n)$ – целые рациональные числа.

<u>Лемма 5</u>. Пусть группа без кручения G содержит подгруппу H, служащую одновременно свободным счетно порожденным $\mathcal{P}_p$-модулем, пусть группа G/H периодическая и пусть подгруппа H p^∞-независима в G. Тогда можно определить умножение 1) элементов из G на числа из $\mathcal{P}_p$ так, что G станет $\mathcal{P}_p$-модулем и H его $\mathcal{P}_p$-подмодулем, причем G и H окажутся изоморфными как $\mathcal{P}_p$-модули.

<u>Доказательство</u>. Так как G – группа без кручения и для каждого простого числа $q \neq p$ подгруппа H q-полна, то необходимо группа G/H p-примарна. Тогда, в силу предложения 1.19 из [4], можно в G определить умножение на числа из $\mathcal{P}_p$ так, что G станет $\mathcal{P}_p$-модулем и H еко $\mathcal{P}_p$-подмодулем. По предположению, $\mathcal{P}_p$-модуль H имеет вид $H = \sum_{i=1}^{\omega} \mathcal{P}_p x_i$, где ω – или натуральное число, или символ ∞, и $\mathcal{P}_p x_i$ $(i = 1, 2, \dots)$ – циклические $\mathcal{P}_p$-модули. По лемме 3 множество $(x_i ; i = 1, 2, \dots)$ p^∞-независимо в H и, следовательно, также в G, так как подгруппа H p^∞-независима в G. Итак, каждый элемент x_i обладает конечной

---

1) Такое умножение существует только единственное (см.[4], § 1.)

p-высотой в G. Теперь построим методом полной индукции некоторую последовательность $y_1, y_2, \dots$ элементов из G; эта последовательность будет иметь то же число элементов как последовательность $x_1, x_2, \dots$.

Если k_1 – p-высота элемента x_1 в G, то определим $y_1 \in G$ так, что $x_1 = p^{k_1} y_1$. Ясно, что множество (y_1) p-независимо в G и $x_1 \in \{y_1\}$ (символ $\{y\}$ будет обозначать циклическую подгруппу). Пусть теперь n – натуральное число, $1 < n \leq \omega$, и пусть уже определены в G элементы $y_1, \dots, y_{n-1}$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) элементы $y_1, \dots, y_{n-1}$ p-независимы в G;

2) $x_i \in \sum_{j=1}^{n-1} \{y_j\}$ $(i = 1, \dots, n-1)$.

Положим $A_{n-1} = (y_1, \dots, y_{n-1})$ и убедимся в том, что $\mathscr{E}_p(x_n; A_{n-1}) < \infty$. В противном случае, в силу леммы 6 из [6], существовали бы $\alpha_i \in \mathcal{P}_p$ $(i = 1, \dots, n-1)$ такие, что (пользуемся записью из [6])

(2) $\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_{n-1} y_{n-1} + x_n \equiv 0 \pmod{p^\infty}_G$.

Из условия 2) имеем $\sum_{i=1}^{n-1} \{x_i\} \subseteq \sum_{j=1}^{n-1} \{y_j\}$, значит, существует натуральное число k такое, что $k y_j \in \sum_{i=1}^{n-1} \{x_i\}$ $(j = 1, \dots, n-1)$. Если умножить (2) на k, то нетрудно получить некоторую формулу вида

$$\beta_1 x_1 + \dots + \beta_{n-1} x_{n-1} + k x_n \equiv 0 \pmod{p^\infty}_G,$$

которая противоречит p^∞-независимости в G множества $(x_1, x_2, \dots)$. Итак, $\mathscr{E}_p(x_n; A_{n-1}) = k_n < \infty$. Пусть теперь

y_n - элемент из G, удовлетворяющий некоторому соотношению вида

(3) $$p^{k_n} y_n = a_1 y_1 + \dots + a_{n-1} y_{n-1} + x_n ,$$

где a_i - целые рациональные числа. По лемме 6 из [6] элементы $y_1, \dots, y_{n-1}, y_n$ p-независимы в G; притом в силу (3) $x_n \in \sum_{j=1}^{n} \{y_j\}$, или, $x_i \in \sum_{j=1}^{n} \{y_j\}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Итак, методом полной индукции можно построить последовательность $y_1, y_2, \dots$ элементов из G, обладающую следующими свойствами:

1*) Множество $(y_1, y_2, \dots)$ p-независимо в G;

2*) $x_j \in \sum_{i=1}^{\omega} \{y_i\}$ $(j = 1, 2, \dots)$.

Символом G^* обозначим $\mathcal{P}_p$-подмодуль $\mathcal{P}_p$-модуля G порожденный множеством $(y_1, y_2, \dots)$; в силу леммы 4 будет $G^* = \sum_{i=1}^{\omega} \mathcal{P}_p y_i$. Нашей целью теперь доказать, что уже $G^* = G$. Притом из 2*) следует, что $x_j \in G^*$, значит, $\mathcal{P}_p x_j \subseteq G^* (j = 1, 2, \dots)$, или, $H \subseteq G^*$. Итак, группа G / G^* p-примарна. Предположим, что существует $g \in G - G^*$. Следовательно, для некоторого натурального числа k будет $p^k g \in G^*$. Очевидно, g можно выбрать так, что $g \notin G^*$, но $pg \in G^*$. Тогда имеет место некоторая формула вида

(4) $$p g = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n ,$$

где $\alpha_i \in \mathcal{P}_p$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Если все α_i делятся на p (в $\mathcal{P}_p$), $\alpha_i = p \beta_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, то

$$p g = p (\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \dots + \beta_n y_n) ,$$

или, $g=\beta_1 y_1+\beta_2 y_2+\ldots+\beta_n y_n \in G^*$, что противоречит выбору элемента g. Итак, для некоторого i имеем $p \nmid \alpha_i$; пусть например $p \nmid \alpha_1$. Если каждое α_i представим в виде $\alpha_i = a_i + p\beta_i$, где $0 \leq a_i < p$ и $\beta_i \in \mathcal{P}_p$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то необходимо будет $0 < a_1 < p$. В силу (4) имеем

$$p\Big(g-\sum_{i=1}^{n}\beta_i y_i\Big) = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_n y_n ,$$

или, элементы $y_1, y_2, \ldots, y_n$ в G p-зависимы, так как $p \nmid a_1$. Но это противоречит условию 1*), следовательно, $G = G^* = \sum_{i=1}^{\omega} \mathcal{P}_p y_i$, или,

$$G = \sum_{i=1}^{\omega} \mathcal{P}_p y_i \cong \sum_{i=1}^{\omega} \mathcal{P}_p x_i = H .$$

Так как последнее соотношение представляет изоморфизм $\mathcal{P}_p$-модулей, то лемма полностью доказана.

Лемма 6. Пусть группа без кручения G содержит подгруппу H, служащую одновременно свободным $\mathcal{P}_p$-модулем, пусть G/H - счетная периодическая группа и пусть подгруппа H p^∞-независима в G. Тогда опять имеет место утверждение леммы 5.

