Václav Havel
Freie Erweiterungen von Schemen n-ten Grades

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 6 (1965), No. 4, 443--448

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105036

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
6, 4 (1965)

FREIE ERWEITERUNGEN VON SCHEMEN N-TEN GRADES

Václav HAVEL, Brno

J. Kolář hat in [3] nichtdegenerierte Schemen vierten Grades zur Konstruktion gewisser abgeschwächter affiner Räume verwendet, wobei er im wesentlichen eine Analogie der bekannten freien Erweiterungen von Inzidenzstrukturen ([2],[4]) ausgenützt hat. Ich möchte nun diese Analogie ausführlicher untersuchen. Dabei soll die Erörterung von Herrn Professor Pickert in [4], S. 12-18 als Vorbild dienen.

Im weiteren sei n eine feste natürliche Zahl, $n \geq 4$. Unter einem <u>Schema</u> (<u>n-ten Grades</u>) verstehen wir ein Paar $\mathcal{S} = (P,E)$, wo P eine Menge mit $\operatorname{card} P \geq n$ ist, deren Elemente <u>Punkte</u> heissen sollen, und E eine Menge von n-punktiger Untermengen von P, der sog. <u>Ebenen</u>, wobei zwei verschiedene Ebenen stets höchstens $n-2$ gemeinsame Punkte haben. Wenn dabei E aus sämtlichen n-punktigen Untermengen von P besteht, so nennen wir $\mathcal{S}$ <u>vollständig</u>.
Ist insbesondere $\operatorname{card} P = n$, $\operatorname{card} E = 1$, so soll $\mathcal{S}$ <u>degenerierend</u> heissen, in den übrigen Fällen soll $\mathcal{S}$ <u>nichtdegeneriert</u> heissen.

Sind $\mathcal{S} = (P,E)$, $\mathcal{S}' = (P',E')$ zwei Schemen, für welche $P \subseteq P'$, $E \subseteq E'$ gilt, so heisst $\mathcal{S}$ ein <u>Unterschema</u> von $\mathcal{S}'$ ($\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$). Ist $(\mathcal{S}_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ eine Familie von Schemen $\mathcal{S}_\gamma = (P_\gamma, E_\gamma)$, dann schreiben wir $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{S}_\gamma = (\bigcup_{\gamma\in\Gamma} P_\gamma, \bigcup_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma)$,

$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{S}_\gamma = (\bigcap_{\gamma\in\Gamma} P_\gamma, \bigcap_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma)$; bei geeigneten Bedingungen sind $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{S}_\gamma$, $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{S}_\gamma$ wieder Schemen.

Es sei $\bar{\mathcal{S}} = (\bar{P},\bar{E})$ ein vollständiges Schema mit einem Unterschema $\mathcal{S} = (P,E)$. Der Durchschnitt von sämtlichen Unterschemen $\mathcal{S}^*$, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}^* \subseteq \bar{\mathcal{S}}$ ist ein Schema, das $[\mathcal{S}]$ bezeichnet wird; wir sagen auch, dass $[\mathcal{S}]$ in $\bar{\mathcal{S}}$ durch $\mathcal{S}$ erzeugt wird. $[\mathcal{S}]$ kann man folgendermassen rekursiv konstruieren: Es sei E^* die Menge von sämtlichen Ebenen aus $\bar{\mathcal{S}}$, welche mindestens $n-1$ nicht in derselben Ebene von $\mathcal{S}$ liegenden Punkte von $\mathcal{S}$ enthalten, während P^+ alle nicht in $\mathcal{S}$ liegenden Punkte sämtlicher Ebenen von E^+ enthalten soll. Dann ist $\mathcal{S}^+ = (P \cup P^+, E \cup E^+)$ wider ein Schema, $\mathcal{S} \leq \mathcal{S}^+ \leq \bar{\mathcal{S}}$. Wir bilden eine Folge $(\bar{\mathcal{S}}_i)_{i=0}^\infty$, wo $\bar{\mathcal{S}}_0 = \mathcal{S}$ und $\bar{\mathcal{S}}_{i+1} = \bar{\mathcal{S}}_i^+$ ist $(i = 0,1,2,\ldots)$ und bekommen $\bigcup_{i=0}^\infty \bar{\mathcal{S}}_i = [\mathcal{S}]$.

