A. L. Kuz'mina

О краевой задаче Римана с непрерывным коэффициентом

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 5 (1964), No. 4, 221--226

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104978

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
5, 4 (1964)

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ РИМАНА С НЕПРЕРЫВНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

А.Л. КУЗЬМИНА , КАЗАНЬ

Пусть C - замкнутая жорданова кривая, $D^{\pm}$ - внутренняя и внешняя к ней области.

В общей постановке краевая задача Римана может быть сформулирована следующим образом:

Найти кусочно аналитическую функцию $\Phi(z)$, удовлетворяющую в каком-либо смысле на C условию

(1) $\Phi^{+}(t) = G(t)\Phi^{-}(t) + g(t), \quad t \in C,$

где $G(t)$ - коэффициент задачи и $g(t)$ - ее свободный член, заданы на C , $\Phi^{\pm}(t)$ - угловые граничные значения функции $\Phi(z)$ изнутри и извне C .

В предположении, что C - кривая Ляпунова, функция $G(t)$ непрерывна и нигде на C не обращается в нуль, $g(t) \in L_p(C)$, $p > 1$, задача решалась в классе функций, представимых интегралом типа Коши с угловыми граничными значениями $\Phi^{\pm}(t) \in L_p(C)$, $p > 1$, которые почти всюду на C удовлетворяют условию (1) (см.[1],[2]).

В этой заметке мы дадим решение краевой задачи Римана с непрерывным коэффициентом для случая, когда C - гладкая кривая, у которой угол $\theta(s)$ наклона касательной к оси абсцисс, как функция длины дуги s на C , имеет модуль непрерывности $\omega(h)$ такой, что

(2) $$\int_0^c \frac{\omega(h)}{h} \ln^2 h \, dh < \infty .$$

Обозначим через $z = \psi(w)$ – функцию, однолистно и конформно отображающую круг $|w| < 1$ на область D^+.

Так же, как сделано С.Я. Альпером (см. [3], стр. 424–426) в случае, когда $\omega(h)$ удовлетворяет условию $\int_0^c \frac{\omega(h)}{h} |\ln h| dh < \infty$, можно доказать, что функция $\psi'(w)$ непрерывна в $|w| \leq 1$ и

(3) $|\psi'(e^{i\theta}) - \psi'(e^{i\theta'})| \leq \omega^*(|\theta - \theta'|), \quad 0 \leq \theta, \ \theta' \leq 2\pi,$

где $\omega^*(h)$ такова, что
$$\int_0^c \frac{\omega^*(h)}{h} |\ln h| dh < \infty .$$

В силу (3) для любых точек $w = re^{i\theta}$ и $w' = re^{i\theta'}$, $0 \leq \theta, \ \theta' \leq 2\pi$, $0 \leq r < 1$, и $\tau = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, будем иметь:
$$|\psi'(w) - \psi'(w')| \leq K\omega^*(|w - w'|)$$
и

(4) $$|\psi'(w) - \psi'(\tau)| \leq K_1 \omega_1^*(|w - \tau|),$$

где K и K_1 – некоторые постоянные, функция $\omega_1^*(h)$ удовлетворяет условию

(5) $$\int_0^c \frac{\omega_1^*(h)}{h} dh < \infty .$$

Отметим, что для доказательства второго из этих неравенств достаточно показать, что
$$|\psi''(w)| \leq \frac{\omega^*((1-r)^\alpha)}{1-r}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad w = re^{i\theta}, \quad 0 \leq r < 1 .$$

Используя неравенства (4) и то, что $|\psi'(w)| \geq m > 0$ в $|w| \leq 1$, нетрудно доказать, что

(6) $$\int\limits_{|\tau|=1} \left| \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)-\psi(w)} - \frac{1}{\tau - w} \right| |d\tau| \leq M, \quad |w| \leq 1,$$

где постоянная M не зависит от w .

Рассмотрим интеграл типа Коши с непрерывной плотностью $f(t)$:

(7) $$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C} \frac{f(t)}{t-z}\, dt \ .$$

В частности, когда C - окружность $|z| = 1$, то функция $F^{+}(z) \in H_p$ при всех $p > 0$ и, следовательно, $F^{-}(t) \in L_p$ при всех $p > 0$. Это вытекает из результатов В.И. Смирнова (см.[5], стр. 94 и 116) и Б.В. Хведелидзе (см.[6], сто. 19).

Показем, что функция

$$F^{+}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C} \frac{f(t)}{t-z}\, dt, \qquad z \in D^{+},$$

если кривая C удовлетворяет условию (2) принадлежит классу E_p при всех $p > 0$.