Доказательство. В каждом смежном классе из G/H определим некоторого представителя и пусть M - множество всех таких-то элементов; множество M счетно. Подгруппу H представим в виде $H = \sum_{\iota \in I} \mathcal{P}_p x_\iota$. Так как группа G/H периодическая, то в I имеется счетное множество I_1 такое, что для каждого $g \in M$ существует натуральное число k так, что $k g \in \sum_{\iota \in I_1} \mathcal{P}_p x_\iota$. Положим $I_2 = I - I_1$ и определим в G подгруппы $H_1 = \sum_{\iota \in I_1} \mathcal{P}_p x_\iota$, $H_2 = \sum_{\iota \in I_2} \mathcal{P}_p x_\iota$ и на конец $G_1 = \{H_1, M\}$. Прежде всего $G = \{H, M\} = \{G_1, H_2\}$.

Далее, имеем $G_1 \cap H_2 = 0$, так как если $g \in G_1 \cap H_2$, то для некоторого натурального числа k будет $kg \in \in H_1 \cap H_2 = 0$, или, $g = 0$. Этим мы доказали, что

(5) $$G = G_1 \dotplus H_2 \ .$$

Так как $H = H_1 \dotplus H_2$ и подгруппа H p^∞-независима в G, то в силу леммы 1 подгруппа H_1 также p^∞-независима в G и, следовательно, в G_1. Из (5) следует $G/H \cong \cong G_1/H_1$, или, к группам G_1 и H_1 можно применить лемму 5. Итак, G_1 и H_1 изоморфны как $\mathcal{P}_p$-модули. Если теперь напомним, что H_2 можно считать $\mathcal{P}_p$-модулем, то из (5) уже следует $\mathcal{P}_p$-изоморфизм $G = G_1 \dotplus H_2 \cong H_1 + H_2 = H$, и лемма доказана.

<u>Замечание</u>. Лемма 5 представляет частный случай леммы 6, так как если выполнены условия леммы 6, то группа G/H счетна. В самом деле, пусть $H = \sum_{i=1}^{\omega} \mathcal{P}_p x_i$; тогда положим $H_n = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}_p x_i$, $H_n^* = \sum_{i>n} \mathcal{P}_p x_i$ и $G_n = \mathcal{S}_G(H_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Ясно, что $G/H = \bigcup_{n=1}^{\omega} (\{G_n, H\}/H)$, причем

$$\{G_n, H\}/H = (G_n \dotplus H_n^*)/(H_n \dotplus H_n^*) \cong G_n/H_n \ .$$

Итак, G_n/H_n должна быть p-примарной группой с конечным нижним слоем, как следует из леммы 3 и 13 из [9]. Следовательно, каждая из групп $\{G_n, H\}/H$ счетна, или, группа G/H сама счетна.

<u>Лемма 7</u>. Пусть в группе без кручения G имеется подгруппа H, служащая одновременно свободным $\mathcal{P}_p$-модулем, пусть G/H - периодическая группа, являющаяся расширением группы с ограниченными порядками элементов при помощи

счетной группы, и пусть подргуппа H p^{∞}-независима в G. Тогда опять имеет место утверждение леммы 5.

<u>Доказательство</u>. Прежде всего ясно, что группа G/H p-примарна. По предположению существует подгруппа G_0 в G такая, что $H \subseteq G_0 \subseteq G$, порядки группы G_0/H ограничены и группа G/G_0 счетна. Итак, для некоторого натурального числа k будет $p^k G_0 \subseteq H \subseteq G_0$. В силу 1.19 из [4] можно G_0 считать $\mathcal{P}_p$-модулем, причем $\mathcal{P}_p$-модуль H будет его $\mathcal{P}_p$-подмодулем. Тогда $p^k G_0$, как подмодуль свободного $\mathcal{P}_p$-модуля H, должен быть по лемме 15 из [3] также свободным $\mathcal{P}_p$-модулем. Пользуясь теоремой 1 из [2] нетрудно вывести, что свободный $\mathcal{P}_p$-модуль $p^k G_0$ обладает тем же числом прямых циклических слагаемых, как свободный $\mathcal{P}_p$-модуль H. Итак, $\mathcal{P}_p$-модуль $p^k G_0$ и H, и, следовательно, также $\mathcal{P}_p$-модули G_0 и H изоморфны. Значит, G_0 является свободным $\mathcal{P}_p$-модулем. Притом по лемме 2 подгруппа G_0 p^{∞}-независима в G, так как порядки группы G_0/H ограничены. Теперь достаточно применить к группе G и ее подгруппе G_0 лемму 6, и лемма полностью доказана.

Группу без кручения G будем называть группой типа $\mathcal{P}^+$ (смотри [7]), если существует простое число p такое, что $G \cong \mathcal{P}_p^+$. Далее, символом m условимся всюду обозначать некоторое бесконечное кардинальное число. Теперь даем следующее определение.

<u>Определение</u>. Группу без кручения G будем называть m-сепарабельной типа $\mathcal{P}^+$ (соотв. $\mathcal{P}_p^+$), если каждое множество элементов из G мощности меньшей чем m содержится в некотором прямом слагаемом группы G являющемся прямой сум-

мой групп типа $\mathcal{P}^+$ (соотв. групп $\mathcal{R}_p^+$). Если $m = \aleph_0$, то будем группу G просто называть сепарабельной типа $\mathcal{P}^+$ (соотв. $\mathcal{R}_p^+$).

Если группа G представима в виде прямой суммы групп типа $\mathcal{P}^+$, то, очевидно, группа G m-сепарабельна типа $\mathcal{P}^+$ для любого кардинального числа m. Но существуют сепарабельные группы типа $\mathcal{P}^+$, неявляющиеся прямой суммой групп типа $\mathcal{P}^+$. В качестве примера можно взять группу G, которая будет полной прямой суммой счетного бесконечного числа групп $\mathcal{R}_p^+$. В самом деле, для каждого простого числа $q \neq p$ имеем $qG = G$, значит, G не содержит никакое прямое слагаемое изоморфное с $\mathcal{R}_q^+$; но из § 44 из [1] следует, что группу G нельзя представить в виде прямой суммы групп $\mathcal{R}_p^+$. Значит, G не является прямой суммой групп типа $\mathcal{P}^+$. Притом группа G сепарабельна типа $\mathcal{R}_p^+$. Чтобы убедиться в этом, достаточно доказать, что для $g \in G$ существуют подгруппы J и G' в G такие, что $G = J \dotplus G'$, $g \in J$, $J \cong \mathcal{R}_p^+$ и $G' \cong G$. Для этой цели представим группу G в виде $G = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{R}_p x_i$; значит, G является группой всех формальных бесконечных сумм $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$, где $\alpha_i \in \mathcal{R}_p$ $(i = 1, 2, \dots)$. Пусть $g \in G$; очевидно, можно ограничиться только случаем $g \neq 0$. Тогда имеем $g = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$. Пусть p^k $(k \geq 0)$ - наивысшая степень от p, на которую делятся (в $\mathcal{R}_p$) все α_i; итак, $\alpha_i = p^k \beta_i$, $\beta_i \in \mathcal{R}_p$ $(i=1,2,\dots)$. Следовательно, существует i_0 так, что $p \nmid \beta_{i_0}$ (в $\mathcal{R}_p$), или, $\beta_{i_0}^{-1} \in \mathcal{R}_p$. Если положим $g_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{i_0}^{-1} \beta_i x_i$, $J = \mathcal{R}_p g_0$ и

$G' = \sum\limits_{i \neq i_0}^{*} \mathcal{P}_p x_i$, то, очевидно, будет $G = J \dotplus G'$; притом $G' \cong G$, $J' \cong \mathcal{P}_p^+$ и $g = p^k \beta_{i_0} g_0 \in \mathcal{P}_p g_0 = J$. Нс этим уже полностью доказано, что группа G сепарабельна типа $\mathcal{P}_p^+$.