Es sei $\mathcal{S} = (P,E)$ ein nichtdegeneriertes Schema. Wir untersuchen das System $\mathfrak{S}$ von sämtlichen $(n-1)$-punktigen Untermengen von $\mathcal{S}$, welche nicht in derselben Ebene von $\mathcal{S}$ liegen. Weiter bezeichnen wir mit P' eine mit P fremde Menge, für welche eine Bijektion $\sigma : \mathfrak{S} \to P'$ existiert, und mit E' die Menge von sämtlichen n-punktigen Untermengen $X \cup \{\sigma X\}$, $X \in \mathfrak{S}$. Offensichtlich ist $\mathcal{S}' = (P \cup P', E \cup E')$ ein Schema, $\mathcal{S}' \geq \mathcal{S}$. Weiter setzen wir $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}$ und $\mathcal{S}_{i+1} = \mathcal{S}_i'$ $(i = 0,1,2,\ldots)$ und bekommen ein vollständiges Schema $\bigcup_{i=0}^\infty \mathcal{S}_i = \mathcal{F}(\mathcal{S})$, das wir eine <u>vollständige freie Erweiterung</u> von $\mathcal{S}$ nennen wollen.

Unter einer surjektiven Abbildung zwischen den Schemen $\mathcal{S} = (P,E)$, $\mathcal{S}' = (P',E')$ verstehen wir ein Paar

$\sigma = (\sigma^P, \sigma^E)$ von surjektiven Abbildungen $\sigma^P : P \to P'$, $\sigma^E : E \to E'$. Gilt dabei für $x \in y$, $x \in P$, $y \in E$ stets $\sigma^P x \in \sigma^E y$, so heisst σ ein <u>Epimorphismus</u> zwischen $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$. Wenn bei einem solchen Epimorphismus beide Schemen ein gemeinsames Unterschema $\mathcal{S}''$ haben und wenn σ auf $\mathcal{S}''$ einen identischen Automorphismus hervorruft, so sagt man, dass $\sigma : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ ein Epimorphismus <u>bezüglich</u> $\mathcal{S}''$ ist.

<u>Satz 1</u>. Es sei $\mathcal{S} = (P,E)$ ein nichtdegeneriertes Schema und $\bar{\mathcal{F}} = (\bar{P},\bar{E})$ ein vollständiges Schema, das durch $\mathcal{S}$ erzeugt wird. $\bar{\mathcal{F}}$ und $\mathcal{F}(\mathcal{S}) = (\bar{P},\bar{E})$ entsprechen einander in einem Isomorphismus bezüglich $\mathcal{S}$ genau dann, wenn zu jedem durch $\mathcal{S}$ erzeugten vollständigen Schema $\mathcal{S}^* = (P^*, E^*)$ ein Epimorphismus $\sigma : \bar{\mathcal{F}} \to \mathcal{S}^*$ bezüglich $\mathcal{S}$ existiert.

