Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Jindřich Nečas

Sur la méthode variationnelle pour les équations aux dérivées partielles non linéaires du type elliptique; l'existence et la régularité des solutions

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 7 (1966), No. 3, 301--317

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/105064`

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

7,3 (1966)

SUR LA MÉTHODE VARIATIONNELLE POUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES NON LINÉAIRES DU TYPE ELLIPTIQUE; L'EXISTENCE ET LA RÉGULARITÉ DES SOLUTIONS

Jindřich NEČAS, Praha

1. Introduction On résout un problème aux limites dans un domaine Ω borné de E_N pour l'équation

$$(1.1) \qquad \sum_{|i|\le k} (-1)^{|i|} D^i a_i (x, D_j u) = f(x) ,$$

où la notation usuelle $D^i = \frac{\partial^{|i|}}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \dots \partial x_N^{i_N}}$ est utilisée, et on cherche une solution faible dans $W_m^{(k)}(\Omega)$. On désigne par $W_m^{(k)}$ l'espace des fonctions dont les dérivées jusqu'à l'ordre k sont de m-ème puissance sommable dans Ω; $1 < m < \infty$. Cette solution rend minimum le potentiel correspondant, dont l'existence suit p.ex. des conditions:

$$(1.2) \qquad \frac{\partial a_i}{\partial D^j u} = \frac{\partial a_j}{\partial D^i u}$$ au sens des distributions, $|i|, |j| \le k$,

d'une des conditions

$$(1.3\,a) \qquad \sum_{|i|\le k} (\xi_i - \eta_i)[a_i(x, \xi_j) - a_i(x, \eta_j)] \ge 0 ,$$

$$(1.3\,b) \qquad > 0 ,$$

$$(1.3c) \qquad \sum_{|i|,|j|\le k} \frac{\partial a_i}{\partial D^j u} \xi_i \xi_j \ge 0$$ si a_i sont différentiables,

de la condition

(1.4) $\sum_{|i|\le k} \xi_i a_i(x,\xi_j) \geq c\,(\sum_{|i|=k} \xi_i^2)^{m/2} + c\,|\xi_{(0,\dots 0)}|^m$, 1)

et des hypothèses naturelles pour la croissance polynomiale des a_i ; les hypothèses convenables sont faites pour f et les conditions aux limites.

Notre résultat se rattache étroitement au travail de F.E. Browder [1], M.M. Vajnberg, R.I. Kačurovskij [9] et des autres. On retrouve les résultats basés sur la notion de monotonie, cf. F.E. Browder [2], M.I. Višik [10], mais de plus, la solution rend minimum une certaine fonctionnelle.

Sous certaines conditions sur la régularité des $a_i(x, D^j u)$, f , on applique la méthode des differences (qui semble être applicable seulement une fois) et obtient un énoncé sur la régularité de la solution dans l'intérieur du domaine; pour chaque $\overline{\Omega}' \subset \Omega$, la solution u du problème appartient dans $W^{(k)}_{mN/(N-2)}(\Omega')$, $N \geq 3$. Si $N=2$, la solution appartient dans $W^{(k)}_p(\Omega')$ pour chaque $1 < p < \infty$.

2. Existence de la solution. Pour simplifier les considérations, supposons Ω à frontière $\partial\Omega$ lipschitzienne. On désigne par $\mathcal{E}(\overline{\Omega})$ l'espace des fonctions réelles, indéfiniment continûment différentiables dans $\overline{\Omega}$ et par $\mathcal{D}(\Omega)$ le sous-espaces de $\mathcal{E}(\overline{\Omega})$ des fonctions à support compact. On introduit comme d'habitude $\|u\|_{W^{(k)}_m} = (\sum_{|i|\le k} \int_\Omega |D^i u|^m dx)^{1/m} = \|u\|_{k,m}$. On désigne encore par $\mathring{W}^{(k)}_m(\Omega)$ la fermeture

---

1) On désigne dans la suite la pluspart des constantes positives par le même symbole c .

de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W_m^{(k)}(\Omega)$. Au cas clairs, on écrira seulement $W_m^{(k)}$ e.t.c. On désigne encore par $C^{(k)}(\bar{\Omega})$ l'espace des fonctions k-fois continûment différentiables dans $\bar{\Omega}$, muni de la norme habituelle.

On a, cf. p.ex. E. Cagliardo [3]: $\overline{\mathcal{E}(\bar{\Omega})} = W_m^{(k)}(\Omega)$, $1 \leq m < < \infty$. Si $km < N$, (2.1) $W_m^{(k)} \subset L_q$ algébriquement et topologiquement avec $1/q = 1/m - k/N$. Pour $1/q > 1/m - k/N$ la transformation identique de $W_m^{(k)}$ dans L_q est compacte. Si $km = N$, (2.1) est vrai pour chaque $1/q > 0$ et la transformation identique est compacte. Si $km > N$ (2.2) $W_m^{(k)} \subset C^{(0)}(\bar{\Omega})$ algébriquement et topologiquement et la transformation identique est compacte.