Если G – произвольная группа и p – простое число, то в G имеется единственная наибольшая p-полная подгруппа. Итак, следующее определение имеет смысль. Притом, символом Π будем обозначать множество всех простых (положительных) чисел.

<u>Определение</u>. Если G – некоторая группа без кручения и если символ $G^*_{(q)}$ $(q \in \Pi)$ представляет наибольшую q-полную подгруппу в G, то подгруппу $G_{(p)} = \bigcap\limits_{q \in \Pi, q \neq p} G^*_{(q)}$, будем называть p-компонентой группы G.

<u>Лемма 8</u>. Пусть G – группа без кручения, сепарабельная типа $\mathcal{P}^+$. Тогда каждая p-компонента $G_{(p)}$ q-полна для всех простых чисел $q \neq p$ $(q \in \Pi)$, и имеет место формула $G = \sum\limits_{p \in \Pi} G_{(p)}$.

<u>Доказательство</u>. Прежде всего ясно, что если J – подгруппа в G такая, что $J \cong \mathcal{P}_p^+$, то подгруппа J q-полна для каждого простого числа $q \neq p$, значит, $J \subseteq G_{(p)}$. Если $g \in G$, то в силу сепарабельности группы G типа $\mathcal{P}^+$, группа G разложима в прямую сумму вида $G = G_1 \dotplus G_2$, где $g \in G_1$ и G_1 является прямой суммой групп типа $\mathcal{P}^+$. Итак, будет $G_1 \subseteq \{G_{(p)} \ (p \in \Pi)\}$, или, $g \in \{G_{(p)} (p \in \Pi)\}$. Этим мы полностью доказали, что

(6) $$G = \{G_{(p)} \ (p \in \Pi)\}.$$

Если взять $g \neq 0$, то о группе G_1 можно еще предполагать, что $G_1 = \sum_{i=1}^{n} J_i$, где все J_i являются группами типа $\mathcal{P}^+$, и слагаемое элемента g в каждой из групп J_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ отлично от нуля. Пусть теперь $0 \neq g \in G_{(p)}$ и пусть $q \in \Pi$, $q \neq p$. Так как $g \in G^*_{(q)}$, то g обладает в G бесконечной q-высотой, значит, среди групп J_i $(1 \leq i \leq n)$ нет группы $\mathcal{P}^+_q$. Но это значит, что $J_i \cong \mathcal{P}^+_p$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, или, $G_1 \subseteq G_{(p)}$. Отсюда следует, что в подгруппе $G_{(p)}$ обладает g также бесконечной q-высотой, итак, подгруппа $G_{(p)}$ q-полна.

Пусть $p \in \Pi$ и пусть $0 \neq g \in \{G_{(q)}, (q \in \Pi, q \neq p)\}$. Как мы только что доказали, каждая из групп $G_{(q)}$ $(q \neq p)$ p-полна, итак, группа $\{G_{(q)}, (q \neq p, q \in \Pi)\}$ также p-полна. Значит, g обладает в G бесконечной p-высотой. Если еще предположить, что $g \in G_{(p)}$, то элемент g должен в G обладать бесконечной q-высотой для каждого простого числа $q \neq p$. Следовательно, q-высота элемента g в G бесконечна для каждого простого числа $q \in \Pi$. Но таких ненулевых элементов в G нет, как следует из сепарабельности группы G типа $\mathcal{P}^+$. Итак, для каждого $p \in \Pi$ имеем

$$G_{(p)} \cap \{G_{(q)} (q \in \Pi, q \neq p)\} = 0 .$$

Отсюда и из (6) уже получим $G = \sum_{p \in \Pi} G_{(p)}$, и лемма полностью доказана.

__Лемма 9.__ Пусть в группе без кручения G имеется подгруппа H, являющаяся сепарабельной группой типа $\mathcal{P}^+$. Если группа G/H периодическая, то $G = \sum_{p \in \Pi} \mathcal{S}_G (H_{(p)})$.

__Доказательство.__ В силу леммы 8 имеем $H = \sum_{p \in \Pi} H_{(p)}$;

итак, если положим $G^* = \{\mathcal{S}_G(H_{(p)})\ (p \in \Pi)\}$, то будет $G^* = \sum_{p\in\Pi} \mathcal{S}_G(H_{(p)})$. Для каждого $p \in \Pi$ имеем $H = H_{(p)} \dotplus \sum_{q \neq p} H_{(q)}$; притом, по лемме 8 группа $H_{(p)}$ q-полна для каждого $q \neq p$ и группа $\sum_{q\neq p} H_{(q)}$ p-полна. Отсюда в силу леммы 8 из [7] следует, что группа $(\mathcal{S}_G(H_{(p)}) \dotplus \sum_{q\neq p} H_{(q)})/H$ служит p-примарным слагаемым для периодической группы G/H. Так как для каждого $p \in \Pi$ имеем

$$(\mathcal{S}_G(H_{(p)}) \dotplus \sum_{q\neq p} H_{(q)})/H \subseteq G^*/H,$$

то должно быть $G^*/H = G/H$, или $G^* = G$, и лемма доказана.

Теперь мы уже в состоянии доказать следующие теоремы.

<u>Теорема 1</u>. Пусть в группе без кручения G имеется подгруппа H, являющаяся прямой суммой групп типа $\mathcal{P}^+$, и пусть G/H - периодическая группа, каждое примарное слагаемое которой служит расширением группы с ограниченными порядками элементов при помощи счетной группы. Если для каждого $p \in \Pi$ p-компонента $H_{(p)}$ p^∞-независима в G, то $G \cong H$.

<u>Доказательство</u>. В силу леммы 8 имеем $H = \sum_{p\in\Pi} H_{(p)}$, и по лемме 9 будет

$$G = \sum_{p\in\Pi} \mathcal{S}_G(H_{(p)})\,; \tag{7}$$

итак, имеет место изоморфизм

$$G/H \cong \sum_{p\in\Pi} [\mathcal{S}_G(H_{(p)})/H_{(p)}]\,. \tag{8}$$

Ясно, что каждая группа $\mathcal{S}_G(H_{(p)})/H_{(p)}$ p-примарна, итак, из (8) следует, что группа $\mathcal{S}_G(H_{(p)})/H_{(p)}$ изоморфна p-примарному слагаемому группы G/H. Следовательно, $\mathcal{S}_G(H_{(p)})/H_{(p)}$ – периодическая группа, служащая расширением группы с ограниченными порядками элементов при помощи счетной группы. Так как подгруппа $H_{(p)}$ p^∞-независима в G, то она p^∞-независима в $\mathcal{S}_G(H_{(p)})$. Если теперь взять некоторое прямое разложение H в группы типа $\mathcal{P}^+$, то легко видеть, что $H_{(p)}$ является в точности прямой суммой всех групп $\mathcal{P}_p^+$ из данного прямого разложения. Если применим лемму 7 к группам $\mathcal{S}_G(H_{(p)})$ и $H_{(p)}$ ($H_{(p)}$ можно считать свободным $\mathcal{R}_p$-модулем), то получим $\mathcal{S}_G(H_{(p)} \cong H_{(p)})$. Отсюда и из (7) следует

$$G = \sum_{p\in\pi} \mathcal{S}_G(H_{(p)}) \cong \sum_{p\in\pi} H_{(p)} = H ,$$

и теорема доказана.

