A. L. Kuz'mina

Об одной задаче оптимального управления

*Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, Vol. 7 (1966), No. 3, 265--277

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105060

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

7, 3 (1966)

# ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

А.Л. КУЗЬМИНА, Казань

В этой заметке мы исследуем оптимальную задачу для гиперболических систем, которая рассматривалась А.И. Егоровым [1].

Пусть управляемый процесс описывается системой уравнений

(1) $z_{ixy} = f_i(x, y, z_1, \dots, z_m, z_{1x}, \dots, z_{mx}, z_{1y}, \dots, z_{my}, v)$, $i = \overline{1, m}$,

где функции $f_i$ имеют в области $G\,(0 \le x \le X,\ 0 \le y \le Y)$ непрерывные производные первого порядка по $x$ и $y$ и дважды непрерывно дифференцируемы по остальным аргументам. Управляющий параметр $v = v(x, y)$, определенный в области $G$, принимает значения из некоторой выпуклой (открытой или замкнутой) области $V$ $r$-мерного эвклидова пространства.

Предположим, что функции $z_i(x, y)$, $i = \overline{1, m}$, определяемые системой (1), удовлетворяют условиям:

(2) $$z_{iy}(0, y) = \varphi_i(y, z_1(0, y), \dots, z_m(0, y), v^1),$$

$$z_{ix}(x, 0) = \psi_i(x, z_1(x, 0), \dots, z_m(x, 0), v^2)$$

и

(3) $$z_i(0, 0) = z_i^0, \quad i = \overline{1, m},$$

где функции $\varphi_i$ и $\psi_i$ непрерывны по $y$ и $x$ и дважды непрерывно дифференцируемы по остальным аргументам, а $v^1 = v^1(y)$ и $v^2 = v^2(x)$ - управляющие параметры, принимающие значения соответственно из выпуклых (открытых или замкнутых) областей $V^1$ и $V^2$ $s$- и $t$- мерных эвклидовых пространств.

Под допустимым управлением в краевой задаче (1) - (3) будем понимать функцию $\omega(x,y) = (v(x,y), v^1(y), v^2(x))$, компоненты которой являются кусочно-непрерывными функциями со значениями в $V$, $V^1$ и $V^2$.

Известно ([1],стр.1218-19), что каждому допустимому управлению $\omega(x,y)$ соответствует единственное решение краевой задачи (1) - (3), удовлетворяющее некоторым условиям гладкости.

Рассмотрим функционал

$$S = \sum_{i=1}^{m} A_i z_i(X,Y), \tag{4}$$

где $A_i$, $i = \overline{1,m}$ - заданные действительные числа, $z_i(x,y), i = \overline{1,m}$ - решение задачи (1) - (3), соответствующее произвольному допустимому управлению $\omega(x,y)$.

Допустимое управление, реализующее минимум (максимум) функционала $S$, называется $min$ -оптимальным ( $max$ - оптимальным) по $S$ .

Условия оптимальности управления в задаче (1) - (3) были найдены А.И. Егоровым [1] при дополнительных предположениях относительно функций $f_i$, $\varphi_i$ и $\psi_i$ (см.стр.1219).

Тем же методом мы получим здесь условия оптимальности управления в краевой задаче (1) - (3) в общем случае. Для этого введем вспомогательные функции $u_i(x,y)$, $i = \overline{1,m}$, с помощью уравнений

$$u_{ixy} = \frac{\partial H(x,y,p,v)}{\partial z_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial H(x,y,p,v)}{\partial z_{ix}}\right) - \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial H(x,y,p,v)}{\partial z_{iy}}\right), \qquad i = \overline{1,m}, \tag{5}$$