On définit $a_i(x, \xi_j)$, des fonctions réelles pour $x \in \Omega, -\infty < \xi_j < \infty, |j| \leq k$, continues pour presque tous $x \in \Omega$ en ξ_j, mesurables en x pour ξ_j fixés. Une condition suffisante pour la suite concernant la croissance des $a_i(x, \xi_j)$ en ξ_j est

(2.3) $$|a_i(x, \xi_j)| \leq c\,(1 + \sum_{|j| \leq k} |\xi_j|^{m-1}), \quad 1 < m < \infty .$$

On peut affaiblir (2.3) de la manière suivante: On définit

(2.4) $$1/q_{|i|} = 1/m - (k-1)/N \text{ si } (k - |i|)m < N,\ 1/q_{|i|} > 0 \text{ si } (k - |i|)\, m = N,\ 1/q_{|i|} = 0 \text{ si } (k - |i|)m > N.$$

Si $1 \leq q \leq \infty$, soit $q' = q/(q-1)$. Posons $\varkappa_{|i|,|j|} = q_{|j|}/q'_{|i|}$. Soit $c(s)$ une fonction continue dans $\langle 0, \infty)$, ≥ 0. On supposera

(2.5) $$|a_i(x,\xi_j)| \leq c\,(\sum_{|j| < k - N/m} |\xi_j|)(g_i(x) + \sum_{k - N/m \leq |j| \leq k} |\xi_j|^{\varkappa_{|i|,|j|}})$$

avec $g_i \in L_{q'_{|i|}}(\Omega)$, $g_i(x) \geq 0$.

L'opérateur $a_i(x, D^j u)$ (dit de Němyckij) résulte continue de $W_m^{(k)}$ dans $L_{q'_{|i|}}$, cf. M.M. Vajnberg [8].

On se donne encore Q un espace de Banach tel que $\overline{\mathcal{D}(\Omega)} = Q$ et tel que $\overset{0}{W}{}_m^{(k)} \subset Q$ algébriquement et topologiquement. Soit $\mathcal{V}$ un ensemble linéaire, tel que $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{E}(\overline{\Omega})$ et désignons par $V = \overline{\mathcal{V}}$ dans $W_m^{(k)}$. On se donne encore $u_0 \in W_m^{(k)}$, engendrant la condition aux limites "stable" (type de Dirichlet), $g \in V'$ (dans le dual de V) tel que $gv = 0$ pour $v \in \overset{0}{W}{}_m^{(k)}$, engendrant la condition aux limites "non stable" (type de Neumann) et finalement $f \in Q'$. On désigne $gv = \langle v, g \rangle_{\partial\Omega}$, $fv = \langle v, f \rangle_\Omega$. Le problème aux limites: on cherche $u \in W_m^k$ de sorte que

(2.6) $u - u_0 \in V$,

(2.7) pour chaque $v \in V$: $\int_\Omega \sum_{|i| \leq k} D^i v \, a_i(x, D_j u) dx = \langle v, f \rangle_\Omega + \langle v, g \rangle_{\partial\Omega}$.

Si $\Phi(v)$ est une fonctionnelle sur $W_m^{(k)}$, on désigne par $D\Phi(v, \tilde{v})$ la différentielle de Gateaux au point v définie comme $\lim_{t \to 0} \frac{\Phi(v + t\tilde{v}) - \Phi(v)}{t} = D\Phi(v, \tilde{v})$. On supposera toujours que $D\Phi(v, \cdot)$ est une fonctionnelle linéaire et continue dans $W_m^{(k)}$.

Nous supposerons toujours dans la section 2: soit $\varphi(\xi_j)$ une fonction à support compacte dans E_d, où d est le nombre des indices $|j| \leq k$. Alors presque partout dans Ω

(2.8) $$\int_{E_d} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_j} a_i(x, \xi_\kappa) d\xi = \int_{E_d} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} a_j(x, \xi_\kappa) d\xi.$$

Théorème 1. Les conditions (2.5),(2.8) soient satisfaites. Alors

(2.9) $\Phi(v)=\int_0^1 dt\int_\Omega \sum_{|i|\le k} D^i v\, a_i(x, D^j u_0 + tD^j v)dx - \langle v, f\rangle_\Omega - \langle v, g\rangle_{\partial\Omega}$ est une fonctionnelle continue sur V et

(2.10) $D\Phi(v,\tilde v)=\int_\Omega \sum_{|i|\le k} D^i\tilde v\, a_i(x, D^j u_0 + D^j v)dx - \langle \tilde v, f\rangle_\Omega - \langle \tilde v, g\rangle_{\partial\Omega}$.

Démonstration. Soit $\varkappa$ le nombre fixé par $(1/\varkappa h^d)\int_{|\xi|<h} \exp(|\xi|^2/(|\xi|^2-h^2))d\xi = 1$ et posons pour presque tout x de Ω, $0<h<1$,

(2.11) $a_{ih}(x,\xi_j)=(1/\varkappa h^d)\int_{|\xi-x|<h} \exp(|\xi-Z|^2/(|\xi-Z|^2-h^2))a_i(x,x)dx$.

