I. I. Aleksandrov

О представлении конечно-аддитивной функции множества

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 7 (1966), No. 1, 85--91

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/105042`

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
7, 1 (1966)

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ КОНЕЧНО-АДДИТИВНОЙ ФУНКЦИИ МНОЖЕСТВА

И.И. Александров, Арзамас

J. Fiala [1] указал теорему о представлении меры через интеграл от функции из пространства Орлича. Ниже этот результат обобщается на банаховы функциональные пространства [2],[3]. Приведем необходимые определения, следуя [2]. (Δ, Λ, μ) - пространство с вполне σ-конечной полной мерой. Фиксирована последовательность Δ_n, $0 < \mu(\Delta_n) < \infty$,

$$\Delta_n \subset \Delta_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots, \qquad \Delta = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n .$$

Множество $e \in \Lambda$ называется ограниченным, если $e \subset \Delta_n$ при некотором n. На множестве измеримых комплексных функций $f(x)$, $x \in \Delta$ задана монотонная норма $\rho(f)$, $0 \leq \rho(f) \leq \infty$. Дополнительно предполагается следующее. Если e - ограниченное множество, то $\rho(\chi_e) < \infty$. Для каждого ограниченного множества e существует конечная постоянная A_e такая, что $\int_e |f| d\mu \leq A_e \rho(f)$ для любой f. Если $0 \leq f_n \uparrow f$ почти всюду, то $\rho(f_n) \uparrow \uparrow \rho(f)$. $\mathfrak{X}$ - множество всех функций с $\rho(f) < \infty$. $\mathfrak{X}$ - B - пространство с нормой $\rho(f)$. Это пространство и называется банаховым функциональным пространством. Рассмотрим множество комплексных измеримых функций $f(x)$ таких, что f ограничена на некотором ограниченном множестве и обращается в нуль вне его. Замыкание множества таких функций в $\mathfrak{X}$ обозначается через $\mathfrak{X}^b$.

$\mathfrak{X}^{\chi}$ - подпространство $\mathfrak{X}$, состоящее из таких функций f, что $e_n \downarrow \theta$ / θ -пустое множество / влечет $\rho(f\chi_{e_n}) \downarrow 0$. Ассоциированное пространство $\mathfrak{X}'$ порождается нормой

$$\rho'(f) = \sup \int |fg|\, d\mu, \quad \rho(g) \leq 1 .$$

Пусть $\mathcal{Y}$ В - пространство или же пространство скаляров. Если $y \in \mathcal{Y}$, то $|y|$ означает норму y или модуль соответственно. Пусть ν - конечно-аддитивная функция, отображающая Λ в $\mathcal{Y}$, причем $\mu(e) = 0$ влечет $\nu(e) = 0$. Пусть $\tau = \{e_i\}$ произвольный конечный класс измеримых попарно не пересекающихся множеств. Положим $R(\nu) = \sup\limits_{\tau} \sup\limits_{\rho(\alpha) \leq 1} |\sum\limits_{\tau} \alpha_i \nu(e_i)|$, где

$\alpha = \alpha(x) = \sum\limits_{\tau} \alpha_i \chi_{e_i}(x)$, α_i - скаляры. Пусть $\alpha(x)$ такова, что при некотором $i = m$, $\rho(\chi_{e_m}) = \infty$. Поскольку $\rho(\alpha_m \chi_{e_m}) \leq \rho(\alpha)$, то $\rho(\alpha) \leq 1$ влечет $\alpha_m = 0$.

Поэтому, определяя $R(\nu)$, мы можем считать, что если $e_i \in \tau$, то $\rho(\chi_{e_i}) < \infty$. Пусть $v(\nu)$ -полная вариация функции ν [4], стр. 111.