и условий:

$$u_{ix}(x,Y) = -\frac{\partial H(x,Y,p,v)}{\partial z_{iy}},$$

(6) $$u_{iy}(X,y) = -\frac{\partial H(X,y,p,v)}{\partial z_{ix}},$$

$$u_i(X,Y) = -A_i, \quad i=\overline{1,m},$$

где $A_i$ - постоянные, входящие в $S$,

$$p=(z,u,z_x,z_y)=(z_1,\dots,z_m,u_1,\dots,u_m,z_{1x},\dots,z_{mx},z_{1y},\dots,z_{my}),$$

$$H(x,y,p,v)=\sum_{i=1}^{m} u_i f_i(x,y,z,z_x,z_y,v).$$

Введем еще функции $w_i^1(y)$ и $w_i^2(x)$, $i=\overline{1,m}$, удовлетворяющие соответственно системам уравнений

$$w_{iy}^1(y) = u_{iy}(0,y) + \frac{\partial H(0,y,p(0,y),v(0,y))}{\partial z_{ix}} -$$

(7) $$-\frac{\partial H_1(y,q^1(y),v^1)}{\partial z_i},$$

$$w_{ix}^2(x) = u_{ix}(x,0) + \frac{\partial H(x,0,p(x,0),v(x,0))}{\partial z_{iy}} -$$

$$-\frac{\partial H_2(x,q^2(x),v^2)}{\partial z_i}, \quad i=\overline{1,m},$$

и условиям:

(8) $$w_i^1(Y)=u_i(0,Y), \quad w_i^2(X)=u_i(X,0), \quad i=\overline{1,m},$$

где

$$q^1(y)=(z_1(0,y),\dots,z_m(0,y), w_1^1(y),\dots,w_m^1(y)),$$

$$H_1(y,q^1(y),v^1)=\sum_{i=1}^{m} w_i^1(y)\varphi_i(y,z(0,y),v^1(y)),$$

$$q^2(x)=(z_1(x,0),\dots,z_m(x,0), w_1^2(x),\dots,w_m^2(x)),$$

$$H_2(x,q^2(x),v^2)=\sum_{i=1}^{m} w_i^2(x)\psi_i(x,z(x,0),v^2(x)).$$

Предположим, что функции $f_i$, $\varphi_i$, $\psi_i$ и допустимое управление $\omega(x,y)$ таковы, что краевые задачи (5) - (6)

и (7) - (8) однозначно разрешимы при каждом допустимом управлении.

Будем говорить, что допустимое управление $\omega(x,y)$ в краевой задаче (1) - (3) удовлетворяет условиям максимума, если

$$H(x,y,p(x,y),v(x,y)) (=) \sup_{v\in V} H(x,y,p(x,y),v),$$

$$H_1(y,q^1(y),v^1(y)) (=) \sup_{v^1\in V^1} H(y,q^1(y),v^1),$$

$$H_2(x,q^2(x),v^2(x)) (=) \sup_{v^2\in V^2} H_2(x,q^2(x),v^2),$$

где $z(x,y)$ и $u(x,y)$ а также $w^1(y)$ и $w^2(x)$ - соответственно решения задач (1) - (3), (5) - (6) и (7) - (8), соответствующие управлению

$$\omega(x,y) = (v(x,y),\ v^1(y),\ v^2(x)),$$

символ $(=)$ означает равенство почти всюду. Условия минимума определяются аналогично.

Имеет место

Теорема 1. Для того чтобы допустимое управление $\omega(x,y)$ в краевой задаче (1) - (3) было $min$ -оптимальным ( $max$ - оптимальным) по $S$, необходимо, чтобы оно удовлетворяло условиям максимума (минимума).

Доказательство теоремы проведем по той же схеме, что и доказательство теоремы 3 в [1].