Beweis. a) Die Bedingung ist notwendig: Dazu genügt es zu zeigen, dass zu jedem von $\mathcal{S}$ erzeugten vollständigen Schema $\mathcal{S}^*$ ein Epimorphismus $\varphi : \mathcal{F}(\mathcal{S}) \to \mathcal{S}^*$ bezüglich $\mathcal{S}$ vorhanden ist. Es sei $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ bzw. $\mathcal{S}^*$ durch zugehörige Folgen $(\mathcal{S}_i)_{i=0}^{\infty}$ bzw. $(\mathcal{S}_i^*)_{i=0}^{\infty}$ gebildet. Wir erklären rekursiv die surjektiven Abbildungen $\varphi_i : \mathcal{S}_i \to \mathcal{S}_i^*$ (i = = 0,1,2,...). Es sei erstens φ_0 die identische Abbildung auf $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 = \mathcal{S}_0^*$. Zweitens setzen wir voraus, dass $\varphi_i : \mathcal{S}_i \to \mathcal{S}_i^*$ für ein gewisses i schon vorhanden ist; ist für eine (n-1)-punktige nicht in derselben Ebene von $\mathcal{S}_i$ liegende Punktmenge X auch $\varphi_i^{P_i} X$ (n-1)-punktig, so zuordnen wir für $\varphi_{i+1}^{E_{i+1}}$ das Bild der Ebene $Y \supset X$ von $\mathcal{S}_{i+1}$ als die Ebene $Y^* \supset \varphi_i^{P_i} X$ von $\mathcal{S}_{i+1}^*$, während wir für $\varphi_{i+1}^{P_{i+1}}$ dem neuen Punkte von Y den neuen Punkt von Y^*

zuordnen. Ist aber $\varphi_i^{P_i} X$ nicht (n-1)-punktig, so soll der Ebene Y eine willkürliche durch $\varphi_i^{P_i} X$ gehende Ebene von $\mathcal{S}_{i+1}$ entsprechen. Die gemeinsame Fortsetzung φ aller φ_i ist eindeutig bestimmt; φ ist der gewünschte Epimorphismus zwischen $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ und $\mathcal{S}^*$ bezüglich $\mathcal{S}$.

b) Die Bedingung ist hinreichend: Es sei $\bar{\mathcal{S}}$ ein solches vollständiges Schema, für welches ein Epimorphismus $\psi : \bar{\mathcal{S}} \to \mathcal{F}(\mathcal{S})$ existiert. Nach a) gibt es einen Epimorphismus $\varphi : \mathcal{F}(\mathcal{S}) \to \bar{\mathcal{S}}$. Durch vollständige Induktion folgt nun, dass ψ auf $\bar{\mathcal{S}}_i$ bzw. φ auf $\mathcal{S}_i$ einen Epimorphismus ψ_i bzw. φ_i bezüglich $\mathcal{S}$ hervorruft, wobei $\psi_i \circ \varphi_i = \varphi_i \circ \psi_i$ eine identische Abbildung ist. Daraus folgt dann, dass sämtliche ψ_i, φ_i Isomorphismen sind. Für $i = 0$ ist die vorangehende Behauptung richtig. Gilt sie für ein gewisses i, so untersuchen wir eine Ebene Y, welche zu $\bar{\mathcal{S}}_{i+1}$, nicht aber zu $\bar{\mathcal{S}}_i$ gehört. Dann gibt es in $\bar{\mathcal{S}}_i$ eine (n-1)-punktige Menge $X \subset Y$ und nach den Voraussetzungen ist auch $\psi_i^{\bar{E}_i} X$ (n-1)-punktig, so dass $\psi^{\bar{E}} Y$ durch die Menge $\psi^{\bar{P}} X \subset \psi^{\bar{E}} Y$ eindeutig bestimmt ist. Die Ebene $\varphi^E(\psi^{\bar{E}} Y)$ ist also durch die Menge $\varphi^P(\psi^{\bar{P}} X) \subset \psi^E(\psi^{\bar{E}} Y)$, d.h. durch die Menge X eindeutig bestimmt, so dass $\varphi^E(\psi^{\bar{E}} Y) = Y$ ist. Ein ähnlicher Schluss folgt beim Austausch von φ, ψ. Das Ende des Beweises unserer Hilfsbehauptung ist offensichtlich. Es ist also ψ ein Isomorphismus zwischen $\bar{\mathcal{S}}$ und $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ bez¨glich $\mathcal{S}$, w.z.b.w.

Ein Schema $\mathcal{S}' = (P', E')$, $\mathcal{S} \leq \mathcal{S}' \leq \mathcal{F}(\mathcal{S})$ heisst eine <u>freie Erweiterung</u> eines gegebenen Schemas $\mathcal{S} = (P, E)$, wenn mit jeder nicht zu $\mathcal{S}_i$ gehörenden Ebene von $\mathcal{S}_{i+1}$

auch ihre zu $\mathcal{S}_i$ gehörenden Punkte sämtlich in $\mathcal{S}'$ liegen.

