Karel Svoboda

# Déformation ponctuelle des congruences de droites dans des espaces symplectiques à trois dimensions

*Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, Vol. 6 (1965), No. 4, 393--401

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/105030`

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
6, 4 (1965)

# DÉFORMATION PONCTUELLE DES CONGRUENCES DE DROITES DANS DES ESPACES SYMPLECTIQUES À TROIS DIMENSIONS

Karel SVOBODA, Brno

Dans ce travail on étudie la déformation ponctuelle des congruences non-paraboliques de droites dans des espaces symplectiques à trois dimensions. On prend pour base des considérations suivantes la notion de la déformation ponctuelle au sens de M. E. Čech [1].

1. Soit $Sp_3$ un espace symplectique à trois dimensions et $L$ une congruence non-parabolique de droites, qui n'appartient pas au complexe absolu $K$ de cet espace. Simultanément avec $L$ il convient de considérer une autre congruence non-parabolique $L^*$ qui correspond à $L$ dans la corrélation nulle $N$, déterminée parfaitement par $K$.

Il a été démontré dans le mémoire [2] de R.M. Gejdel'man que l'on peut associer, à une droite quelconque $p$ de $L$, un repère mobile de manière à choisir les points $A_1$, $A_2$ pour foyers sur la droite $p$ de la congruence $L$ et les points $A_3$, $A_4$ pour foyers sur la droite correspondante $p^* = Np$ de la congruence conjuguée $L^*$. Cela étant, la congruence $L$ peut être définie par le système d'équations différentielles

$$dA_i = \omega_i^j A_j \qquad (i,j = 1,\dots, 4) , \tag{1.1}$$

les formes de Pfaff $\omega_i^j$ satisfaisant, d'après [2], aux équations

$$
\begin{aligned}
(1.2) \qquad & \omega_1^4 = 0,\ \omega_2^3 = 0,\ \omega_3^2 = 0,\ \omega_4^1 = 0,\\
& \omega_1^1 + \omega_2^2 = 0,\ \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0,\\
& \omega_3^1 = -\omega_2,\ \omega_4^2 = -\omega_1,\\
& \omega_1^2 = \alpha_1\omega_1 - \alpha_0\omega_2,\ \omega_2^1 = \beta_1\omega_2 - \beta_0\omega_1,\\
& \omega_2^4 = \alpha_2\omega_1 - \alpha_1\omega_2,\ \omega_4^3 = \beta_2\omega_2 - \beta_1\omega_1,
\end{aligned}
$$

dans lesquelles

$$(1.3) \qquad \omega_1 = \omega_1^3,\ \omega_2 = \omega_2^4 .$$

Dans ce qui suit, nous ne considérons que le ces général où toutes les fonctions $\alpha_i$, $\beta_i$ $(i = 0,1,2)$ sont différentes de zéro.

Outre la congruence L envisageons une autre congruence L' d'un espace symplectique $Sp'_3$. Nous introduirons pour L' les notations analogues à celles employées pour L en indiquant avec des accents toutes les expressions relatives à L. Pour les considérations suivantes il est commode de poser

$$(1.4) \qquad \tau_i^j = \omega_i'^j - \omega_i^j \qquad (i,j = 1,\dots, 4)$$

de sorte que l'on a, d'après (1.2),

$$
\begin{aligned}
(1.5) \qquad & \tau_1^4 = 0,\ \tau_2^3 = 0,\ \tau_3^2 = 0,\ \tau_4^1 = 0,\\
& \tau_1^1 + \tau_2^2 = 0,\ \tau_3^3 + \tau_4^4 = 0.
\end{aligned}
$$

Supposons que les droites des congruences L et L' se correspondent dans une correspondance biunivoque C portant chaque surface développable de L dans une développable contenue dans L'. Sans restreindre la généralité, on peut admettre que cette correspondance développable soit donnée par les équations $\omega_1' = \omega_1$, $\omega_2' = \omega_2$. On a alors, d'après (1.2),(1.3),(1.4), les équations

$$(1.6) \qquad \tau_1^3 = 0,\ \tau_2^4 = 0,\ \tau_4^2 = 0,\ \tau_3^1 = 0$$

qui entraînent par un calcul facile les relations (v.[3])

(1.7) $$\tau_1^1 = -\tau_2^2 = \tau_3^3 = -\tau_4^4 .$$

2. Cela étant, rappelons la définition de la déformation ponctuelle des congruences de droites suivant L. Čech [1].

Une correspondance développable $C$ entre deux congruences $L$ et $L'$ s'appelle déformation ponctuelle s'il est possible d'étendre la correspondance $C$ en une correspondance ponctuelle $\bar{C}$ de manière que, pour un couple quelconque de droites $p$ et $p' = Cp$ qui se correspondent dans la correspondance $C$, il existe au moins une transformation symplectique $H$ entre les espaces $Sp_3$ et $Sp'_3$ jouissant de la propriété suivante: Si $\gamma$ est une courbe quelconque décrite par un point $A$ de $p$ et contenue dans $L$, les courbes $\bar{C}\gamma$ et $H\gamma$ ont au point $\bar{C}A = HA$ sur la droite $p'$ un contact analytique du premier ordre.