Сначала получим формулу приращения функционала $S$. Пусть $\omega(x,y)$ допустимое управление, $z(x,y)$ и $u(x,y)$ а также $w^1(y)$ и $w^2(x)$ соответствующие ему решения краевых задач (1) - (3), (5) - (6) и (7) - (8). Тогда имеет место равенство

$$\mathcal{J}(p,q^1,q^2,\omega)=\iint\limits_G\Big[\sum_{i=1}^m u_i z_{ixy}-H(x,y,p,v)\Big]dx\,dy+$$
$$+\int_0^X\Big[\sum_{i=1}^m w_i^2(x)z_{ix}(x,0)-H_2(x,q^2(x),v^2)\Big]dx+$$
$$+\int_0^Y\Big[\sum_{i=1}^m w_i^1(y)z_{iy}(0,y)-H_1(y,q^1(y),v^1)\Big]dy=0\,.$$

Обозначим через $\Delta\omega$ произвольное допустимое приращение управления $\omega(x,y)$ а через $\Delta z$, $\Delta u$, $\Delta w^1$ и $\Delta w^2$ – соответствующие ему приращения функций $z(x,y)$, $u(x,y)$, $w^1(y)$ и $w^2(x)$. Очевидно, что функции $\Delta z_i$ и $\Delta u_i$ удовлетворяют уравнениям

$$\Delta z_{ixy}=\Delta\frac{\partial H}{\partial w_i}\,,$$

(9)

$$\Delta u_{ixy}=\Delta\frac{\partial H}{\partial z_i}-\frac{d}{dx}\Big(\Delta\frac{\partial H}{\partial z_{ix}}\Big)-\frac{d}{dy}\Big(\Delta\frac{\partial H}{\partial z_{iy}}\Big),\quad i=\overline{1,m},$$

и условиям

$$\Delta z_{iy}(0,y)=\Delta\varphi_i(y,z(0,y),v^1)\,,$$
$$\Delta z_{ix}(x,0)=\Delta\psi_i(x,z(x,0),v^2)\,,$$

(10)
$$\Delta z_i(0,0)=0\,,$$
$$\Delta u_{ix}(x,Y)=-\Delta\frac{\partial H(x,Y,p,v)}{\partial z_{iy}}\,,$$
$$\Delta u_{iy}(X,y)=-\Delta\frac{\partial H(X,y,p,v)}{\partial z_{ix}}\,,$$
$$\Delta u_i(X,Y)=0\,,\quad i=\overline{1,m},$$

а функции $\Delta w_i^1$ и $\Delta w_i^2$ удовлетворяют уравнениям

$$\Delta w_{iy}^1(y)=\Delta u_{iy}(0,y)+\Delta\frac{\partial H(0,y,p(0,y),v(0,y))}{\partial z_{ix}}-$$

(11)
$$-\Delta\frac{\partial H_1(y,q^1(y),v^1)}{\partial z_i}\,,$$
$$\Delta w_{ix}^2(x)=\Delta u_{ix}(x,0)+\Delta\frac{\partial H(x,0,p(x,0),v(x,0))}{\partial z_{iy}}-$$
$$-\Delta\frac{\partial H_2(x,q^2(x),v^2)}{\partial z_i}\,,\quad i=\overline{1,m},$$

и условиям

$$\Delta w_i^1(Y) = \Delta u_i(0, Y) ,$$

(12)
$$\Delta w_i^2(X) = \Delta u_i(X,0) , \quad i = \overline{1,m} .$$

Так как $\mathcal{I} = 0$ , то

$$\Delta\mathcal{I} = \mathcal{I}(p+\Delta p, q^1+\Delta q^1, q^2+\Delta q^2, \omega+\Delta\omega) - \mathcal{I}(p, q^1, q^2, \omega) =$$
$$= \iint_G \Big\{ \sum_{i=1}^{m} [\Delta u_i \Delta z_{ixy} + u_i \Delta z_{ixy} + \Delta u_i z_{ixy}] -$$
$$- [H(x,y,p+\Delta p, v+\Delta v) - H(x,y,p,v)] \Big\} dx\,dy +$$