Теорема 2. Пусть в группе без кручения G имеется подгруппа H, являющаяся прямой суммой групп типа $\mathcal{P}^+$. Если G/H – периодическая группа, каждойе примарное слагаемое которой служит расширением группы с ограниченными порядками элементов при помощи счетной редуцированной группы, то $G \cong H$.

Доказательство. Опять имеет место формула (8), значит, для каждого $p \in \pi$ $\mathcal{S}_G(H_{(p)})/H_{(p)}$ – p-примарная группа, служащая расширением группы с органиченными порядками элементов при помощи счетной редуцированной группы. Итак, каждая группа $\mathcal{S}_G(H_{(p)})/H_{(p)}$ редуцирована. Далее, $H_{(p)}$ не содержит ненулевых элементов бесконечной p-высоты в $H_{(p)}$, так как $H_{(p)}$ является прямой суммой групп $\mathcal{P}_p^+$. Отсюда в силу леммы 5 из [5] следует, что подгруппа $H_{(p)}$ p^∞-независима в $\mathcal{S}_G(H_{(p)})$. Но если воспользовать лемму 1, то легко вывести, что подгруппа $H_{(p)}$ p^{∞}-независима в G. Теперь достаточно применить теорему 1.

Замечание. Теорему 2 мы получили как следствие теоремы 1. Но из следующего вытекает, что теорема 1 на самом деле общее чем теорема 2. Пусть в группе без кручения G имеется подгруппа H, являющаяся прямой суммой групп $\mathcal{P}_p^+$, и пусть $G/H \cong \sum_{k=1}^{\infty} C(p^k)$. Тогда существует подгруппа K в G такая, что $H \subseteq K$ и $G/K \cong C(p^{\infty})$. Так как $K/H \subseteq G/H$, то по лемме 5 из [5] подгруппа H p^{∞}-независима в K и в G, и в силу леммы 2 подгруппа K p^{∞}-независима в G. Из теоремы 2 следует, что $K \cong H$. Следовательно, к группам G и K применима теорема 1, между тем как теорема 2 неприменима, так как $G/K \cong C(p^{\infty})$.

Лемма 10. Пусть в группе без кручения G имеется подгруппа H m-сепарабельная типа $\mathcal{P}_p^+$, и пусть G/H - периодическая группа мощности меньше чем m. Если группа G/H служит расширением группы с ограниченными порядками элементов при помощи счетной группы, и если подгруппа H p^{∞}-независима в G, то $G \cong H$. Точнее, существуют подгруппы G_0, H_0 и K в G такие, что $G = G_0 \dotplus K$, $H = H_0 \dotplus K$, $H_0 \subseteq G_0$, $G_0 \cong H_0$ и обе группы G_0, H_0 разложимы в прямую сумму групп $\mathcal{P}_p^+$.

Доказательство. В каждом смежном классе $\bar{y}$ фактор-группы $\bar{G} = G/H$ определим некоторый элемент y и пусть M - множество всех этих элементов. Положим $S = \mathcal{S}_G(M)$ и $T = S \cap H$; итак, T - сервантная подгруппа в H. Для каждого $y \in M$ символом n_y обозначим порядок элемента $\bar{y}$; следовательно, $n_y y \in H$ $(y \in M)$. Легко видеть, что будет в точности $T = \mathcal{S}_H(n_y y \ (y \in M))$. Так как $\mathrm{card}\, M < \mathfrak{m}$, то имеет место некоторое прямое разложение $H = H_0 \dotplus K$, где H_0 – прямая сумма групп $\mathcal{P}_p^+$ и $n_y y \in H_0 \ (y \in M)$; итак, $T \subseteq H_0$. Если положим $G_0 = \{S, H_0\}$, то имеем

(9) $$G = \{S, H\} = \{S, H_0, K\} = \{G_0, K\}.$$

Пусть $g \in G_0 \cap K$. Так как $g \in G_0 = \{S, H_0\}$, то $g = s + h_0$, где $s \in S$ и $h_0 \in H_0$. Из соотношения

$$S/T = S/(H \cap S) \cong \{H, S\}/H = G/H .$$

следует существование такого натурального числа m, что $ms \in T \subseteq H_0$, или, $mg = ms + mh_0 \in H_0$. Итак, $mg \in (H_0 \cap K) = 0$, или, $g = 0$. Этим мы доказали, что $G_0 \cap K = 0$, следовательно, в силу (9) имеем

(10) $$G = G_0 \dotplus K .$$

Так как $H_0 \subseteq G_0$, то имеет место соотношение

$$G/H = (G_0 \dotplus K)/(H_0 \dotplus K) \cong G_0/H_0 ;$$

значит, G_0/H_0 – периодическая группа, служащая расширением группы с ограниченными порядками элементов при помощи счетной группы. Подгруппа H p^∞-независима в G, H_0 – прямое слагаемое в H, следовательно, в силу леммы 1, подгруппа H_0 p^∞-независима в G и в G_0. По лемме 7 имеем $G_0 \cong H_0$, итак, ввиду (10) $G = G_0 \dotplus K \cong H_0 \dotplus K = H$. Этим лемма полностью доказана.

Следующие две теоремы обобщают теоремы 1 и 2.

<u>Теорема 3</u>. Пусть в группе без кручения G имеется подгруппа H, $\mathfrak{m}$-сепарабельная типа $\mathcal{P}^+$, и пусть G/H – периодическая группа, каждое примарное слагаемое которой

мощности меньше чем $\mathfrak{m}$. Если каждое примарное слагаемое группы G/H служит расширением группы с ограниченными порядками элементов при помощи счетной группы и если каждая p-компонента $H_{(p)}$ p^{∞}-независима в G, то $G \cong H$. Точнее, существуют подгруппы G_0, H_0 и K в G такие, что $G = G_0 \dotplus K$, $H = H_0 \dotplus K$, $H_0 \subseteq G_0$, $G_0 \cong H_0$ и обе группы G_0, H_0 разложимы в прямую сумму групп типа $\mathcal{P}^+$.

<u>Доказательство</u>. По лемме 9 будет $G = \sum_{p \in \pi} \mathcal{S}_G(H_{(p)})$, итак, имеет место соотношение вида (8). В силу леммы 8 подгруппа $H_{(p)}$ q-полна для каждого $q \neq p$ $(q \in \pi)$, следовательно, периодическая группа $\mathcal{S}_G(H_{(p)})/H_{(p)}$ p-примарна. Отсюда и из (8) вытекает, что группа $\mathcal{S}_G(H_{(p)})/H_{(p)}$ изоморфна p-примарному слагаемому группы G/H, или, служит расширением группы с ограниченными порядками элементов при помощи счетной группы; притом мощность $\mathcal{S}_G(H_{(p)})/H_{(p)}$ меньше чем $\mathfrak{m}$. По предположению подгруппа $H_{(p)}$ p^{∞}-независима в G и, следовательно, также в $\mathcal{S}_G(H_{(p)})$. Далее, легко убедиться в том, что группа $H_{(p)}$ $\mathfrak{m}$-сепарабельна типа $\mathcal{P}_p^+$. В силу леммы 10 имеем $\mathcal{S}_G(H_{(p)}) = G_0^{(p)} \dotplus K^{(p)}$, $H_{(p)} = H_0^{(p)} \dotplus K^{(p)}$, $G_0^{(p)} \cong H_0^{(p)}$, $H_0^{(p)} \subseteq G_0^{(p)}$ и обе группы $G_0^{(p)}$, $H_0^{(p)}$ разложимы в прямую сумму групп $\mathcal{P}_p^+$. Если положим $G_0 = \sum_{p \in \pi} G_0^{(p)}$, $H_0 = \sum_{p \in \pi} H_0^{(p)}$ и $K = \sum_{p \in \pi} K^{(p)}$, то эти группы обладают требуемыми свойствами, чем теорема доказана.