Les congruences $L$ et $L'$ étant en déformation ponctuelle, l'extension ponctuelle $\bar{C}$ de la correspondance $C$ définie entre les droites correspondantes $p$ et $p'$ une transformation linéaire qui porte les foyers $A_1$, $A_2$ de $L$ aux foyers $A_1'$, $A_2'$ de $L'$. Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer que la notation des foyers soit choisie de manière que

(2.1) $$\bar{C}A_1 = \rho A_1' , \quad \bar{C}A_2 = \rho^{-1} A_2' ,$$

où $\rho \neq 0$.

La correspondance $C$, étendue par (2.1), en une correspondance ponctuelle, est une déformation ponctuelle si et seulement si, pour un couple quelconque de droites correspondantes $p$ et $p'$, il existe une transformation symplectique $H$ entre les espaces $Sp_3$ et $Sp'_3$ et une forme de Pfaff $\Theta$ de manière que les équations

(2.2) $$H(x_1 A_1 + x_2 A_2) = x_1 \rho A'_1 + x_2 \rho^{-1} A'_2 ,$$
$$Hd(x_1 A_1 + x_2 A_2) = d(x_1 \rho A'_1 + x_2 \rho^{-1} A'_2) +$$
$$+ \Theta (x_1 \rho A'_1 + x_2 \rho^{-1} A'_2)$$

ont lieu pour chaque $x_1$, $x_2$, $\omega_1$, $\omega_2$. En vertu de (2.1), les équations de la transformation symplectique $H$, qui réalise la déformation ponctuelle des congruences $L$ et $L'$, ont nécessairement la forme

(2.3) $$HA_1 = \rho A'_1 , \quad HA_2 = \rho^{-1} A'_2 , \quad HA_3 = a_3^3 A'_3 + a_3^4 A'_4 ,$$
$$HA_4 = a_4^3 A'_3 + a_4^4 A'_4 , \quad a_3^3 a_4^4 - a_3^4 a_4^3 = 1 .$$

On a, d'après (1.1),(1.2),(1.3),(1.5) et (2.3),

(2.4) $$d(x_1 A_1 + x_2 A_2) =$$
$$= (dx_1 + x_1 \omega_1^1 + x_2 \omega_2^1) A_1 + (dx_2 + x_1 \omega_1^2 + x_2 \omega_2^2) A_2 +$$
$$+ x_1 \omega_1 A_3 + x_2 \omega_2 A_4 ,$$
$$H\, d(x_1 A_1 + x_2 A_2) =$$
$$= \rho (dx_1 + x_1 \omega_1^1 + x_2 \omega_2^1) A'_1 + \rho^{-1} (dx_2 + x_1 \omega_1^2 +$$
$$+ x_2 \omega_2^2) A'_2 + (a_3^3 x_1 \omega_1 + a_4^3 x_2 \omega_2) A'_3 +$$
$$+ (a_3^4 x_1 \omega_1 + a_4^4 x_2 \omega_2) A'_4 ,$$
$$d(x_1 \rho A'_1 + x_2 \rho^{-1} A'_2) =$$
$$= (\rho\, dx_1 + x_1 d\rho + x_1 \rho \omega'^1_1 + x_2 \rho^{-1} \omega'^1_2) A'_1 +$$
$$+ (\rho^{-1} dx_2 + x_2\, d\rho^{-1} + x_1 \rho \omega'^1_2 + x_2 \rho^{-1} \omega'^2_2) A'_2 +$$
$$+ \rho\, x_1 \omega_1 A'_3 + \rho^{-1} x_2 \omega_2 A'_4 .$$

En substituant les expressions (2.4) dans la seconde équation (2.2) et en comparant les coefficients de $x_1 A_i$ et $x_2 A_i$ $(i = 1,\dots, 4)$ on obtient les relations

(2.5) $$d\rho/\rho + \tau_1^1 + \Theta = 0, \quad d\rho^{-1}/\rho^{-1} + \tau_2^2 + \Theta = 0 ,$$

(2.6) $$\omega'^2_1 = \rho^{-2} \omega_1^2 , \quad \omega'^1_2 = \rho^2 \omega_2^1$$

et en outre

(2.7) $$a_3^3 = \rho\ ,\quad a_3^4 = 0\ ,\quad a_4^3 = 0\ ,\quad a_4^4 = \rho^{-1}\ .$$

Or, il résulte facilement de (1.5) et (2.5) que $\Theta = 0$ et

(2.8) $$d\rho/\rho + \tau_1^1 = 0\ .$$

Cela étant, les calculs précédents fournissent le résultat suivant:

<u>Pour qu'une correspondance développable</u> C <u>entre les congruences</u> L <u>et</u> L' <u>soit une déformation ponctuelle il faut et il suffit que la forme</u> $\Theta$ <u>soit identiquement nulle et qu'il existe une fonction</u> $\rho \neq 0$ <u>qui satisfait aux équations (2.6) et (2.8)</u>.