(13)
$$+ \int_0^X \Big\{ \sum_{i=1}^{m} [\Delta w_i^2 \Delta z_{ix}(x,0) + w_i^2 \Delta z_{ix}(x,0) + \Delta w_i^2 z_{ix}(x,0)] -$$
$$- [H_2(x, q^2+\Delta q^2, v^2+\Delta v^2) - H_2(x, q^2, v^2)] \Big\} dx +$$
$$+ \int_0^Y \Big\{ \sum_{i=1}^{m} [\Delta w_i^1 \Delta z_{iy}(0,y) + w_i^1 \Delta z_{iy}(0,y) + \Delta w_i^1 z_{iy}(0,y)] -$$
$$- [H_1(y, q^1+\Delta q^1, v^1+\Delta v^1) - H_1(y, q^1, v^1)] \Big\} dy = 0 .$$

Преобразуем равенство (13). Учитывая (9) - (12), после элементарных преобразований получим:

$$\iint_G \sum_{i=1}^{m} \Delta u_i \Delta z_{ixy}\, dx\,dy + \int_0^X \sum_{i=1}^{m} \Delta w_i^2 \Delta z_{ix}(x,0)\, dx +$$
$$+ \int_0^Y \sum_{i=1}^{m} \Delta w_i^1 \Delta z_{iy}(0,y)\, dy =$$
$$= \iint_G \sum_{i=1}^{m} [\Delta \frac{\partial H}{\partial z_i} \Delta z_i + \Delta \frac{\partial H}{\partial z_{ix}} \Delta z_{ix} + \Delta \frac{\partial H}{\partial z_{iy}} \Delta z_{iy}]\, dx\,dy -$$
$$- \int_0^X \sum_{i=1}^{m} \Big\{ [\Delta u_{ix}(x,Y) + \Delta \frac{\partial H(x,Y,p(x,Y),v)}{\partial z_{iy}}] \Delta z_i(x,Y) -$$
$$- \Delta \frac{\partial H(x,0,p(x,0),v)}{\partial z_{iy}} \Delta z_i(x,0) +$$
$$+ [\Delta u_i(x,0) - \Delta w_i^2(x)] \Delta z_{ix}(x,0) \Big\} dx -$$
$$- \int_0^Y \sum_{i=1}^{m} \Big\{ [\Delta u_{iy}(X,y) + \Delta \frac{\partial H(X,y,p(X,y),v)}{\partial z_{ix}}] \Delta z_i(X,y) -$$
$$- \Delta \frac{\partial H(0,y,p(0,y),v)}{\partial z_{ix}} \Delta z_i(0,y) +$$
$$+ [\Delta u_i(0,y) - \Delta w_i^1(y)] \Delta z_{iy}(0,y) \Big\} dy =$$

$$= \iint\limits_G \sum_{i=1}^{m} \left[ \Delta \frac{\partial H}{\partial z_i} \Delta z_i + \Delta \frac{\partial H}{\partial z_{ix}} \Delta z_{ix} + \Delta \frac{\partial H}{\partial z_{iy}} \Delta z_{iy} \right] dx\,dy +$$

$$+ \int_0^X \sum_{i=1}^{m} \Delta \, \frac{\partial H_2(x, q^2(x), v^2)}{\partial z_i} \Delta z_i(x,0)\,dx +$$

$$+ \int_0^Y \sum_{i=1}^{m} \Delta \, \frac{\partial H_1(y, q^1(y), v^1)}{\partial z_i} \Delta z_i(0,y)\,dy \, .$$

С другой стороны,

$$\iint\limits_G \sum_{i=1}^{m} \Delta u_i \Delta z_{ixy}\,dx\,dy + \int_0^X \sum_{i=1}^{m} \Delta w_i^2 \Delta z_{ix}(x,0)\,dx +$$

$$+ \int_0^Y \sum_{i=1}^{m} \Delta w_i^1 \Delta z_{iy}(0,y)\,dy =$$

$$= \iint\limits_G \sum_{i=1}^{m} \Delta \frac{\partial H}{\partial u_i} \Delta u_i\,dx\,dy +$$

$$+ \int_0^X \sum_{i=1}^{m} \Delta \, \frac{\partial H_2(x, q^2(x), v^2)}{\partial w_i^2} \Delta w_i^2\,dx +$$

$$+ \int_0^Y \sum_{i=1}^{m} \Delta \, \frac{\partial H_1(y, q^1(y), v^1)}{\partial w_i^1} \Delta w_i^1\,dy \, .$$