<u>Лемма 1</u>. Если функция ν скалярна, то $R[v(\nu)] = R(\nu)$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\operatorname{sgn}(r e^{i\theta})$ равно $e^{i\theta}$, если $r \neq 0$, и равно нулю при $r = 0$. Поскольку $\rho(\sum\limits_{\tau} \alpha_i \overline{\operatorname{sgn}[\alpha_i \nu(e_i)]} \chi_{e_i}) = \rho(\alpha)$, то $\sup\limits_{\rho(\alpha) \leq 1} \sum\limits_{\tau} |\alpha_i \nu(e_i)| \leq R(\nu)$ и $\sup\limits_{\tau} \sup\limits_{\rho(\alpha) \leq 1} \sum\limits_{\tau} |\alpha_i \nu(e_i)| \leq R(\nu)$.

Обратное неравенство очевидно. Еще раз учитывая, что

$\rho(\alpha) = \rho(|\alpha|)$, получим

$R(\nu) = \sup_{\tau} \sup_{\rho(\alpha)\leq 1} \sum_{\tau} \alpha_i |\nu(e_i)|, \quad \alpha_i > 0.$

Ясно, что $R(\nu) \leq R[v(\nu)]$; если $R(\nu) = \infty$, то лемма верна.

Пусть $R(\nu) < \infty$. Возьмем $\tau = \{e_0\}, e \subset e_0, \mu(e) > 0,$

и $\alpha(x) = \dfrac{\chi_e(x)}{\rho(\chi_e)}$.

Тогда

$$\rho(\alpha) = 1, \ |\nu(e)|/\rho(\chi_e) \leq R(\nu),$$

$$|\nu(e)| \leq R(\nu)\rho(\chi_{e_0}) < \infty.$$

Это значит, что ν ограничена на e_0, а тогда $v(\nu, e_0) < \infty$.

Фиксируем теперь $\tau = \{e_i\}, \alpha = \alpha(x) = \sum_{\tau} \alpha_i \chi_{e_i}(x)$, $\rho(\alpha) \leq 1$, и $\varepsilon > 0$. Для каждого i существует конечный класс множеств $\{a_{ik}\}$ такой, что $a_{ik} \subset e_i$, $k = 1, 2, \ldots, k(i)$ и $v(\nu, e_i) < \sum_{k=1}^{k(i)} |\nu(a_{ik})| + \varepsilon / \sum_{\tau} \alpha_i$.

Далее, $\sum_{\tau} \alpha_i v(\nu, e_i) < \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{k(i)} \alpha_i |\nu(a_{ik})| + \varepsilon \leq R(\nu) + \varepsilon$.

Поскольку ε произвольно, $R[v(\nu)] \leq R(\nu)$.

Пусть S множество функций $f(x)$ вида $f = \sum_{\tau} \alpha_i \chi_{e_i}$, $e_i \in \Lambda$ и ограничены. S плотно в $\mathfrak{X}^{b}$. По существу это доказано в [3], стр. 155, хотя явно и не сформулировано.

<u>Лемма 2</u>. Если $f \in \mathfrak{X}^{b}$, то $\int |f(x)|\, d v(\nu) \leq \rho(f) R[v(\nu)]$.

<u>Доказательство</u>. Обозначим $v = v(\nu)$. Если $R(v) = \infty$, то лемма верна.

Пусть $R(v) < \infty$. Сначала примем, что $f \in S$, $f = \sum_{\tau} \beta_i \chi_{e_i}$. Поскольку $\rho[f/\rho(f)] = 1$, то

$$\int \frac{|f|}{\rho(f)}\, dv = \sum_i |\beta_i|\, v(e_i)/\rho(f) \leq R(v),$$

$$\int |f|\, dv \leq \rho(f)\, R(v)\ .$$

Пусть теперь $f \in \mathfrak{X}^b$. Возьмем $f_n \in S$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_n \rho(f - f_n) = 0$. Для $\sigma > 0$ положим $e_n(\sigma) = \{x : |f(x) - f_n(x)| > \sigma\}$. $\rho(f - f_n) \geq \rho(|f - f_n|\chi_{e_n(\sigma)}) \geq \sigma\rho(\chi_{e_n(\sigma)})$, поэтому $\lim\limits_n \rho(\chi_{e_n(\sigma)}) = 0$. Но $v[e_n(\sigma)] \leq \rho(\chi_{e_n}(\sigma))$, а тогда $\lim\limits_n v[e_n(\sigma)] = 0$.