Remarquons que la transformation symplectique H qui réalise la déformation ponctuelle est déterminée univoquement et qu'elle est donnée, d'après (2.3) et (2.7), par les équations

(2.9) $$HA_1 = \rho\, A_1'\ ,\quad HA_2 = \rho^{-1} A_2'\ ,\quad HA_3 = \rho\, A_3'\ ,\quad HA_4 = \rho^{-1} A_4'\ ,$$

la fonction $\rho$ étant soumise à remplir les conditions (2.6) et (2.8).

3. En éliminant $\rho^2$ des équations (2.6) on obtient $\omega_1'^2 \omega_2'^1 = \omega_1^2 \omega_2^1$ . Or, on vérifie sans difficulté que $\omega_1^2 \omega_2^1$ est une forme invariante qui joue le rôle de la <u>forme ponctuelle</u> de la congruence L . On voit alors que

<u>les congruences</u> L <u>et</u> L' <u>en déformation ponctuelle possèdent la même forme ponctuelle</u>.

Inversement, l'égalité des formes ponctuelles des congruences envisagées L et L' entraîne l'existence d'une quantité $\rho^2$ satisfaisant à (2.6). Or, on en déduit, par la différentiation extérieure, les relations que l'on peut mettre, faisant usage de (1.5), sous la forme

$$[\omega_1^2 (d\rho/\rho + \tau_1^1)] = 0, \ [\omega_2^1 (d\rho/\rho + \tau_1^1)] = 0 .$$

Mais les relations en question n'entraînent pas toutefois l'équation (2.8) et par suite

<u>les congruences</u> L <u>et</u> L' <u>qui ont la même forme ponctuelle ne sont pas en général en déformation ponctuelle au sens considéré</u>.

Les considérations précédentes montrent que l'égalité des formes ponctuelles de deux congruences n'est pas en général une condition nécessaire et suffisante pour la déformation ponctuelle. Nous nous proposons de démontrer une telle condition sous la forme géométrique suivante:

<u>Une correspondance développable</u> C <u>entre les congruences</u> L <u>et</u> L' <u>est une déformation ponctuelle au sens de la définition précédente si et seulement si, pour un couple quelconque de droites correspondantes de</u> L <u>et</u> L', <u>il existe une transformation symplectique</u> H, <u>qui réalise un contact analytique du premier ordre entre les surfaces</u> $(A_1)$ <u>et</u> $(A_1')$, $(A_2)$ <u>et</u> $(A_2')$, <u>ce contact étant du second ordre relativement aux courbes</u> $\omega_1 = 0$ <u>tracées sur la surface</u> $(A_1)$ <u>et, en même temps, relativement aux courbes</u> $\omega_2 = 0$ <u>sur la surface</u> $(A_2)$.

Pour démontrer la proposition précédente, considérons une transformation symplectique H la plus générale qui porte $A_1$ en $A_1'$ et $A_2$ en $A_2'$. Les équations d'une telle transformation H ont nécessairement la forme (2.3). Cela étant, on obtient, sans aucune espèce de difficulté, les relations

$$(3.1)\quad \begin{aligned} HdA_1 &= d(\rho A') - (d\rho/\rho + \tau_1^1)\rho A_1' + \\ &+ (\rho^{-1}\omega_1^2 - \rho\,\omega_1'^2)A_2' + (a_3^3 - \rho)\omega_1 A_3' + a_3^4\omega_1 A_4' , \\ HdA_2 &= d(\rho^{-1} A_2') + (\rho\,\omega_2^1 - \rho^{-1}\omega_2'^1)A_1' + (d\rho/\rho + \\ &+ \tau_1^1)\rho^{-1} A_2' + a_4^3\omega_2 A_3' + (a_4^4 - \rho^{-1})\omega_2 A_4' . \end{aligned}$$

Il résulte de (3.1) que les équations (2.6) expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une transformation $H$ qui réalise un contact analytique du premier ordre des correspondences ponctuelles $A_1 \longrightarrow A_1'$ , $A_2 \longrightarrow A_2'$ . Les équations (3.1) montrent aussi que la transformation $H$ réalisant des contacts mentionnés se trouve définie par (2.9).