Из этих двух равенств будем иметь:

$$\iint\limits_G \sum_{i=1}^{m} \Delta u_i \Delta z_{ixy}\,dx\,dy + \int_0^X \sum_{i=1}^{m} \Delta w_i^2 \Delta z_{ix}(x,0)\,dx +$$

$$+ \int_0^Y \sum_{i=1}^{m} \Delta w_i^1 \Delta z_{iy}(0,y)\,dy =$$

$$(14) = \frac{1}{2} \left[ \iint\limits_G \sum_{i=1}^{4m} \Delta \frac{\partial H}{\partial p_i} \Delta p_i\,dx\,dy + \right.$$

$$+ \int_0^X \sum_{i=1}^{2m} \Delta \, \frac{\partial H_2(x, q^2(x), v^2)}{\partial q_i^2} \Delta q_i^2(x)\,dx +$$

$$+ \int_0^Y \sum_{i=1}^{2m} \Delta \, \frac{\partial H_1(y, q^1(y), v^1)}{\partial q_i^1} \Delta q_i^1(y)\,dy \, .$$

Далее, используя формулу Грина (см.[1], стр.1212) и соотношения (5) - (6) и (7) - (8), находим:

$$\iint_G \sum_{i=1}^{m} u_i \Delta z_{ixy} dx dy + \int_0^X \sum_{i=1}^{m} w_i^2 \Delta z_{ix}(x,0) dx +$$
$$+ \int_0^Y \sum_{i=1}^{m} w_i^1 \Delta z_{iy}(0,y) dy =$$
$$= -\sum_{i=1}^{m} A_i \Delta z_i(X,Y) +$$
$$(15)\quad + \iint_G \sum_{i=1}^{m} \left[ \frac{\partial H}{\partial z_i} \Delta z_i + \frac{\partial H}{\partial z_{ix}} \Delta z_{ix} + \frac{\partial H}{\partial z_{iy}} \Delta z_{iy} \right] dx dy +$$
$$+ \int_0^X \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial H_2(x, q^2(x), v^2)}{\partial z_i} \Delta z_i(x,0) dx +$$
$$+ \int_0^Y \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial H_1(y, q^1(y), v^1)}{\partial z_i} \Delta z_i(0,y) dy .$$

Очевидно,

$$\iint_G \sum_{i=1}^{m} \Delta u_i z_{ixy} dx dy + \int_0^X \sum_{i=1}^{m} \Delta w_i^2 z_{ix}(x,0) dx +$$
$$+ \int_0^Y \sum_{i=1}^{m} \Delta w_i^1 z_{iy}(0,y) dy =$$
$$(16)\quad = \iint_G \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial u_i} \Delta u_i dx dy +$$
$$+ \int_0^X \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial H_2(x, q^2(x), v^2)}{\partial w_i^2} \Delta w_i^2 dx +$$
$$+ \int_0^Y \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial H_1(y, q^1(y), v^1)}{\partial w_i^1} \Delta w_i^1 dy .$$

Учитывая (14) - (16), из (13) получаем формулу приращения функционала:

$$\Delta S = -\iint_G [H(x,y,p,v+\Delta v) - H(x,y,p,v)] dx dy -$$
$$(17)\quad - \int_0^X [H_2(x, q^2(x), v^2 + \Delta v^2) - H_2(x, q^2(x), v^2)] dx -$$
$$- \int_0^Y [H_1(y, q^1(y), v^1 + \Delta v^1) - H_1(y, q^1(y), v^1)] dy - \eta ,$$