<u>Теорема 4</u>. Пусть в группе без кручения G имеется подгруппа H, $\mathfrak{m}$-сепарабельная типа $\mathcal{P}^+$, и пусть G/H — периодическая группа, каждое примарное слагаемое которой мощности меньше чем $\mathfrak{m}$. Если каждое примарное слагаемое

группы G/H служит расширением группы с ограниченными порядками элементов при помощи счетной редуцированной группы, то $G \cong H$; точнее, имеет место утверждение теоремы 3.

<u>Доказательство</u>. Как мы уже заметили, группа $H_{(p)}$ m-сепарабельна типа $\mathcal{P}_p^+$; итак, в $H_{(p)}$ нет ненулевых элементов бесконечной p-высоты в $H_{(p)}$. Теперь можно тем-же образом, как в доказательстве теоремы 2, убедиться в p^∞-независимости подгруппы $H_{(p)}$ в G . Следовательно, можно применить теорему 3.

В следующей части мы применим полученные результаты к изучению расщепляемости некоторых смешанных групп. Но прежде всего докажем несколько вспомогательных лемм. Притом пользуемся следующей записью: Если G - группа и G_t - ее периодическая часть, то символом $G_t^{(p)}$ обозначим p-примарное слагаемое группы G_t .

<u>Лемма 11</u>. Пусть в группе G имеется подгруппа H вида $H = A \dotplus B$, где подгруппа A q-полна для каждого $q \neq p$ $(q \in \Pi)$ и подгруппа B p -полна, и пусть G/H - периодическая группа. Если группа $G_t^{(p)}$ редуцированна, то существует подгруппа A^* в G такая, что $A \subseteq A^*$, $\{A^*, B\} = A^* \dotplus B$ и $(A^* \dotplus B)/H$ служит p-примарным слагаемым для группы G/H .

<u>Доказательство</u>. Так как подгруппа $B_t^{(p)}$ сервантна в p -полной группе B , то она также p -полна. Но группа $B_t^{(p)}$ p -примарна, следовательно, она уже полна. Из соотношения $B_t^{(p)} \subseteq G_t^{(p)}$ и из редуцированности группы $G_t^{(p)}$ следует равенство $B_t^{(p)} = 0$. Символом A^* теперь обозначим множество всех таких $g \in G$, для которых $p^k g \in A$

для некоторого $k \geq 0$. Итак, A^* – подгруппа в G, $A \leq A^*$ и группа A^*/A p-примарна. Если $g \in A^* \cap B$, то для некоторого $k \geq 0$ будет $p^k g \in A \cap B = 0$, или, $p^k g = 0$. Отсюда имеем $A^* \cap B \leq B_t^{(p)} = 0$; значит, $A^* \cap B = 0$. Этим мы доказали, что $\{A^*, B\} = A^* \dotplus B$.

Пусть $\bar{G}^{(p)}$ представляет p-примарное слагаемое группы G/H. Так как $(A^* \dotplus B)/H \cong A^*/A$, то $(A^* \dotplus B)/H \leq \bar{G}^{(p)}$. Если $g + H \in \bar{G}^{(p)}$, то для некоторого $k \geq 0$ будет $p^k g \in H$, или, $p^k g = a + b$, где $a \in A$ и $b \in B$. Но группа B p-полна, следовательно, $b = p^k b'$ для некоторого $b' \in B$. Отсюда имеем $p^k(g - b') = a \in A$, или, $a^* = g - b' \in A^*$. Это значит, что $g = a^* + b' \in A^* \dotplus B$, итак, $g + H \in (A^* \dotplus B)/H$. Этим уже доказано, что $\bar{G}^{(p)} = (A^* \dotplus B)/H$, и доказательство леммы завершено.

<u>Лемма 12</u>. Предшествующая лемма остается справедливой, если условие редуцированности группы $G_t^{(p)}$ заменить условием редуцированности группы $G_t^{(p)}/H_t^{(p)}$.

<u>Доказательство</u>. Если D (соотв. E) обозначает максимальную полную подгруппу в $A_t^{(p)}$ (соотв. $B_t^{(p)}$), то $U = D \dotplus E$ будет максимальной полной подгруппой в $H_t^{(p)}$. Группы A, B представим в виде $A = A_0 \dotplus D$, $B = B_0 \dotplus E$, или, имеем

$$H = A \dotplus B = A_0 \dotplus B_0 \dotplus U ;$$

притом опять группа A_0 q-полна для каждого $q \neq p$ ($q \in \Pi$) и группа B_0 p-полна. Полная группа U служит абсолютным прямым слагаемым для G (смотри [1], теорема 22.2), следовательно, в G имеется подгруппа G_0 такая, что $H_0 = A_0 \dotplus B_0 \subseteq G_0$ и $G = G_0 \dotplus U$. Так как группа $G_t^{(p)} / H_t^{(p)}$ редуцирована, то U будет одновременно максимальной полной подгруппой в $G_t^{(p)}$; итак, $(G_0)_t^{(p)}$ – редуцированная группа. Очевидно, имеем $G/H = (G_0 \dotplus U)/(H_0 \dotplus U) \cong G_0 / H_0$, значит, к группам G_0 и $H_0 = A_0 \dotplus B_0$ можно применить лемму 11. Итак, существует подгруппа A_0^* в G_0 такая, что $A_0 \subseteq A_0^*$, $\{A_0^*, B_0\} = A_0^* \dotplus B_0$ и группа $(A_0^* \dotplus B_0)/H_0$ служит p-примарным слагаемым для G_0 / H_0. Следовательно, для некоторой подгруппы B^* в G_0 такой, что $H_0 \subseteq B^*$, будет

$$(11) \qquad G_0 / H_0 = (A_0^* \dotplus B_0)/H_0 \dotplus B^*/H_0 \;;$$

притом p-примарным слагаемым в B^*/H_0 будет нулевая группа. Так как $G = G_0 \dotplus U$ и $H = H_0 \dotplus U$, то из (11) следует разложение

$$(12) \qquad G/H = (A_0^* \dotplus B_0 \dotplus U)/H \dotplus (B^* \dotplus U)/H \,.$$

Из соотношений

$$(A_0^* \dotplus B_0 \dotplus U)/H \cong (A_0^* \dotplus B_0)/H_0, (B^* \dotplus U)/H \cong B^*/H_0$$

и из (12) теперь уже следует, что группа $(A_0^* \dotplus B_0 \dotplus U)/H$ служит p-примарным слагаемым для группы G/H. Итак, если положим $A^* = A_0^* \dotplus D$, то $A \subseteq A^*$ и $\{A^*, B\} = A_0^* \dotplus B_0 \dotplus U = A^* \dotplus B$, или, A^* – искомая группа.