Il suit de (2.11) et de (2.5) que a_{ih} satisfait aussi (2.5) avec les autres $c(s)$, g_i, indépendamment de h. Définissons à l'aide de (2.9) $\Phi_h(v)$. En utilisant 2.8, nous obtenons le théorème 1 pour $\Phi_h(v)$, $\tilde v\in\mathcal{W}$, à plus forte raison $\frac{d}{d\tau}\Phi_h(v+\tau\tilde v)=\int_\Omega\sum_{|i|\le k} D^i\tilde v\, a_{ih}(x, D^j u_0 + D^j v + \tau D^j\tilde v)dx - \langle\tilde v, f\rangle_\Omega - \langle\tilde v, g\rangle_{\partial\Omega}$. Il en suit que pour $\tilde v\in\mathcal{W}_\tau$

$$(2.11)\quad \frac{\Phi_h(v+\tau\tilde v)-\Phi_h(v)}{\tau} = (1/\tau)\int_0^\tau d\tau\int_\Omega\sum_{|i|\le k} D^i\tilde v\, a_{ih}(x, D^j u_0 + D^j v + \tau D^j\tilde v)dx - \langle\tilde v, f\rangle_\Omega - \langle\tilde v, g\rangle_{\partial\Omega},$$

d'où (2.11) pour $v\in V$, d'où le théorème 1 pour $\Phi_h(v)$. Étant (2.5) pour a_{ih} indépendamment de h et $\lim_{h\to 0} a_{ih}(x, D^j u_0 + D^j v + \tau D^j\tilde v) = a_i(x, D^j u_0 + D^j v + \tau D^j\tilde v)$ presque partout dans Ω, on obtient (2.11) pour $\Phi(v)$, d'où le théorème.

$W_m^{(k)}$ étant un espace de Banach réfléxif comme un sousespace fermé d'un espace réfléxif, chaque boule fermée est faiblement compacte (théorème de Gantmacher, Šmuljan, Eberlein).

Nous utiliserons encore un énoncé facile, cf. M.M. Vajnberg [8]:

si pour chaque $v_1, v_2 \in V$

(2.12) $\Phi(v_2) - \Phi(v_1) \geq D\Phi(v_1, v_2 - v_1)$, alors $\Phi(v)$

est continue faiblement inférieurement:

(2.13) $v_n \rightharpoonup v$ (convergence faible) $\Rightarrow \varliminf_{n\to\infty} \Phi(v_n) \geq \Phi(v)$.

On a évidemment, cf. M.M. Vajnberg [8]: si $\Phi(v_0) = \min_{v\in W_m^k} \Phi(v)$, alors $D\Phi(v_0, v) = 0$. Encore: une fonctionnelle satisfaisant (2.13) atteint son minimum dans chaque boule fermée.

Nous dirons que la différentielle (2.10) est totalement monotone (strictement totalement monotone) si pour chaque $v, w \in V$, $v \neq w$,

(2.14 a) $\int_\Omega \sum_{|i|\leq k} D^i(w-v)[a_i(x, D^j u_0 + D^j w) - a_i(x, D^j u_0 + D^j v)]\,dx \geq 0$, (2.14 b) > 0.

Nous dirons que la différentielle (2.10) est coercitive, si pour chaque $v \in V$

(2.15) $\int_\Omega \sum_{|i|\leq k} D^i v\, a_i(x, D^j u_0 + D^j v)\,dx \geq \lambda(\|v\|_{k,m})$,

ou $\lambda(s)/s$ est sommable sur chaque $(0, R)$, $R > 0$ et

(2.16) $\lim_{R\to\infty} (1/R) \int_0^R \frac{\lambda(s)}{s}\,ds = \infty$.

Théorème 2 Les conditions (2.5),(2.8),(2.14),(2.15) (2.16) soient satisfaites. Alors il existe un minimum de (2.9) dans V soit v. $v+u_0$ est une solution du problème aux limites. Si la différentielle est strictement monotone, la solution est unique. Dans ce cas, $\lim_{n\to\infty}\Phi(v_n)= =\Phi(v)\Rightarrow v_n\rightharpoonup v$.

Démonstration Il suit facilement de (2.14) l'inégalité (2.12), d'où (2.13).

On a

$$(2.17)\quad \Phi(v)\geq\int_0^1\lambda(t\|v\|_{k,m})\frac{dt}{t}-c\|v\|_{k,m}=\|v\|_{k,m}\big((1/\|v\|_{k,m})\int_0^{\|v\|_{k,m}}\frac{\lambda(s)}{s}ds-c\big),$$

d'où $\lim_{\|v\|_{k,m}\to\infty}\Phi(v)=\infty$. Alors $\min_{\|v\|_{k,m}\leq R}\Phi(v)=\min_{v\in V}\Phi(v)$,

pour R assez grand, d'où l'existence de minimum. L'unicité est claire. Dans ce cas, soit v minimum et $\lim_{n\to\infty}\Phi(v_n)= =\Phi(v)$. En vertu, de (2.17), $\|v_n\|_{k,m}\leq R$. Si v_n ne convergait pas faiblement vers v, il existerait une sous-suite v_{n_k} telle que $v_{n_k}\rightharpoonup v^*\neq v\Rightarrow\Phi(v^*)=\Phi(v)$ ce qui n'est pas possible.