где

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 ,$$

$$\eta_1 = \frac{1}{2}\iint\limits_G \sum_{k=1}^{4m} \{ [ \frac{\partial H(x,y,p,v+\Delta v)}{\partial p_i} - \frac{\partial H(x,y,p,v)}{\partial p_i} ] \Delta p_i +$$

$$+ \sum_{i=1}^{4m} [ \frac{\partial^2 H(x,y,p+\theta\Delta p, v+\Delta v)}{\partial p_i \ \partial p_k} - \frac{\partial^2 H(x,y,p+\theta_1 \Delta p, v+\Delta v)}{\partial p_i \ \partial p_k} ] \times$$

$$\times \Delta p_i \Delta p_k \} dx\, dy ,$$

$$\eta_2 = \frac{1}{2}\int_0^X \sum_{i=1}^{2m} \{ [ \frac{\partial H_2(x,q^2,v^2+\Delta v^2)}{\partial q_i^2} - \frac{\partial H_2(x,q^2,v^2)}{\partial q_i^2} ] \Delta q_i^2(x) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{2m} [ \frac{\partial^2 H_2(x,q^2+\theta_2 \Delta q^2, v^2+\Delta v^2)}{\partial q_i^2 \ \partial q_k^2} - \frac{\partial^2 H_2(x,q^2+\theta_3 \Delta q^2, v^2+\Delta v^2)}{\partial q_i^2 \ \partial q_k^2} ] \times$$

$$\times \Delta q_i^2 \Delta q_k^2 \} dx ,$$

$$\eta_3 = \frac{1}{2}\int_0^Y \sum_{i=1}^{2m} \{ [ \frac{\partial H_1(y,q^1,v^1+\Delta v^1)}{\partial q_i^1} - \frac{\partial H_1(y,q^1,v^1)}{\partial q_i^1} ] \Delta q_i^1(y) +$$

$$(17^1) \quad + \sum_{k=1}^{2m} [ \frac{\partial^2 H_1(y,q^1+\theta_4 \Delta q^1, v^1+\Delta v^1)}{\partial q_i^1 \ \partial q_k^1} - \frac{\partial^2 H_1(y,q^1+\theta_5 \Delta q^1, v^1+\Delta v^1)}{\partial q_i^1 \ \partial q_k^1} ] \times$$

$$\times \Delta q_i^1 \Delta q_k^1 \} dy, \quad 0 \le \theta, \ \theta_i \le 1, \ i = \overline{1,5} .$$

Заметим, что формула (17) - ($17^1$) отличается от соответствующей формулы (1.44) - ($1.44^1$) ([1],стр.1222) тем, что в нее входят функции $w_i^1(y)$ и $w_i^2(x)$ вместо $u_i(0,y)$ и $u_i(x,0)$.

Поэтому для оценки остаточного члена $\eta$, которая может быть произведена так же, как в [1](стр.1216,1223-24), необходимо получить оценку $\Delta w_i^1(y)$ и $\Delta w_i^2(x)$, $i=\overline{1,m}$.

Из (11) - (12) находим:

$$\Delta w_i^1(y) = \Delta u_i(0,\dot{y}) - \int_y^Y \Delta \frac{\partial H(0,y,p(0,y),v(0,y))}{\partial z_{ix}} dy + \int_y^Y \Delta \frac{\partial H_1(y, q^1(y), v^1)}{\partial z_i} dy, \quad i=1,m.$$

Используя оценки $|\Delta z_i(0,y)|$, $|\Delta z_{ix}(0,y)|$, $|\Delta z_{iy}(0,y)|$ и $|\Delta u_i(x,y)|$ ([1], (1.45) - (1.47) и свойства функций $f_i$, $\varphi_i$ и $\psi_i$ получим:

$$\sum_{i=1}^m |\Delta w_i^1(y)| \le M_1 \iint_G \Delta v(x,y)\,dx\,dy + M_2 \int_0^X \Delta v^2(x)\,dx + M_3 \int_0^Y \Delta v^1(y)\,dy + M_4 \int_y^Y \sum_{i=1}^m |\Delta w_i^1(y)|\,dy, \quad \Delta\cdot = \sum_K |\Delta\cdot|,$$

где $M_1$, $M_2$, $M_3$ и $M_4$ - определенные положительные постоянные.

Отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^m |\Delta w_i^1(y)| \le M_1^* \iint_G \Delta v(x,y)\,dx\,dy + M_2^* \int_0^X \Delta v^2(x)\,dx + M_3^* \int_0^Y \Delta v^1(y)\,dy, \quad ^{*}$$

и, следовательно,

$$|\Delta w_i^1(y)| \le M_1^* \iint_G \Delta v(x,y)\,dx\,dy + M_2^* \int_0^X \Delta v^2(x)\,dx + M_3^* \int_0^Y \Delta v^1(y)\,dy.$$

Аналогично найдем:

$$|\Delta w_i^2(x)| \le \tilde{M}_1 \iint_G \Delta v(x,y)\,dx\,dy + \tilde{M}_2 \int_0^X \Delta v^2(x)\,dx + \tilde{M}_3 \int_0^Y \Delta v^1(y)\,dy.$$

Теперь доказательство теоремы можно закончить дословно

---

* Так как $f(y) \le Me^{KMY}$, если $f(y) \le M(1 + K\int_y^Y f(t)\,dt)$, $0 \le y \le Y$, $M$ и $K > 0$.

так же, как доказательство теоремы 3 ([1],стр.1225-26).

Покажем, что формула (17) позволяет получить более общий результат для линейной краевой задачи.

В самом деле, пусть управляемый процесс описывается системой уравнений

$$z_{ixy}=\sum_{k=1}^{m}[c_{ik}(x,y)z_{kx}+d_{ik}(x,y)z_{ky}+ \tag{18}$$
$$+q_{ik}(x,y)z_k]+f_i(v),\quad i=\overline{1,m},$$

с дополнительными условиями:

$$z_{iy}(0,y)=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}(y)z_k(0,y)+\varphi_i(v^1),$$
$$z_{ix}(x,0)=\sum_{k=1}^{m}b_{ik}(x)z_k(x,0)+\psi_i(v^2), \tag{19}$$
$$z_i(0,0)=z_i^0,\quad i=\overline{1,m}.$$

В этом случае

$$H(x,y,p,v)=\sum_{i,k=1}^{m}u_i[c_{ik}z_{kx}+d_{ik}z_{ky}+q_{ik}z_k]+\sum_{i=1}^{m}u_if_i(v),$$

где $u_i(x,y)$, $i=\overline{1,m}$, —

решение краевой задачи:

$$u_{ixy}=\sum_{k=1}^{m}[q_{ki}u_k-\frac{d}{dx}(c_{ki}u_k)-\frac{d}{dy}(d_{ki}u_k)],$$
$$u_{ix}(x,Y)=-\sum_{k=1}^{m}d_{ki}(x,Y)u_k(x,Y),$$
$$u_{iY}(X,y)=-\sum_{k=1}^{m}c_{ki}(X,y)u_k(X,y),$$
$$u_i(X,Y)=-A_i,\quad i=\overline{1,m}, \tag{20}$$
$$H_1(y,q^1,v^1)=\sum_{i=1}^{m}w_i^1(y)[\sum_{k=1}^{m}a_{ik}(y)z_k(0,y)+\varphi_i(v^1)],$$
$$H_2(x,q^2,v^2)=\sum_{i=1}^{m}w_i^2(x)[\sum_{k=1}^{m}b_{ik}(x)z_k(x,0)+\psi_i(v^2)],$$