On a de plus

$$\begin{aligned} d^2 A_1 &= (.)A_1 + d\,\omega_1^2 A_2 + (d\omega_1 + \omega_1 . \overline{\omega_1^1 + \omega_3^3})A_3 + \\ &+ (\omega_1\,\omega_3^4 + \omega_2\,\omega_1^2)A_4 \end{aligned}$$

et on en déduit

$$(3.2)\quad \begin{aligned} Hd^2 A_1 &= d^2(\rho A_1') - 2(d\rho/\rho + \tau_1^1)d(\rho A_1') + \\ &+ (.)A_1' + 2\,\omega_1^2(d\rho/\rho + \tau_1^1)\rho^{-1}A_2' + \\ &+ \omega_1(\rho^{-1}\omega_3^4 - \rho\,\omega_3'^4)A_4' . \end{aligned}$$

Faisant usage de (1.2) et (2.6), on a $\alpha_i' = \rho^{-2}\alpha_i$ , $\beta_i' = \rho^2\beta_i$ $(i = 0,1)$ et par suite la forme $\rho^{-1}\omega_3^4 - \rho\,\omega_3'^4$ ne dépend que de $\omega_1$ .

Cela étant, il découle de (3.2) que la transformation $H$ réalise un contact analytique du second ordre $A_1 \longrightarrow A_1'$ relativement aux courbes $\omega_1 = 0$ dans ce cas seulement si $[\omega_1(d\rho/\rho + \tau_1^1)] = 0$ , car $\omega_1^2$ ne s'évanouit pas en vertu de $\omega_1 = 0$ . Un raisonnement analogue relative à la surface $(A_2)$ conduit à la relation $[\omega_2(d\rho/\rho + \tau_1^1)] = 0$

et il en résulte en effet l'égalité (2.8), qui exprime ainsi la condition nécessaire et suffisante pour les contacts du second ordre en question.

4. D'une manière corrélative, on peut étudier la déformation planaire de deux congruences $L$ et $L'$ en partant d'une extension planaire de la correspondance développable $C$ entre $L$ et $L'$. Les recherches correspondantes exigent, en substance, de regarder une droite quelconque $p$ de $L$ comme l'axe du faisceau de plans passant par $p$. Or, ce faisceau se transforme, par la corrélation nulle $N$, dans la ponctuelle située sur la droite correspondante $p^*$ de la congruence conjuguée $L$. Le problème de la déformation planaire des congruences de droites est ainsi ramené à l'étude de la déformation ponctuelle des congruences conjuguées.

Sans entrer dans les détails, on obtient, au lieu de (2.5),(2.6), les relations

$$(4.1)\qquad d\sigma/\sigma + \tau_3^3 + \Theta^* = 0\,,\quad d\sigma^{-1}/\sigma^{-1} + \tau_4^4 + \Theta^* = 0$$

$$\omega_3'^4 = \sigma^{-2}\omega_3^4\,,\quad \omega_4'^3 = \sigma^2\omega_4^3\,,$$

qui expriment la condition nécessaire et suffisante pour la déformation planaire des congruences $L$ et $L'$. Les conditions (4.1), (4.2) peuvent être interprétées comme suit:

*Une correspondance développable* $C$ *entre les congruences* $L$ *et* $L'$ *est une déformation planaire si et seulement si, pour un couple quelconque de droites correspondantes de* $L$ *et* $L'$, *il existe une transformation symplectique* $H$, *qui réalise un contact analytique du premier ordre entre les* surfaces $(A_3)$ et $(A_3')$, $(A_4)$ et $(A_4')$, ce contact étant du second ordre relativement aux courbes $\omega_1 = 0$ tracées sur la surface $(A_4)$ et, en même temps, relativement aux courbes $\omega_2 = 0$ sur la surface $(A_3)$.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que les congruences L et L' soient en même temps en déformation ponctuelle et planaire s'expriment par les relations (2.5), (2.6), (4.1), (4.2) et par l'égalité des fonctions $\rho$ et $\sigma$. Il en résulte que

les congruences L et L' qui se trouvent simultanément en déformation ponctuelle et en déformation planaire sont symplectiquement équivalentes.

L i t é r a t u r e :


[1] Э. ЧЕХ, О точечных изгибаниях конгруенций прямых. Чех. мат. журнал 5(80), 1955, 234-273.

[2] Р. М. Гейдельман, Симплектическое изгибание конгруенций прямых. Известия высш. учебн. завед. Математика № 1(14), 1960, 84-93.

[3] K. SVOBODA, Déformation symplectique des congruences de droites. Arch. math. 1, 1965, 59-74.


(Received September 15, 1965)