Remarque 1 La condition (2.15),(2.16) est évidemment satisfaite si

$$(2.17)'\quad \lim_{\|v\|_{k,m}\to\infty}(1/\|v\|_{k,m})\int_\Omega\sum_{|i|\leq k}D^i v\, a_i(x,D^j u_0+D^j v)dx=\infty.$$

La condition (2.15),(2.16) est satisfaite pour $u_0=0$ si (1.4) est valable. (Pour le problème de Dirichlet, il suffit $c>0$ dans (1.4).) Si encore (2.3) a lieu, (1.4) entraîne (2.15),(2.16) en général.

Remarque 2 La condition (1.3 a),(1.3b) entraîne la monotonie totale et la monotonie totale stricte, respectivement. (1.3 c) entraîne (1.3 a), (1.3 c) avec > 0 entraîne (1.3 b).

<u>Remarque 3</u> Si $a_i(x, \xi_j)$ sont continûment différentiables en ξ_j, la condition (2.8) équivaut à $\frac{\partial a_i}{\partial \xi_j} = \frac{\partial a_j}{\partial \xi_i}$.

Écrivons les opérateurs $a_i(x, D^j u)$ sous la forme $a_i(x, D^\alpha u, D^\beta u)$, où le symbole " $D^\alpha u$ " signifie le vecteur des dérivées avec $|\alpha| = k$ et le symbole " $D^\beta u$" celui des dérivées avec $|\beta| < k$.

On appele la différentielle (2.10) principalement monotone si pour chaque $v, w, \omega \in V$.

$$\text{(2.18)} \quad \begin{aligned} &\int_\Omega \sum_{|i| \leq k} D^i(w-v)\,[a_i(x, D^\alpha u_0 + D^\alpha w, D^\beta u_0 + D^\beta \omega) - \\ &\cdot a_i(x, D^\alpha u_0 + D^\alpha v, D^\beta u_0 + D^\beta \omega)\,dx \geq 0 , \end{aligned}$$

cf. aussi J. Leray, J.L. Lions [4].

Une condition suffisante pour le théorème suivant, en ce qui concernce la croissance des $a_i(x, \xi_\alpha, \xi_\beta)$ en ξ_α, ξ_β:

(2.19) $|i| = k \Rightarrow a_i(x, \xi_\alpha, \xi_\beta)$ ne dépend pas de

$$\xi_\beta, \ |a_i(x, \xi_\alpha, \xi_\beta| \leq c\,(1 + \sum_{|\alpha| = k} |\xi_\alpha|^{m-1}),$$

(2.20) $|i| < k \Rightarrow a_i(x, \xi_\alpha, \xi_\beta)$ ne dépend pas de

$$\xi_\alpha, \ |a_i(x, \xi_\alpha, \xi_\beta)| \leq c\,(1 + \sum_{|\beta| < k} |\xi_\beta|^{m-1}).$$

Les conditions (2.19), (2.20) peuvent être remplacées par les conditions plus faibles: Soient $c(s)$, $d(s)$ des fonctions continues dans $\langle 0, \infty)$, ≥ 0, avec $d(0) = 0$. On supposera

$$|i| = k \Rightarrow |a_i(x,\zeta_\alpha,\xi_\beta) - a_i(x,\zeta_\alpha,\eta_\beta)| \leq c(\max(\sum_{|\beta|<k-N/m}|\xi_\beta|, \sum_{|\beta|<k-N/m}|\eta_\beta|)) \cdot [d(\sum_{|\beta|<k-N/m}|\xi_\beta - \eta_\beta|)(1+\sum_{|\alpha|=k}|\zeta_\alpha|^{m-1}) + \sum_{|\alpha|=k,\, k-N/m\leq|\beta|<k} |\zeta_\alpha|^{\lambda}|\xi_\beta - \eta_\beta|^{\mu_{|\beta|}}], \tag{2.21}$$

où $0 < \mu_{|\beta|} < q_{|\beta|}\dfrac{m-1-\lambda}{m}$. Pour $|i| < k$, on supposera

$$a_i(x,\zeta_\alpha,\zeta_\beta) = \sum_{|\alpha|=k}\zeta_\alpha a_{i\alpha}(x,\zeta_\beta) + a_i(x,\zeta_\beta) \tag{2.22}$$

avec $a_{i\alpha}(x,\zeta_\beta)$, $a_i(x,\zeta_\beta)$ continues pour presque tous x de Ω en ζ_β, mesurables en x pour ζ_β fixés. Puis soit $\alpha_{i\alpha} \neq 0$ seulement si $q_{|i|} > m/(m-1)$.
On suppose

$$|a_{i\alpha}(x,\zeta_\beta)| \leq c(\sum_{|\beta|<k-N/m}|\zeta_\beta|)(1+\sum_{k-N/m\leq|\beta|<k}|\zeta_\beta|^{\nu_{|\beta|}}) \tag{2.22'}$$

avec $0 \leq \nu_{|\beta|} < \dfrac{(m-1)q_{|i|}-m}{mq_{|i|}}q_{|\beta|}$ [2] et

$$|a_i(x,\zeta_\beta)| \leq c(\sum_{|\beta|<k-N/m}|\zeta_\beta|)(g_i(x) + \sum_{k-N/m\leq|\beta|<k}|\zeta_\beta|^{\varkappa^*_{|i|,|\beta|}}), \tag{2.23}$$

où $g_i(x) \geq 0$, $g_i \in L_{q^*_{|i|}}$, $q^*_{|i|} > q'_{|i|}$, si $k-N/m \leq |i|$, $q^*_{|i|} = 1$, si $|i| < k-N/m$, $\varkappa^*_{|i|,|\beta|} < q_{|\beta|}/q'_{|i|}$.