где $w_i^1(y)$ и $w_i^2(x)$, $i=\overline{1,m}$, – решения систем линейных уравнений

$$w_{iy}^1(y)=u_{iy}(0,y)+\sum_{k=1}^{m}c_{ki}(0,y)u_k(0,y)-$$
$$-\sum_{k=1}^{m}a_{ki}(y)w_k^1(y),$$
$$w_{ix}^2(x)=u_{ix}(x,0)+\sum_{k=1}^{m}d_{ki}(x,0)u_k(x,0)-$$
$$-\sum_{k=1}^{m}b_{ki}(x)w_k^2(x),\quad i=\overline{1,m},$$

удовлетворяющие условиям:

$$w_i^1(Y)=u_i(0,Y),$$
(21)
$$w_i^2(X)=u_i(X,0),\quad i=\overline{1,m}.$$

Если учесть, что $\Delta u_i(x,y)\equiv 0$, $i=\overline{1,m}$, ([1], стр.1217), то из (21) получим:

$$\Delta w_{iy}^1(y)=-\sum_{k=1}^{m}a_{ki}(y)\Delta w_k^1(y),$$
$$\Delta w_{ix}^2(x)=-\sum_{k=1}^{m}b_{ki}(x)\Delta w_k^2(x),\quad i=\overline{1,m},$$

и

(22) $\Delta w_i^1(Y)=0,\ \Delta w_i^2(X)=0,\quad i=\overline{1,m}.$

В силу единственности решения задачи (22) $\Delta w_i^1(y)\equiv 0$ и $\Delta w_i^2(x)\equiv 0$, $i=\overline{1,m}$.

Найдем $\eta=\eta_1+\eta_2+\eta_3$.

Очевидно, что $\eta_1=0$ ([1], стр.1218).

Так как $\Delta w_i^2(x)\equiv 0$, $i=\overline{1,m}$,

и $$\frac{\partial H_2}{\partial w_i^2}=\sum_{k=1}^{m}b_{ik}(x)z_k(x,0)+\psi_i(v^2),$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial z_i}=\sum_{k=1}^{m}b_{ki}(x)w_k^2(x),$$

$$\frac{\partial^2 H_2}{\partial w_i^2\,\partial w_k^2}=\frac{\partial^2 H_2}{\partial z_i\,\partial z_k}=0,$$

$$\frac{\partial^2 H_2}{\partial w_i^2\,\partial z_k}=b_{ik}(x),\quad i,k=\overline{1,m},$$

то

$$\frac{\partial H_2(x,q^2,v^2+\Delta v^2)}{\partial z_i} - \frac{\partial H_2(x,q^2,v^2)}{\partial z_i} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 H_2(x,q^2+\theta_2\Delta q^2,v^2+\Delta v^2)}{\partial w_i^2\ \partial z_k} - \frac{\partial^2 H_2(x,q^2+\theta_3\Delta q^2,v^2+\Delta v^2)}{\partial w_i^2\ \partial z_k} = 0, \quad i,k=\overline{1,m}.$$

Отсюда следует, что $\eta_2 = 0$. Аналогично находим, что $\eta_3 = 0$. Следовательно, $\eta = 0$ и

$$\Delta S = -\iint_G [H(x,y,p,v+\Delta v) - H(x,y,p,v)]dxdy -$$

$$(23)\quad -\int_0^X [H_2(x,q^2(x),v^2+\Delta v^2) - H_2(x,q^2(x),v^2)]\,dx -$$

$$-\int_0^Y [H_1(y,q^1(y),v^1+\Delta v^1) - H_1(y,q^1(y),v^1)]\,dy.$$

С помощью этой формулы легко доказывается

Теорема 2. Для того чтобы допустимое управление $\omega(x,y)$ в краевой задаче (18) - (19) было локально $min$ -оптимальным ( $max$ -оптимальным) по функционалу $S = \sum_{i=1}^{m} A_i z_i(X,Y)$ необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло условиям максимума (минимума).

Литература

[1] А.И. ЕГОРОВ: Оптимальные процессы в системах с распределенными параметрами и некоторые задачи теории инвариантности. Изв.АН СССР,сер.мат.,т.29(1965)№ 6,стр.1205-1260.

(Received March 12,1966)