<u>Лемма 13</u>. Пусть в группе G имеется подгруппа H вида $H = \sum_{p \in \Pi} A_{(p)}$, где каждая группа $A_{(p)}$ q-полна для всех $q \neq p$ $(q \in \Pi)$. Если группа G/H периодическая и если группа G_t / H_t редуцирована, то существуют подгруппы $A_{(p)}^*$ в G такие, что $A_{(p)} \subseteq A_{(p)}^*$, группа $A_{(p)}^*/A_{(p)}$ p-примарна $(p \in \Pi)$ и $G = \sum_{p \in \Pi} A_{(p)}^*$.

Доказательство. Если для $p \in \Pi$ положим $B_{(p)} = \sum_{q \neq p} A_{(q)}$, то $H = A_{(p)} \dotplus B_{(p)}$ и подгруппа $B_{(p)}$ будет p-полной. Ясно, что группа $G_{\ast}^{(p)} / H_{\ast}^{(p)}$ изоморфна p-примарному слагаемому группы $G_{\ast} / H_{\ast}$, итак, группа $G_{\ast}^{(p)} / H_{\ast}^{(p)}$ редуцирована. По лемме 12 существуют подгруппы $A^{*}_{(p)}$ $(p \in \Pi)$ в G такие, что $A_{(p)} \subseteq A^{*}_{(p)}$, $\{A^{*}_{(p)}, B_{(p)}\} = A^{*}_{(p)} \dotplus B_{(p)}$ и группа $(A^{*}_{(p)} \dotplus B_{(p)})/H$ представляет в точности p-примарное слагаемое для G/H. Отсюда следует, что $A^{*}_{(p)} / A_{(p)} \cong$ $\cong (A^{*}_{(p)} \dotplus B_{(p)})/H$, или, группа $A^{*}_{(p)} / A_{(p)}$ p-примарна. Кроме того имеем $G/H = \{A^{*}_{(p)}\ (p \in \Pi\} / H$, или, $G =$ $= \{A^{*}_{(p)}\ (p \in \Pi)\}$. Теперь докажем, что если

$$(13) \qquad g_1 + g_2 + \ldots + g_m \in H,$$

где $g_i \in A^{*}_{(p_i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ и $p_i \neq p_j$ для $i \neq j$, то $g_i \in A_{(p_i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. В самом деле, если положим $\bar{g}_i = g_i + H \in G/H$, то $\bar{g}_i$ содержится в p_i-примарном слагаемом группы G/H. В силу (13) имеем $\bar{g}_1 + \bar{g}_2 + \ldots$ $\ldots + \bar{g}_m = 0$, значит, $\bar{g}_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, или, $g_i \in$ $\in H$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Итак, мы имеем $g_i \in A^{*}_{(p_i)} \cap H$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Так как $g_i \in H = A_{(p_i)} \dotplus B_{(p_i)}$, то $g_i = a_i +$ $+ b_i$, где $a_i \in A_{(p_i)} \subseteq A^{*}_{(p_i)}$, и $b_i \in B_{(p_i)}$. Одновременно имеем $g_i \in A^{*}_{(p_i)} \subseteq A^{*}_{(p_i)} \dotplus B_{(p_i)}$; итак, $a_i + b_i = g_i =$ $= g_i + 0$, значит, мы имеем два представления элемента g_i в группе $A^{*}_{(p_i)} \dotplus B_{(p_i)}$. Отсюда следует, что $b_i = 0$ и $g_i = a_i \in A_{(p_i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Если теперь $g_i \in A^{*}_{(p_i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, где $p_i \neq p_j$ для $i \neq j$, и если $g_1 + g_2 + \ldots + g_m = 0 \in H$, то по доказанному должно быть $g_i \in A_{(p_i)}$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Но так как $H = \sum_{p \in \Pi} A_{(p)}$, то из равенства $g_1 + g_2 + \ldots + g_m = 0$

уже следует $g_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Отсюда вытекает, что $G = \{A^*_{(p)}\ (p \in \Pi)\} = \sum_{p \in \pi} A^*_{(p)}$, и лемма доказана.

<u>Лемма 14.</u> **Пусть в группе G** имеется подгруппа H вида $H = A \dotplus G_t$, где A является прямой суммой групп $\mathcal{R}_p^+$ и группа G_t $(= H_t)$ p-примарна. Если G/H – периодическая p-примарная группа, служащая расширением группы с ограниченными порядками элементов при помощи счетной группы и если подгруппа H/G_t p^∞-независима в G/G_t, то $G = A_0 \dotplus G_t$ и $A_0 \cong A$.

<u>Доказательство</u>. Так как группа G_t p-примарна, то в силу теоремы 1.20 из [4] можно G_t считать $\mathcal{R}_p$-модулем; итак, вся группа H может служить $\mathcal{R}_p$-модулем, притом с G_t в качестве подмодуля. Далее, группа G/H p-примарна, следовательно, по предложению 1.19 из [4] можно в G определить (единственным образом) структуру $\mathcal{R}_p$-модуля так, что $\mathcal{R}_p$-модуль H станет его подмодулем. Тогда фактор-модуль $\bar{H} = H/G_t$ будет свободным подмодулем $\mathcal{R}_p$-модуля $\bar{G} = G/G_t$, так как $H/G_t \cong A$. Кроме того, имеем $\bar{G}/\bar{H} \cong G/H$ и подгруппа $\bar{H}$ p^∞-независима в группе без кручения $\bar{G}$. Итак, по лемме 7 модули $\bar{G}$, $\bar{H}$ изоморфны. Значит, $\bar{G}$ является свободным $\mathcal{R}_p$-модулем, или, $\bar{G} = \sum_{\iota \in I} \mathcal{R}_p \bar{x}_\iota$. Если определим элементы $x_\iota \in G$ так, что $\bar{x}_\iota = x_\iota + G_t$ $(\iota \in I)$, то, как легко видеть, будет $\{\mathcal{R}_p x_\iota\ (\iota \in I)\} = \sum_{\iota \in I} \mathcal{R}_p x_\iota$ и $G = \sum_{\iota \in I} \mathcal{R}_p x_\iota \dotplus G_t$ (смотри [1], теорема 9.2 и упражнение 15 на стр.53). Тогда для $A_0 = \sum_{\iota \in I} \mathcal{R}_p x_\iota$ имеем $G = A_0 \dotplus G_t$ и $A_0 \cong G/G_t = \bar{G} \cong \bar{H} = H/G_t \cong A$, значит, лемма полностью доказана.

Теорема 5. Пусть в группе G имеется подгруппа H вида $H = A \dotplus H_t$, где группа A является прямой суммой групп типа $\mathcal{P}^+$, и пусть G/H -периодическая группа, каждое примарное слагаемое которой служит расширением группы с ограниченными порядками элементов при помощи счетной группы. Если каждая p-компонента группы $\{H, G_t\}/G_t$ p^∞-независима в G/G_t и если каждое примарное слагаемое группы G_t/H_t обладает ограниченными порядками элементов, то $G = A_0 \dotplus G_t$ и $A_0 \cong A$.