<u>Théorème 3</u> Les conditions (2.5),(2.8),(2.15),(2.16),(2.18),(2,21),(2,22)',(2.23) soient satisfaites. Alors il existe un minimum de (2.9) dans V soit $v \cdot v + u_0$ est une solution du problème aux limites.

<u>Démonstration</u>. Soit $v_n \rightharpoonup v$. On a $\|v_n\|_{k,m} \leq R$ et en

---

2) Si $q_{|i|} = \infty$, on suppose $0 \leq \nu_{|\beta|} < (m-1)/m)q_{|\beta|}$.

vertu de (2.21)

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 dt\int_\Omega \sum_{|i|=k} D^i v_n\, [a_i(x, D^\alpha u_0 + tD^\alpha v_n, D^\beta u_0 + tD^\beta v_n) -$$
$$- a_i(x, D^\alpha u_0 + tD^\alpha v_n, D^\beta u_0 + tD^\beta v)]\,dx = 0 .$$

La condition (2.18) entraine comme audessus (2.13) pour w et $\int_0^1 dt\int_\Omega \sum_{|i|=k} D^i w\, a_i(x, D^\alpha u_0 + tD^\alpha w, D^\beta u_0 + tD^\beta v)\,dx$.

Il suit maintenant des (2.22)', (2.23) que $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 dt\int_\Omega \sum_{|i|<k} D^i v_n a_i($ $(x, D^\alpha u_0 + tD^\alpha v_n, D^\beta u_0 + tD^\beta v_n)\,dx = \int_0^1 dt\int_\Omega \sum_{|i|<k} D^i v\, a_i(x,$ $D^\alpha u_0 + tD^\alpha v, D^\beta u_0 + tD^\beta v)\,dx$. Le reste de la démonstration est comme pour le théorème 2.

Remarque 4. La condition

$$\sum_{|i|=k}(\xi_i - \eta_i)[a_i(x, \xi_\alpha, \zeta_\beta) - a_i(x, \eta_\alpha, \zeta_\beta)] \geq 0 \tag{2.24}$$

entraîne (2.18). Cf. aussi remarque 2.

3. Régularité de la solution, $m \geq 2$. On se bornera au cas $m \geq 2$. Le cas $1 < m < 2$ sera considéré entre outre dans un autre travail de l'auteur. Remarquons que la condition (2.8) n'est plus nécéssaire dans cette section. On supposera dans cette section la dérivabilité continue des $a_i(x, \zeta_j)$ en x, ζ_j et on désigne $a_{ij}(x, \zeta_j) = \frac{\partial a_i}{\partial \zeta_j}(x, \zeta_\alpha)$. Les conditions de croissance et de ellipticité des a_{ij} seront de deux types:

$$(3.1)\quad \begin{cases} |a_{ij}(x,\zeta_\alpha)| \leq c|\zeta_i|^{(m/2)-1}|\zeta_j|^{(m/2)-1} \text{ pour } |i| = |j| = k, \\ |a_{ij}(x,\zeta_\alpha)| \leq c|\zeta_j|^{(m/2)-1}(1+\sum_{|\alpha|\leq k}|\zeta_\alpha|^{(m/2)-1}), \\ |i|<k,\ |j| = k \quad \text{(analoguement pour} \\ |i| = k,\ |j|<k),\ |a_{ij}(x,\zeta_\alpha)| \leq c(1+\sum_{|\alpha|\leq k}|\zeta_\alpha|^{m-2}), \end{cases}$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
|i| < k,\ |j| < k, \\
\sum_{|i|=|j|=k} a_{ij}(x, \zeta_\alpha)\xi_i \xi_j \geq c \sum_{|i|=k} |\zeta_i|^{m-2} \xi_i^2,\ \left|\frac{\partial a_i}{\partial x_\ell}(x, \zeta_\alpha)\right| \leq \\
\leq c|\zeta_i|^{(m/2)-1}\left(1 + \sum_{|\alpha| \leq k} |\zeta_\alpha|^{m/2}\right),\quad |i| = k, \\
\left|\frac{\partial a_i}{\partial x_\ell}(x, \zeta_\alpha)\right| \leq \left(1 + \sum_{|\alpha| \leq k} |\zeta_\alpha|^{m-1}\right),\quad |i| < k,
\end{array}
\right.
$$

