Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Oldřich Horáček; Rudolf Výborný

Über eine fastlineare partielle Differentialgleichung von nichthyperbolischen Typus (Vorläufige Mitteilung)

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 7 (1966), No. 3, 261--264

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/105059`

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
7,3 (1966)

ÜBER EINE FASTLINEARE PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNG VOM NICHTHYPERBOLISCHEN TYPUS

Oldřich HORÁČEK, Rudolf VÝBORNÝ, Praha

(Vorläufige Mitteilung)

Es sei $\tilde{f}$ eine auf dem Gebiet $(0, +\infty) \times \langle 0, +\infty)$ definierte Funktion. Unter einer Lösung der Differentialgleichung $y' = \tilde{f}(x, y)$, $y(0) = b$, $0 \leq b$ verstehen wir eine auf einem Intervall $\langle 0, \tilde{A} \rangle$, wo $0 < \tilde{A} < +\infty$ ist, stetige Funktion $y(x)$, $y(0) = b$, die auf $(0, \tilde{A})$ die Gleichung $y' = \tilde{f}(x, y)$ erfüllt.

Weiter sei f eine nichtnegative stetige Funktion auf $(0, +\infty) \times \langle 0, +\infty)$ die folgende Eigenschaften hat:

(i) $f(\tilde{\tau}, 0) = 0$, $f(\tilde{\tau}, \varphi) > 0$ auf $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$;

(ii) für $\tilde{\tau} \in (0, +\infty)$, $0 \leq \varphi_1 < \varphi_2$ ist $f(\tilde{\tau}, \varphi_1) < f(\tilde{\tau}, \varphi_2)$;

(iii) es gibt ein $\varepsilon_0 > 0$ und eine Konstante $C > 0$ so, dass die Differentialgleichung $\varphi' = Cf(\tilde{\tau}, \varphi)$, $\varphi(0) = \varepsilon_0$ auf dem Intervall $\langle 0, A \rangle$ mit $A > 0$ wenigstens eine Lösung hat;

(iv) im Intervall $\langle 0, A \rangle$ existiert höchstens eine Lösung der Differentialgleichung $\varphi' = Cf(\tilde{\tau}, \varphi)$, $\varphi(0) = 0$.

Es sei G ein Gebiet in E_n und es existiere auf $\bar{G}$ eine Funktion τ, für die folgendes gilt:

(j) $\tau = 0$ auf $\dot{G}$, $\tau > 0$ auf G;

(jj) τ hat auf $\bar{G}$ stetige partielle Ableitungen erster und auf G zweiter Ordnung;

(jjj) auf G gilt die Ungleichung $0 < m \leq |\operatorname{grad} \tau| \leq M$.

Endlich sei B eine positive stetige Funktion auf $(0, +\infty)$, für die

$$\int_0 B(s)\,ds < +\infty$$

ist.

Mit einer zweimal differenzierbaren Funktion u bezeichne man

$$E(u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, u, \operatorname{grad} u) u_{x_i x_j} - a(x, u, \operatorname{grad} u).$$

<u>Satz 1</u>. Es sei u eine auf $\bar{G}$ stetige Funktion, die auf G beschränkte Ableitungen zweiter Ordnung hat: $|u_{x_i x_j}| \leq K$. Es sei $y \in \dot{G}$. Weiter sei $E(u) \geq 0$, $a(x, u, 0) \geq 0$, für $x \in \bar{G}$, $x \neq y$ gelte $u(x) < u(y)$,

$$\liminf_{x \to y} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, u, 0) \tau_{x_i} \tau_{x_j} = \beta > 0,$$

die Quadratform $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, u, 0) \lambda_i \lambda_j$ sei positiv definit oder semidefinit. Weiter setzen wir voraus, dass die Ungleichungen

$$|a_{ij}(x, u, 0) - a_{ij}(x, u, \operatorname{grad} u)| \leq f(\tau(x), |\operatorname{grad} u|),$$

$$a(x, u, 0) - a(x, u, \operatorname{grad} u) \leq f(\tau(x), |\operatorname{grad} u|),$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, u, 0) < B(\tau(x))$$

gelten, wo die Funktionen f, τ, B die oben erwähnten Bedingungen erfüllen, und dass die Konstante C aus (iii) grösser als $\frac{1}{\beta}(n^2 K + 1) M$ ist. Dann ist

$$\limsup_{\substack{x \to y \\ x \in n}} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|} < 0 .$$

Hiervon folgt leicht der Eindeutigkeitssatz für die Lösung der gemischten Aufgabe für eine fastlineare elliptische Gleichung.

Satz 2. Es sei u eine auf $\overline{G}$ stetige Lösung der Gleichung $E(u) = 0$, die auf G stetige beschränkte Ableitungen zweiter Ordnung besitzt: $|u_{x_i x_j}| \leq K$. Weiter sei $\operatorname{sign} u \cdot a(x, u, 0) \geq 0$ für $x \in \overline{G}$, .

$$\liminf_{x \to y} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, u, 0) \tau_{x_i} \tau_{x_j} = \beta > 0$$

und Quadratform $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, u, 0) \lambda_i \lambda_j$ sei positiv definit. Wir setzen weiter voraus, dass die Ungleichungen

$$|a_{ij}(x, u, 0) - a_{ij}(x, u, \operatorname{grad} u)| \leq f(\tau(x), |\operatorname{grad} u|),$$

$$a(x, u, 0) - a(x, u, \operatorname{grad} u) \leq f(\tau(x), |\operatorname{grad} u|),$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, u, 0) < B(\tau(x))$$

gelten, wo die Funktionen f, τ, B die oben erwähnten Bedingungen erfüllen, und dass die Konstante C aus (iii) grösser als $\frac{1}{\beta}(n^2 K + 1) M$ ist. Weiter sei $a \frac{\partial u}{\partial l} + b u = 0$ auf $\dot{G}$ mit $a \geq 0$, $b \leq 0$, $|a| + |b| > 0$; das Symbol $\frac{\partial}{\partial l}$ bezeichnet die Ableitung in nichttangentialer Richtung. Dann ist $u = 0$ auf G.

Der Satz 1 verallgemeinert die Ergebnisse der Arbeit [1], der Satz 2 die Ergebnisse des Artikels [2].

Literaturverzeichnis

[1] Rudolf VÝBORNÝ: Maximum principle for non-hyperbolic equations, University of Maryland, The Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics, Lecture Series, No 42,1964,1-33.

[2] Takasi KUSANO: Remarks on some properties of solutions of some boundary value problems for quasi-linear parabolic and elliptic equations of the second order, Proc. Japan Acad.,39(1963),217-222.

(Received April 26, 1966)