Доказательство. Пусть $K = \{H, G_t\} = A \dotplus G_t$. Если для каждого $p \in \Pi$ положим $K_{(p)} = A_{(p)} \dotplus G_t^{(p)}$, где $A_{(p)}$ - p-компонента группы A и $G_t^{(p)}$ - p-примарное слагаемое в G_t, то по лемме 8 будет $K = \sum_{p \in \Pi} K_{(p)}$; притом каждая подгруппа $K_{(p)}$ q-полна для всех $q \in \Pi$, $q \neq p$. По лемме 13 существуют подгруппы $K^*_{(p)}$ $(p \in \Pi)$ в G такие, что $K_{(p)} \leq K^*_{(p)}$, $K^*_{(p)}/K_{(p)}$ p-примарна $(p \in \Pi)$ и $G = \sum_{p \in \Pi} K^*_{(p)}$.

Отсюда имеем

$$G/K \cong \sum_{p \in \Pi} (K^*_{(p)}/K_{(p)}),$$

или, каждая группа $K^*_{(p)}/K_{(p)}$ изоморфна p-примарному слагаемому периодической группы G/K. Так как $G/K \cong (G/H)/(K/H)$ и кроме того $K/H = \{H, G_t\}/H \cong G_t/(H \cap G_t) = G_t/H_t$, то p-примарное слагаемое группы G/K изоморфно фактор-группе p-примарного слагаемого группы G/H по подгруппе с ограниченными порядками элементов. Отсюда в силу леммы 16 из [6] следует, что p-примарное слагаемое группы G/K и, следовательно, также группа $K^*_{(p)}/K_{(p)}$, служит расширением группы с ограниченными порядками элементов при помощи счетной группы.

Так как $G_t^{(p)} \subseteq K_{(p)} \subseteq K^*_{(p)}$ $(p \in \Pi)$ и $\{K^*_{(p)}\ (p \in \Pi)\} = \sum_{p \in \Pi} K^*_{(p)}$, то $G_t^{(p)}$ служит периодической частью для группы $K^*_{(p)}$ $(p \in \Pi)$; итак, если положим $\hat{G}_t^{(p)} = \sum_{q \neq p} G_t^{(q)}$, то будет $\{K^*_{(p)}, G_t\} = \{K^*_{(p)}, \hat{G}_t^{(p)}\} = K^*_{(p)} \dotplus \hat{G}_t^{(p)} (p \in \Pi)$. Подгруппа

$(A_{(p)} \dotplus G_t)/G_t = (K_{(p)} \dotplus \hat{G}_t^{(p)})/G_t$ является, очевидно, p-компонентой группы $(A \dotplus G_t)/G_t = K/G_t = \{H, G_t\}/G_t$, итак, по предположению, будет p^∞-независимой подгруппой в G/G_t. Но так как $(K_{(p)} \dotplus \hat{G}_t^{(p)})/G_t \subseteq (K^*_{(p)} \dotplus \hat{G}_t^{(p)})/G_t$, то подгруппа $(K_{(p)} \dotplus \hat{G}_t^{(p)})/G_t$ также p^∞-независима в $(K^*_{(p)} \dotplus \hat{G}_t^{(p)})/G_t$. Теперь определим отображение φ группы $(K^*_{(p)} \dotplus \hat{G}_t^{(p)})/G_t$ в группу $K^*_{(p)}/G_t^{(p)}$ следующим образом: Если $g \in K^*_{(p)}$, то положим $\varphi(g + G_t) = g + G_t^{(p)}$. Отображение φ представляет изоморфизм группы $(K^*_{(p)} \dotplus \hat{G}_t^{(p)})/G_t$ на группу $K^*_{(p)}/G_t^{(p)}$ такой, что

$$\varphi[(K_{(p)} \dotplus \hat{G}_t^{(p)})/G_t] = K_{(p)}/G_t^{(p)}.$$

Но этим мы доказали, что подгруппа $K_{(p)}/G_t^{(p)}$ p^∞-независима в $K^*_{(p)}/G_t^{(p)}$. Группа $A_{(p)}$, как p-компонента группы A, будет прямой суммой групп $\mathcal{R}_p^+$, итак, к группе $K^*_{(p)}$ и ее подгруппе $K_{(p)} = A_{(p)} \dotplus G_t^{(p)}$ можно применить лемму 14, значит, $K^*_{(p)} = A^\circ_{(p)} \dotplus G_t^{(p)}$ и $A^\circ_{(p)} \cong A_{(p)}$. Следовательно, для группы G имеем

$$G = \sum_{p \in \Pi} K^*_{(p)} = \sum_{p \in \Pi} (A^\circ_{(p)} \dotplus G_t^{(p)}) = \sum_{p \in \Pi} A^\circ_{(p)} \dotplus G_t.$$

Если теперь положим $A_\circ = \sum_{p \in \Pi} A^\circ_{(p)}$, то $G = A_\circ \dotplus G_t$ и

$A_0 = \sum_{p \in \Pi} A^0_{(p)} \cong \sum_{p \in \Pi} A_{(p)} = A$. Итак, теорема доказана.

Теорема 6. Пусть в группе G имеется подгруппа H вида $H = A \dotplus H_t$, где группа A является прямой суммой групп типа $\mathcal{P}^+$, и пусть G/H – периодическая группа, каждое примарное слагаемое которой служит расширением группы с ограниченными порядками элементов при помощи счетной редуцированной группы. Если каждое примарное слагаемое группы G_t / H_t обладает ограниченными порядками элементов, то $G = A_0 \dotplus G_t$, где $A_0 \cong A$.

Доказательство. Если положим опять $K = \{H, G_t\} = A \dotplus G_t$ и $\bar{K} = K / G_t$, то группа $\bar{K}_{(p)} = (A_{(p)} \dotplus G_t)/G_t$ служит p -компонентой для группы $\bar{K}$, и, следовательно, она q -полна для каждого $q \in \Pi$, $q \neq p$. Так как $\bar{G}/\bar{K} \cong G/K$, где $\bar{G} = G/G_t$, и так как $H \subseteq K$, то группа $\bar{G}/\bar{K}$ периодическая. В силу леммы 13 существуют подгруппы $\bar{K}^*_{(p)}$ $(p \in \Pi)$ в $\bar{G}$ такие, что $\bar{K}_{(p)} \subseteq \bar{K}^*_{(p)}$, группа $\bar{K}^*_{(p)} / \bar{K}_{(p)}$ p - примарна и $\bar{G} = \sum_{p \in \Pi} \bar{K}^*_{(p)}$. Отсюда следует

$$\bar{G}/\bar{K} = (\sum_{p \in \Pi} \bar{K}^*_{(p)})/(\sum_{p \in \Pi} \bar{K}_{(p)}) \cong \sum_{p \in \Pi} (\bar{K}^*_{(p)} / \bar{K}_{(p)}) ,$$

или, группа $\bar{K}^*_{(p)} / \bar{K}_{(p)}$ изоморфна p -примарному слагаемому группы $\bar{G} / \bar{K}$. Притом имеем

(14) $\bar{G}/\bar{K} = (G/G_t)/(K/G_t) \cong G/K \cong (G/H)/(K/H)$

и одновременно

$$K/H = \{H, G_t\}/H \cong G_t/(H \cap G_t) = G_t / H_t ,$$

итак, в силу (14), p -примарное слагаемое группы $\bar{G}/\bar{K}$ изоморфно фактор-группе p -примарного слагаемого группы G/H по подгруппе с ограниченными порядками элементов.