$$
(3.2)\quad
\left\{
\begin{array}{l}
|a_{ij}(x, \zeta_\alpha)| \leq c\left(d + \sum_{|\alpha|=k} \zeta_\alpha^2\right)^{(m/2)-1},\quad |i| = |j| = k,\ d \geq 0, \\
|a_{ij}(x, \zeta_\alpha)| \leq c\left(d + \sum_{|\alpha|=k} \zeta_\alpha^2\right)^{m/4-1/2}\left(1 + \sum_{|\alpha| \leq k} \zeta_\alpha^2\right)^{m/4-1/2},\ |i| < k,\ |j| = k, \\
\quad \text{(et analoguement pour } |i| = k,\ |j| < k\text{)},\ |a_{ij}(x, \zeta_\alpha)| \leq \\
\leq c\left(1 + \sum_{|\alpha| \leq k} \zeta_\alpha^2\right)^{m/2-1},\ \text{pour } |i| < k,\ |j| < k,\ \sum_{|i|=|j|=k} a_{ij}(x, \\
\zeta_\alpha)\xi_i \xi_j \geq c\left(a + \sum_{|\alpha|=k} \zeta_\alpha^2\right)^{(m/2)-1} \sum_{|i|=k} \xi_i^2, \\
\left|\frac{\partial a_i}{\partial x_\ell}\right| \leq c\left(1 + \sum_{|\alpha| \leq k} \zeta_\alpha^2\right)^{(m/2)-1/2},\quad \text{pour } |i| < k, \\
\left|\frac{\partial a_i}{\partial x_\ell}\right| \leq c\left(1 + \sum_{|\alpha|=k} \zeta_\alpha^2\right)^{m/4-1/4}\left(1 + \sum_{|\alpha| \leq k} \zeta_\alpha^2\right)^{m/4-1/4} \text{pour } |i| = k.
\end{array}
\right.
$$

En ce qui concerne l'affaiblissement des conditions (3.1), (3.2) respectivement, correspondant aux conditions (2.5) de la section précédente, nous le reservons au Lecteur.

Ω étant un domaine à frontière lipschitzienne, il est démontré aux travaux de l'auteur [5], [6] l'éxistence d'une fonction σ de $\mathcal{E}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, équivalente a la $dist(x, \partial\Omega)$, telle que

$$
(3.3)\qquad |D^i \sigma| \leq c\, \sigma^{1-|i|}
$$

et d'une suite croissante des sous-domaines $\Omega_m \subset \bar{\Omega}_m \subset \Omega$, telle que $\lim_{m \to \infty} \Omega_m = \Omega$ et telle que pour les σ_m correspondant, l'inégalité (3.3) est valable avec une constante ne dépendant pas de m.

Pour le terme "à droit" f, on supposera au sens des distributions:

(3.4) $\sum_{i=1}^{N} \| \frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma^{k} \|_{(\mathring{W}_m^{(k-1)})'} < c$

Si on s'intéressera des énoncés sur la régularité locale de la solution, il suffira de supposer que pour chaque $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\psi \geq 0$,

(3.5) $\sum_{i=1}^{N} \| \frac{\partial f}{\partial x_i} \psi^{k} \|_{(\mathring{W}_m^{(k-1)})'} < c(\psi)$.

Soit $h = (0, \dots |h|, 0, \dots 0) \in E_N$ avec $|h|$ sur l-ème place, tel que $|h| < 1/2\, dist(\Omega', \partial\Omega)$, $\varphi \in \mathring{W}_m^{(k)}(\Omega)$, $dist(supp\, \varphi, \partial\Omega)$ [3] $< 1/2\, dist(\Omega', \partial\Omega)$, $\overline{\Omega}' \subset \Omega$.
Désignons par $\varphi_h(x) = \varphi(x-h)$, par f_{-h} la distribution telle que $\langle \varphi, f_{-h} \rangle = \langle \varphi_h, f \rangle$ et $\Delta_h u = (u_{-h} - u)/|h|$.

Nous utiliserons cette propriété bien connue des espaces $W_m^{(k)}$, cf.p.ex. L. Nirenberg [7]: pour un domaine Ω borné, $k \geq 1$, $p \geq 1$, $\Omega' \subset \overline{\Omega}' \subset \Omega$, il est

(3.6) $u \in W_p^{(k)}(\Omega) \Longleftrightarrow \| \Delta_h u \| W_p^{(k-1)}(\Omega') \leq c \| u \| W_p^{(k)}(\Omega)$,

où $|h| < dist(\Omega', \partial\Omega)$, c indépendant de h et on a encore $\lim_{|h| \to 0} \Delta_h u = \frac{\partial u}{\partial x_l}$ dans $W_p^{(k-1)}(\Omega')$.

<u>Théorème 4</u>. Soit $u \in W_m^{(k)}(\Omega)$, une solution du problème (2.6), (2.7), $\Omega' \subset \overline{\Omega}' \subset \Omega$,

---

3) Le $supp\, \varphi$ signifie le support de φ à savoir la fermeture de l'ensemble où $\varphi(x) \neq 0$.