Поскольку f и f_n измеримы, то $e_n(\sigma) \in \Lambda$. В этом случае $v^*[e_n(\sigma)] = v[e_n(\sigma)]$ [определение v^* см. в [4], стр. 114]; следовательно, f_n сходится к f по мере v ,[4], стр. 119. Кроме того, по первой части доказательства,

$$\int |f_n - f_m|\, dv \leq \rho(f_n - f_m)\, R(v) \text{ и } \lim_{m,n} \int |f_n - f_m|\, dv = 0\ .$$

Тогда существует $\lim\limits_n \int |f_n|\, dv = \int |f|\, dv$ [4], стр.127.
Теперь осталось перейти к пределу в неравенстве

$$\int |f_n|\, dv \leq \rho(f_n)\, R(v)\ ,$$

которое верно по первой части доказательства.

Следствие. Если ν скалярна, то $\int |f|\, dv(\nu) \leq \rho(f)\, R(\nu)$.

<u>Теорема 1</u>. Соотношение $\mathcal{J}(f) = \int f\, d\nu$, где $R(\nu) < \infty$, дает аналитическое представление линейного функционала в $\mathfrak{X}^b$, причем $\|\mathcal{J}\| = R(\nu)$.

<u>Доказательство</u>. Из леммы 2 и $|\int f d\nu| \leq \int |f|\, dv(\nu)$ следует, что $\int f d\nu$ является линейным функционалом в $\mathfrak{X}^b$. Пусть теперь $\mathcal{J}(f)$ –линейный функционал в $\mathfrak{X}^b$. Введем функцию множества, полагая $\nu(e) = \mathcal{J}(\chi_e)$, если $\rho(\chi_e) < \infty$, и $\nu(e) = \infty$ в противном случае. Пусть

$f \in S$, $f = \sum_\tau \alpha_i \chi_{e_i}$, тогда $\mathcal{J}(f) =$
$= \sum_\tau \alpha_i \nu(e_i) = \int f d\nu$.

Учитывая лемму 2, получим $\|\mathcal{J}\| = \sup |\mathcal{J}(f)|, f \in S, \rho(f) \leq 1$.

Теперь

$$R(\nu) = \sup_\tau \sup_{\rho(f) \leq 1} |\sum_\tau \alpha_i \nu(e_i)| = \sup_{f \in S, \rho(f) \leq 1} |\int f d\nu| = \|\mathcal{J}\|.$$

Пусть $f = \mathfrak{X}^b$, возьмем $f_n \in S$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim_n \rho(f_n - f) = 0$.

Как в лемме 2, можно получить $\int f d\nu = \lim_n \int f_n d\nu$.

Но $\int f_n d\nu = \mathcal{J}(f_n) \to \mathcal{J}(f)$ при $n \to \infty$, значит $\mathcal{J}(f) = \int f d\nu$.

<u>Теорема 2</u>. Пусть ν - конечно-аддитивная функция, определенная на Λ. Если для любого ограниченного множества e $\nu(e) = \int_e g d\mu$, $g \in \mathfrak{X}'$, то $R(\nu) < \infty$.

Если $\mathfrak{X}^b = \mathfrak{X}^\chi$, то верно и обратное: $R(\nu) < \infty$ влечет существование ф нкции $g \in \mathfrak{X}'$ такой, что $\nu(e) = \int_e g d\mu$ для любого ограниченного e [и даже такого, что $\rho(\chi_e) < \infty$]. При этом $R(\nu) = \rho'(g)$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\nu(e) = \int_e g d\mu$, $g \in \mathfrak{X}'$. Известно, [3], стр. 158, что

$$\rho'(g) = \sup_{\rho(f) \leq 1} \int |fg| d\mu, \quad f \in \mathfrak{X}^b.$$

Поскольку S плотно в $\mathfrak{X}^b$, то $\rho'(g) =$
$= \sup_{\rho(f) \leq 1} \int |fg| d\mu$, $f \in S$.