В самом деле,

(8) $$F^{+}(\psi(w)) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \frac{f(\psi(\tau))}{\tau - w}\, d\tau \ +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} f(\psi(\tau)) \left[\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)-\psi(w)} - \frac{1}{\tau - w} \right] d\tau, \quad |w| < 1.$$

Здесь первый интеграл, как было отмечено, есть функция класса H_p при всех $p > 0$, второй - функция класса B в силу (6) и непрерывности функции $f(\psi(\tau))$. Следовательно функция $F^{+}(\psi(w)) \in H_p$ при всех $p > 0$. Так как функция $\psi'(w)$ непрерывна в $|w| \leq 1$, то функция $F^{+}(z) \in E_p$ при всех $p > 0$. Ее угловые граничные значения $F^{+}(t)$ существуют почти всюду на C и $F^{+}(t) \in L_p(C)$ при всех $p > 0$.

В силу основной леммы И.И. Привалова (см.[5], стр. 190) функция $F(z)$ удовлетворяет почти всюду на C условию

$$F^{+}(t)-F^{-}(t)=f(t). \tag{9}$$

Очевидно, что $F^{-}(t)\in L_p(C)$ при всех $p>0$.

В том случае, когда $f(t)\in L_p(C)$, $p>1$, функция $F(z)$ имеет почти всюду угловые граничные значения $F^{\pm}(t)$, причем $F^{\pm}(t)\in L_p(C)$, $p>1$, и удовлетворяют условию (9) (см.[7], стр. 273).

Следует отметить, что в классе функций, представимых интегралом типа Коши, обращающихся в нуль на бесконечности и удовлетворяющих почти всюду на C условию (9), функция (7) единственна (см.[6], стр. 66).

Приступая к изучению краевой задачи Римана, уточним ее формулировку.

Пусть C - гладкая кривая, удовлетворяющая условию (2), функция $G(t)$ непрерывна и не обращается в нуль на C , функция $g(t)\in L_p(C)$, $p>1$.

Требуется найти кусочно аналитическую функцию $\Phi(z)$, $\Phi(\infty)=0$, представимую интегралом типа Коши с угловыми граничными значениями $\Phi^{\pm}(t)$ из некоторого класса $L_p(C)$, $p>1$, и удовлетворяющую почти всюду на C условию (1).

Поскольку однородная и неоднородная задачи Римана решаются по известной схеме, то нет необходимости приводить здесь все выкладки.

Пусть $\varkappa=\operatorname{ind} G(t)=0$.

Так как функция $\ln G(t)$ непрерывна на C , то каноническая функция однородной задачи Римана

$$X(z)=e^{\Gamma(z)},$$

где

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{\ln G(t)}{t-z}\,dt.$$

Используя для $\Gamma(z)$ представление (8), нетрудно показать, что функция $X^{+}(z) \in E_p$ и $X^{\pm}(t)$ и $\frac{1}{X^{+}(t)} \in L_p(C)$ при всех $p > 0$.

Решение неоднор дной задачи Римана, как известно, представимо в виде:

$$\Phi(z) = X(z)\psi(z), \tag{10}$$

где

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g(t)}{X^{+}(t)}\,\frac{dt}{t-z}.$$

Так как $\frac{g(t)}{X^{+}(t)} \in L_{p-\varepsilon}(C)$, ε - любое малое положительное число, то угловые граничные значения $\psi^{\pm}(t) \in L_{p-\varepsilon}(C)$.

Очевидно, что функция $\Phi(z)$ имеет почти всюду на C угловые граничные значения $\Phi^{\pm}(t)$, принадлежащие классу $L_{p-\varepsilon}(C)$, ε - любое малое положительное число.

Итак, если $\varkappa = 0$, то краевая задача Римана имеет единственное решение (10).

Случай, когда $\varkappa \neq 0$ может быть так, как это обычно делается (см.[8]).

Литература

[1] ИВАНОВ В.В., Некоторые свойства особых интегралов типа Коши и их приложения, ДАН СССР, 121,№ 5 (1958),793-794.

[2] СИМОНЕНКО И.Б., Краевые задачи Римана и Римана-Газемана с непрерывным коэффициентом. Исследования по ссвременным проблемам теории функций комплексного переменного, М.Физматгиз, 1961.

[3] АЛЬПЕР С.Я. О равномерных приближениях функций комплексного переменного в замкнутой области, Изв.АН СССР, сер.математическая, 19(1955), 423-444.

[4] ГОЛУЗИН Г.М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, М.-Л., ГИТТЛ, 1952.

[5] ПРИВАЛОВ И.И., Граничные свойства аналитических функций, М.-Л., ГИТТЛ, 1950.

[6] ХВЕДЕЛИДЗЕ Б.В., Линейные разрывные граничные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения, Труды Тбилисского математического института, 23(1956), 3-153.

[7] АЛЬПЕР С.Я., О приближении в среднем аналитических функций класса E_p. Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного, М.Физматгиз, 1960.

[8] ГАХОВ Ф.Д., Краевые задачи, М.,Физматгиз, 1963.