Supposons (3.1),(3.5). Alors

$$(3.7)\quad \int_{\Omega'} \sum_{\ell=1}^{N} \sum_{|i|=k} \left(\frac{\partial}{\partial x_\ell} |D^i u|^{m/2} \right)^2 dx \leq c(\Omega'),$$

d'où

$$(3.8\ \mathrm{a})\quad \int_{\Omega'} \sum_{|i|\leq k} |D^i u|^{mN/(N-2)} dx \leq c(\Omega') \qquad \text{pour } N \geq 3,$$

$$(3.8\ \mathrm{b})\quad \int_{\Omega'} \sum_{|i|\leq k} |D^i u|^p dx \leq c_p(\Omega'),\ p \text{ arbitraire} > 1 \quad \text{et } N = 2.$$

<u>Démonstration.</u> Il suit de (2.7)

$$(3.9)\quad \begin{aligned} &\int_\Omega \sum_{|i|\leq k} D^i \varphi \Big[\Big(\int_0^1 a_{ij}(x+th, (1-t) D^j u + D^j u_{-h}) dt \Big) \\ &D^j \Delta_h u + \int_0^1 \frac{\partial a_i}{\partial x_\ell} (x+th, (1-t) \cdot D^j u + t D^j u_{-h}) dt \Big] \\ &dx = \Big\langle \varphi, \int_0^1 \frac{\partial f_{-th}}{\partial x_\ell} dt \Big\rangle . \end{aligned}$$

Soit $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\psi(x) \geq 0$, $\psi(x) = 1$ sur Ω', $dist(supp\,\psi, \partial\Omega) < (1/2).dist(\Omega', \partial\Omega)$ et posons $\varphi = \psi^{2k} \Delta_h u$. Premièrement, il suit des hypothèses (3.1) que toutes les fonctions a intégrer dans (3.9) sont sommables. Il suit de (3.1), (3.5),(3.6),(3.9) avec la notation $J = \int_\Omega \sum_{|i|=k} (\int_0^1 (1-t) D^i u + + t D^i u_{-h}|^{m-2} dt)(D^i \Delta_h u)^2 \psi^{2k} dx$:

$$(3.10)\quad \begin{aligned} &c_1 J \leq c_2(\psi) \|u\|_{k,m}^m + c_3(\psi) \|u\|_{k,m}^{m/2} J^{1/2} + \\ &+ c_4(\psi) \sum_{\ell=1}^N \Big\| \frac{\partial f}{\partial x_\ell} \psi^k \Big\|_{(\overset{\circ}{W}{}_m^{(k-1)})'} \|u\|_{k,m} , \end{aligned}$$

d'où

$$(3.11)\quad J \leq c(\psi).$$

Nous avons $(1/|h|^2)(|D^i u_{-h}|^{m/2} - |D^i u|^{m/2}) \leq (m^2/4)(\int_0^1 |(1-t) D^i u + t D^i u_{-h}|^{m-2} dt)(D^i \Delta_h u)^2$, d'où en vertu de (3.6),(3.11) suit l'assertion.

Théorème 5. Soit $u \in W_m^{(k)}(\Omega)$ une solution du problème (2.6),(2.7). Supposons (3.1),(3.4). Alors $\int_\Omega \sigma^{2k} \sum_{\ell=1}^N \sum_{|i|=2k} \left(\frac{\partial}{\partial x_\ell} |D^i u|^{m/2}\right)^2 dx \leq c$, d'où pour $N \geq 3$:

(3.12) $\int_\Omega \sum_{|i|\leq k} \sigma^{k\,2N/(N-2)} |D^i u|^{mN/(N-2)} dx \leq c$,

pour $N = 2$:

(3.13) $\int_\Omega \sum_{|i|\leq k} \sigma^{2kp} |D^i u|^p dx \leq c_p$,

où $1 < p < \infty$, d'ailleurs arbitraire.

Démonstration. Pour le voir, il suffit de remarquer qu'on peut utiliser dans la démonstration précédente σ_n définie par 0 hors de Ω_n au lieu de ψ. En vertu du théorème précédent, on peut faire tendre $|h| \to 0$ dans (3.9) avec $\varphi = \sigma_n^{2k} \Delta_h u$. Il en suit

$\int_\Omega \sigma_n^{2k} \sum_{|i|=k} |D^i u|^{m-2} \left(D^i \frac{\partial u}{\partial x_\ell}\right)^2 dx \leq c$ avec c indépendant de n, d'où l'assertion.

Théorème 6 Soit $u \in W_m^{(k)}(\Omega)$ une solution du problème (2.6),(2.7) et supposons (3.2),(3.5). Alors pour $\Omega' \subset \overline{\Omega}' \subset \Omega$,

$\int_\Omega \sum_{\ell=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial x_\ell} [d + \sum_{|\alpha|=k} (D^\alpha u)^2]^{m/4}\right)^2 dx \leq c(\Omega')$, d'où (3.8a), (3.8b).