Satz 2. Es seien $\mathcal{S} = (P,E)$, $\mathcal{S}' = (P',E')$, $\mathcal{S}'' = (P'',E'')$ drei Schemen, $\mathcal{S} \leq \mathcal{S}' \leq \mathcal{S}'' \leq \mathcal{F}(\mathcal{S})$, wobei $\mathcal{S}'$ die freie Erweiterung von $\mathcal{S}$ ist. $\mathcal{S}''$ ist eine freie Erweiterung von $\mathcal{S}$ dann und nur dann, wenn sie eine freie Erweiterung von $\mathcal{S}'$ ist.

Beweis. a) Es seien $\mathcal{F}(\mathcal{S})$, $\mathcal{F}(\mathcal{S}')$ durch entsprechende Folgen $(\mathcal{S}_i)_{i=0}^{\infty}$, $(\mathcal{S}_i')^{\infty}$ gebildet. Offensichtlich ist $\mathcal{S}' = \mathcal{S}_0' \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{S})$. Gilt $\mathcal{S}_i' \leq \mathcal{F}(\mathcal{S})$; so folgt auch $\mathcal{S}_{i+1}' \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{S})$, denn bedeutet k die kleinste Zahl, für welche die in $\mathcal{S}_i'$ liegenden Punkte einer Ebene von $\mathcal{S}_{i+1}'$ sämtlich zu $\mathcal{S}_k$ gehören, so liegt diese Ebene auch in $\mathcal{S}_{k+1}$. Nach vollständiger Induktion gilt also $\mathcal{S}_i' \leq \mathcal{F}(\mathcal{S})$ $(i = 0,1,2,\ldots)$ und damit $\mathcal{F}(\mathcal{S}') = \mathcal{F}(\mathcal{S})$. Es sei $\mathcal{S}''$ eine freie Erweiterung von $\mathcal{S}$. Wenn aber eine Ebene Y von $\mathcal{S}''$ nicht in $\mathcal{S}'$ liegt, so gibt es eine Zahl h so, dass n - 1 Punkte von Y zu $\mathcal{S}_h$ gehören und der übriggebliebene nicht, so dass die Ebene zu $\mathcal{S}_{h+1}$ gehört. Daraus folgt dann, dass diese n - 1 Punkte schon in $\mathcal{S}''$ liegen müssen. Also ist $\mathcal{S}''$ eine freie Erweiterung von $\mathcal{S}'$.

b) Es sei nun $\mathcal{S}''$ eine freie Erweiterung von $\mathcal{S}'$. Wir wählen eine Ebene von $\mathcal{S}''$, welche in $\mathcal{S}_{m+1}$ nicht aber in $\mathcal{S}_m$ liegt. Gehört diese Ebene nicht zu $\mathcal{S}'$, so gibt es eine Zahl t so, dass n - 1 Punkte dieser Ebene in $\mathcal{S}_t'$ liegen und der übriggebliebene nicht, so dass die Ebene zu $\mathcal{S}_{t+1}'$ gehört. Nach den Voraussetzungen über $\mathcal{S}'$ und $\mathcal{S}''$ liegen dann die betreffenden n - 1 Punkte ebenfalls in $\mathcal{S}''$ und

$\mathcal{S}''$ erweist sich als eine freie Erweiterung von $\mathcal{S}$.

L i t e r a t u r :

[1] R.H. BRUCK, A survey of binary systems, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1958.

[2] M. HALL, Projective planes, Trans.Am.Math.Soc.54(1943), 229-277.

[3] J. KOLÁŘ, On one Lenz's problem on the independence of the affine space axioms, CMUC 6,3(1965),339-346.

[4] G. PICKERT, Projektive Ebenen, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955.

(Received May 13, 1965)