Из предположения теоремы вытекает, что p-примарное слагаемое группы G/H редуцировано, итак, по лемме 19 из [6] редуцировано p-примарное слагаемое группы $\bar{G}/\bar{K}$, следовательно, редуцирована группа $\bar{K}^*_{(p)} / \bar{K}_{(p)}$. Так как $\bar{K}_{(p)} \cong A_{(p)}$ и группа $A_{(p)}$ является прямой суммой групп $\mathcal{P}_p^+$, то в $\bar{K}_{(p)}$ нет ненулевых элементов бесконечной p-высоты, итак, по лемме 5 из [5] подгруппа $\bar{K}_{(p)}$ p^∞-независима в $\bar{K}^*_{(p)}$. Но тогда подгруппа $\bar{K}_{(p)}$ также p^∞-независима в $\bar{G}$, так как $\bar{K}^*_{(p)}$ является прямым слагаемым в $\bar{G}$ (смотри лемму 1). Этим мы доказали, что для каждого $p \in \Pi$ p-компонента группы $\{H, G_t\} / G_t$ p^∞-независима в G/G_t и можно применить теорему 5. Итак, доказательство теоремы завершено.

Теоремы 5 и 6 можно еще немножко обобщить; это мы теперь сделаем.

Лемма 15. Пусть в группе G имеется подгруппа H вида $H = A \dotplus G_t$, где A – m-сепарабельная группа без кручения типа $\mathcal{P}_p^+$ и группа G_t ($= H_t$) p-примарна. Если G/H – p-примарная группа мощности меньше чем m, служащая расширением группы с ограниченными порядками элементов при помощи счетной группы и если подгруппа H/G_t p^∞-независима в G/G_t, то $G = A \dotplus G_t$ и $A_0 \cong A$.

Доказательство. При доказателсьтве леммы можно поступать точно так, как при доказательстве леммы 9 в [5], только вместо теоремы 1 и леммы 8 из [5] надо постепенно применить теорему 3 и лемму 14.

Теорема 7. Пусть в группе G имеется подгруппа H вида $H = A \dotplus H_t$, где A – m-сепарабельная группа без кручения типа $\mathcal{P}^+$ и G/H - периодическая группа, каждое примарное слагаемое которой мощности меньше чем $\mathfrak{m}$. Если каждое примарное слагаемое группы G/H служит расширением группы с ограниченными порядками элементов при помощи счетной группы, если каждая p-компонента группы $\{H, G_t\}/G_t$ p^∞-независима в G/G_t и если порядки элементов каждого примарного слагаемого группы G_t/H_t ограничены, то $G = A_0 \dotplus G_t$ и $A_0 \cong A$.

<u>Доказательство</u>. Поступаем формально точно так, как при доказательстве теоремы 5, с той единственной разницей, что вместо леммы 14 применяем в заключение доказательства лемму 15. Этим теорема доказана.

<u>Теорема 8</u>. Пусть в группе G имеется подгруппа H вида $H = A \dotplus H_t$, где A - $\mathfrak{m}$-сепарабельная группа без кручения типа $\mathcal{P}^+$ и G/H - периодическая группа, каждое примарное слагаемое которй мощности меньше чем $\mathfrak{m}$. Если каждое примарное слагаемое группы G/H служит расширением группы с ограниченными порядками элементов при помощи счетной редуцированной группы и если порядки элементов каждого примарного слагаемого группы G_t/H_t ограничены, то $G = A_0 \dotplus G_t$ и $A_0 \cong A$.

<u>Доказательство</u>. Для доказательства этой теоремы можно воспользоваться доказательством теоремы 6 с тем, что вместо теоремы 5 надо применить реорему 7.

Если H - группа вида $H = A \dotplus H_t$, где $A \cong \mathcal{P}_p^+$ и $H_t \cong \sum_{n=1}^{\infty} C(p^n)$, то по реореме 1 из [12] существует нерасщепляемая группа G, служащая расширением H при помощи $C(p^\infty)$. Так как имеем

$$G_t/H_t = G_t/(H \cap G_t) \cong \{H, G_t\}/H \leq G/H \cong C(p^\infty),$$

то группа G_t/H_t или конечна, или $G_t/H_t \cong C(p^\infty)$.
Но если бы было $G_t/H_t \cong C(p^\infty)$, то

$$C(p^\infty) \cong G_t/H_t \cong (A \dotplus G_t)/(A \dotplus H_t) = (A \dotplus G_t)/H \leq G/H \cong C(p^\infty),$$

или, $A \dotplus G_t = G$, что противоречит выбору группы G. Итак, группа G_t/H_t конечна. Это значит, что группы G и H удовлетворяют всем условиям теоремы 5 (соотв. теоремы 7) с исключением p^∞-независимости p-компоненты группы $\{H, G_t\}/G_t$ в G/G_t. Следовательно, теорема 5 (соотв. теорема 7) не имеет места, если выпустить требование p^∞-независимости (для некоторого $p \in \Pi$) p-компоненты группы $\{H, G_t\}/G_t$ в группе G/G_t. Отсюда также следует, что в теоремах 6 и 8 нельзя выпустить требование редуцированности. Далее, пусть H - группа, $H \cong \mathcal{P}_p^+$; тогда можно построить нерасщепляемое расширение G группы H такое, что G/H является прямой суммой счетного числа циклических p-примарных групп. Так как $H_t = 0$, то

$$G_t \cong G_t/H_t = G_t/(H \cap G_t) \cong \{H, G_t\}/H \leq G/H,$$

или, $G_t/H_t \cong G_t$ является p-примарной группой, необладающей ограниченными порядками элементов (см.[1], теорема 50.3). Следовательно, ни в какой из теорем 5, 6, 7 и 8 нельзя выпустить требование ограниченности примарных слагаемых группы G_t/H_t.

Литература

[1] L. FUCHS: Abelian groups, Budapest 1958.

[2] L. FUCHS: Ranks of modules, Ann.Univ.Sci.Budap.VI,1963, 71-78.

[3] I. KAPLANSKY: Infinite abelian groups, Ann Arbor,1954.

[4] Л.Я. КУЛИКОВ: Обобщенные примарные группы, Труды Моск. мат.общ.1, 1952,247-326.

[5] Л. ПРОХАЗКА: Заметка о $\mathfrak{m}$ -сепарабельных абелевых группах без кручения, Чех.мат.жур.15(90), 1965,526-539.

[6] Л. ПРОХАЗКА: Об однородных абелевых группах без кручения, Чех.мат.жур.14(89),1964,171-202.

[7] Л. ПРОХАЗКА: Заметка о прямых суммах групп типа $\mathcal{P}^+$ Чех.мат.жур.(в печати).

[8] L. PROCHÁZKA: Bemerkung über den p-Rang torsionsfreier abelscher Gruppen unendlichen Ranges, Чех. мат.жур.13(88),1963,1-23.

[9] Л. ПРОХАЗКА: Расширения абелевых групп при помощи групп периодических, Чех.мат.ж.(в печати).

[10] Л. ПРОХАЗКА: Заметка о расщепляемости смешанных абелевых групп, Чех.мат.жур.10(85),1960,479-492.

[11] Л. ПРОХАЗКА: О р-ранге абелевых групп без кручения конечного ранга, Чех.мат.жур.12(87),1962,3-43.

[12] Л. ПРОХАЗКА: Расширения расщепляемых групп при помощи полных примарных групп, Comment.Math.Univ.Carol. 7,4(1966),429-445.

(Received November 8,1966)