Démonstration. On part de (3.9) avec $\varphi = \psi^{2k} \Delta_h u$; on voit que toutes les fonctions a intégrer dans (3.9) sont sommables. Désignons

$J = \int_\Omega \sum_{|i|=k} \left(\int_0^1 [d + \sum_{|\alpha|=k} ((1-t)D^\alpha u + t D^\alpha u_h)^2]^{(m/2)-1} dt\right) (D^i \Delta_h u)^2 \psi^{2k} dx.$

Il suit de (3.2),(3.5),(3.6),(3.9) de nouveau (3.10), d'où

(3.11). Nous avons
$(1/|h|)^2\{[+\sum_{|\alpha|=k}(D^\alpha u_{-h})^2]^{m/4}-[d+\sum_{|\alpha|=k}(D^\alpha u)^2]^{m/4}\}^2 \le m^2/4.$
$\cdot(\int_0^1[d+\sum_{|\alpha|=k}((1-t)D^\alpha u+tD^\alpha u_{-h})^2|^{(m/2)-1}dt)\sum_{|i|=k}(D^i\Delta_h u)^2,$ d'où en vertu de

(3.6),(3.11) suit l'assertion.

On obtient de la même manière comme le théorème 5:

<u>Théorème 7</u>. Soit $u\in W_m^{(k)}(\Omega)$ une solution du problème (2.6),(2.7).

Supposons (3.2),(3.5). Alors $\int_\Omega \sigma^{2k}\sum_{\ell=1}^{N}(\frac{\partial}{\partial x_\ell}[d+\sum_{|\alpha|=k}(D^\alpha u)^2]^{m/4})^2dx \le c$, d'où (3.12),(3.13).

<u>Remarque 5</u> Nous obtenons pour (3.4) $\int_\Omega |d+\sum_{|\alpha|=k}(D^\alpha u)^2|^{(m/2)-1}$

$\sum_{|i|=k+1}(D^i u)^2dx \le c$, et pour (3.5)

$\int_\Omega \sigma^{2k}|d+\sum_{|\alpha|=k}(D^\alpha u)^2|^{(m/2)-1}\sum_{|i|=k+1}(D^i u)^2dx \le c$.

<u>Remarque 6</u> Les théorèmes 6,7 sont valables, si l'on remplace dans (3.2) toutes les expressions $(d+\sum_{|\alpha|=k}\xi_\alpha^2)$ par $(d+\sum_{|\alpha|\le k}\xi_\alpha^2)$.

<u>Exemple</u> Soit $\Omega=\{x\in E_N,\ |x|<1\}$, $k=1$, $m=4$, $a_\ell(x,\xi_m)=$ $=4(\sum_{s=1}^{N}\xi_s^2)\xi_\ell$.
Soit $V=\mathring{W}_4^{(k)}=Q$, $u_0=1$, $f=(-16^2/27)N$: $\langle v,f\rangle=(-16^2/27)N\int_\Omega v\,dx$.
Le théorème 1 est applicable: $\Phi(v)=\int_\Omega[\sum_{s=1}^{N}(\frac{\partial v}{\partial x_s})^2]^2dx+$

$+(16^2/27)N\int_\Omega v\ dx$. Les conditions (1.3a),(1.4) étant satisfaites, il existe une solution unique

$u=(\sum_{s=1}^{N}x_s^2)^{2/3}$. Les conditions (3.2),(3.4) sont satisfaites, alors le théorème 5 a lieu. Néanmoins quoique u_0, f, a_ℓ sont analytiques, la solution n'a pas les deuxièmes dérivées continues dans l'origine, tant moins est analytique dans Ω. Pour la régularité plus élévée de la solution, il est alors nécéssaire que $d > 0$ dans (3.2).

Problème est de savoir la régularité précise correspondant au cas (3.2) avec $d = 0$. C'est le théorème 5? Si $d > 0$, la solution est-elle régulière dans borne en dépendence des données et analytique si telles sont les données? (Problème de Hilbert.)

Bibliographie

[1] F.E. BROWDER: Variational methods for nonlinear elliptic eigenvalue problems, Bull.Amer. Math.Soc.71(1965),176-183.

[2] F.E. BROWDER: Séminaire de mathématiques supérieures, Montréal 1965.

[3] E. CAGLIARDO: Proprietà di alcune classi in più variabili, Ricerche di Matem.7(1958),102-137.

[4] J. LERAY, J.L. LIONS: Quelques résultats de Višik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder,Sém.sur les équat.part.,Collège de France 1964.

[5] J. NEČAS: Sur une méthode pour resoudre les équations aux dérivées partielles du type elliptique voisine de la variationnelle,Annali Scuola Norm.Sup.Pisa,vol.XVI(1962),305-326.

[6] J. NEČAS: Sur les domaines du type $\mathfrak{N}$ (en russe), Czech.Math.Journ.12(1962),274-287.

[7] L. NIRENBERG: Remarks on Strongly Elliptic Partial Differential Equations,Comm.Pure Appl. Math.8(1955),649-675.

[8] M.M. VAJNBERG: Variational methods for investigation of nonlinear operators (en russe),GITTL, Moscou 1956.

[9] M.M. VAJNBERG, R.I. KAČUROVSKIJ: On the variational theory of nonlinear operators and equations (en russe),Dokl.Akad.Nauk SSSR 129(1959),1199-1202.

[10] M.I. VIŠIK: Quasilinear strongly elliptic systems of differential equations having divergence form (en russe),Trudy Mosk.Mat.Obšč. 12(1963),125-184.

(Received May 19,1966)