Теперь $R(\nu) = \sup_\tau \sup_{\rho(\alpha) \leq 1} |\sum_\tau \alpha_i \int_{e_i} g d\mu| \leq$

$$\leq \sup_\tau \sup_{\rho(\alpha) \leq 1} \sum_\tau \int_{e_i} |\alpha_i g| d\mu = \sup_{\alpha \in S, \rho(\alpha) \leq 1} \int |\alpha(x) g(x)| d\mu =$$

$= \rho'(g) < \infty$.

Пусть теперь $R(\nu) < \infty$. По теореме 1, $\mathcal{J}(f) = \int f d\nu$ является аналитическим представлением линейного функционала в $\mathfrak{X}^b$. Для случая $\mathfrak{X}^b = \mathfrak{X}^\chi$ в [2], стр. 16, дано представление $\mathcal{Y}(f) = \int fg\,d\mu$, $g \in \mathfrak{X}'$. Отсюда, если $\chi_e \in \mathfrak{X}^b$, то $\nu(e) = \int \chi_e\,d\nu = \int_e g\,d\mu$.

В частности, это верно для ограниченного e.

Следствие. Если μ вполне конечна, то представление $\nu(e) = \int_e g\,d\mu$ имеет место для всех измеримых e. Действительно, если мы примем $\Delta_n = \Delta$, $n = 1, 2, \dots$, то каждое измеримое множество будет ограниченным.

Если ν счетно-аддитивна, т.е. является обобщенной мерой, то можно получить представление для ее полной вариации $v(\nu)$.

<u>Теорема 3</u>. Для того, чтобы полная вариация обобщенной меры ν допускала представление $v(\nu, e) = \int_e |g|\,d\mu$, $g \in \mathfrak{X}'$, $e \in \Lambda$, необходимо, а если $\mathfrak{X}^b = \mathfrak{X}^\chi$, то и достаточно, чтобы $R(\nu) < \infty$.

Необходимость. Пусть $v(\nu, e) = \int_e |g|\,d\mu$. Интеграл может быть равен ∞, но он существует [4], стр. 107. Как в теореме 2, можно получить $R[v(\nu)] = \rho'(g) < \infty$. Осталось применить лемму 1.

Достаточность. Пусть $R(\nu) < \infty$, $\Delta_n \uparrow \Delta$, $0 < \mu(\Delta_n) < \infty$, $0 < \rho(\chi_{\Delta_n}) < \infty$. Положим $e_1 = \Delta_1$, $e_n = \Delta_n - \Delta_{n-1}$, $n = 2, 3, \dots$. По следствию теоремы 2, существуют $g_n \in \mathfrak{X}'(e_n, \mu)$, $n = 1, 2, \dots$, такие, что $v(\nu, e) = \int_e g_n\,d\mu$, $e \subset e_n$, $g_n \geq 0$, $n = 1, 2, \dots$. Теперь пусть $e \in \Lambda$. Тогда $v(\nu, e) \sum_{n=1}^{\infty} v(\nu, e_n e) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{e_n e} g_n\,d\mu$.

Положим $g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n$. При любом m, $\sum_{n=1}^{m} g_n \in \mathfrak{X}'(\Delta_m, \mu)$, тогда $\rho'(\sum_1^m g_n) \leq R(\nu) < \infty$, поэтому

$\rho'(g) < \infty$. Из $g \geq 0$ следует $g = |g|$ и
$v(v, e) = \int_e g \, d\mu$.

Автор благодарен Ю.И. Грибанову, который прочитал рукопись и сделал ряд полезных замечаний.

Литература:

[1] J. FIALA, Representations of generalized measures by integrals. Comm.Math.Univ.Carolinae , 4,4 (1963),153-156.

[2] W. LUXEMBURG, Banach function spaces. Delft,1955.

[3] W. LUXEMBURG and A. ZAANEN, Compactness of integral operators in Banach function spaces. Math. Annalen, 149(1963),No 2,150-180.

[4] Н. ДАНФОРД и Дж. ШВАРЦ, Линейные операторы. ИИЛ,1962.

(Received July, 5, 1965)