Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Jurij Ivanovich Gribanov

О методе редукции

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 5 (1964), No. 4, 215--219

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104977

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
5, 4 (1964)

О МЕТОДЕ РЕДУКЦИИ

Ю.И. ГРИБАНОВ, КАЗАНЬ

В настоящей заметке указываются условия разрешимости методом редукции [1] бесконечных систем линейных уравнений.

Пусть E –бесконечная единичная диагольная матрица, R_n – матрица, полученная из E заменой первых n единиц главной диагонали, и $P_n = E - R_n$. Обозначим через ℓ координатное пространство и через ℓ^* –дуальное к нему координатное пространство [2]. Если вектор $X \in \ell$, то при любом $n = 1, 2, \dots$ вектор $P_n X \in \ell$ и $\| P_n X \| \leq \| X \|$. Важной характеристикой пространства ℓ является его координатное подпространство $[\ell]$, представляющее собой замыкание в метрике пространства ℓ множества всех векторов с конечным числом отличных от нуля координат. Нетрудно показать, что вектор $X \in [\ell]$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n \to \infty} \| R_n X \| = 0$. Последовательность векторов $\{X_n\} \subset \ell$ называется слабо сходящейся в ℓ к вектору $X \in \ell$, если при любом векторе $Y = \{y_n\} \in \ell^*$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(n)} y_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k .$$

Из сходимости по норме вытекает слабая сходимость. Из слабой сходимости последовательности векторов вытекает их покоординатная сходимость. Если $\ell \neq [\ell]$, то ℓ^* является собственной частью сопряженного с ℓ пространства. Поэтому в этом случае слабая сходимость в ℓ отлична от слабой сходимости в смысле теории нормированных пространств.

В рамках пространства ℓ рассмотрим бесконечную систему линейных уравнений

(I) $TX \equiv (E-A)X = H: \; x_m - \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk} x_k = h_m \quad (m=1,2,\ldots)$.

Это значит, что матричный оператор A ограничен в пространстве ℓ, известный вектор $H \in \ell$ и в расчет принимаются только принадлежащие пространству ℓ решения X этой системы уравнений. В дальнейшем будет предполагаться, что система уравнений (I) однозначно разрешима в ℓ (при любом $H \in \ell$), что в силу теоремы С. Банаха об обратном операторе эквивалентно предположению о существовании ограниченного обратного оператора T^{-1}. Наряду с системой уравнений (I) рассмотрим усеченную систему уравнений

$$(2) \quad T_n X_n \equiv (E-A_n)X_n = P_n H: \begin{cases} x_m^{(n)} - \sum_{k=1}^{n} a_{mk} x_k^{(n)} = h_m & (m=1,2,\ldots,n) \\ x_m^{(n)} = 0 & (m > n) \end{cases}$$

Если при всех достаточно больших n система уравнений (2) имеет единственное решение X_n и последовательность векторов X_n сходится покоординатно к некоторому вектору $X \in \ell$, являющемуся решением системы уравнений (I), то говорят, что система уравнений (I) разрешима в ℓ методом редукции. Если кроме того $X_n \to X$ по норме пространства ℓ (соотв. слабо сходится в ℓ), то будем говорить, что метод редукции сходится по норме пространства ℓ (соотв. слабо сходится в ℓ).

В дальнейшем через X и X_n обозначаются решения систем уравнений (I) и (2) соответственно.

<u>Теорема 1</u>. Для того чтобы однозначно разрешимая в ℓ система уравнений (I) была разрешима методом редукции, сходящимся по норме пространства ℓ, необходимо и достаточно, чтобы нашлось такое число N, что определитель

(3) $|\delta_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}|_{\alpha,\beta=1}^{n} \neq 0$ при любом $n \geq N$

и чтобы $\lim_{n\to\infty} \| R_n (AX_n + H) \| = 0$. Справедливы оценки $\| X - X_n \| \leq \| T^{-1} \| \| R_n (AX_n + H \|$ и $\| TX_n - H \| = \| R_n (AX_n + H) \|$.

Если $\| A \| < 1$, то условие (3) заведомо выполняется. Однако даже в этом случае при $\ell \neq [\ell]$ система уравнений (I) может быть неразрешимой методом редукции, сходящимся по норме пространства ℓ. В самом деле, справедлива

Теорема 2. Если $\| A \| < 1$, то система уравнений (I) разрешима методом редукции, сходящимся по норме пространства ℓ, тогда и только тогда, когда $X \in [\ell]$ или, что эквивалентно $\lim_{n\to\infty} \| R_n (AX_n + H) \| = 0$.

Таким образом, если $\ell = [\ell]$, то любая система уравнений (I) с $\| A \| < 1$ разрешима методом редукции, сходящимся по норме пространства ℓ. В частности, это справедливо для пространств ℓ_p $(p \geq 1)$. Если $\ell \neq [\ell]$, $\| A \| < 1$ и $A\{\ell\} \subseteq [\ell]$, то, как это вытекает из предыдущей теоремы, система уравнений (I) разрешима методом редукции, сходящимся по норме пространства ℓ, лишь тогда, когда известный вектор $H \in [\ell]$.

Матричный оператор A называется α-непрерывным [2], если $\lim_{n\to\infty} \| A - P_n A \| = 0$. Любой α-непрерывный оператор вполне непрерывен и область его значений расположена в $[\ell]$. Система уравнений (I) называется α-непрерывной, если A является α-непрерывным оператором.

Теорема 3. Однозначно разрешимая в ℓ α-непрерывная система уравнений разрешима методом редукчии, сходящимся по норме пространства ℓ, тогда и только тогда, когда $H \in [\ell]$.

Отсюда вытекает известный результат о вполне непрерывных системах уравнений в гильбертовом пространстве ℓ_2 ([3], гл. II, § 3 или [4], гл. XIУ, § 3). Частным случаем предыдущей теоремы является также основной результат работы [5] об ω-непрерывных системах уравнений. Если $\ell = [\ell]$, то класс вполне непрерывных операторов в ℓ совпадает с классом α-непрерывных операторов. Таким образом, если $\ell = [\ell]$, то любая однозначно разрешимая в ℓ вполне непрерывная система уравнений разрешима методом редукции, сходящимся по норме пространства ℓ .

Теорема 4. Для того чтобы однозначно разрешимая в ℓ система уравнений (I) была разрешима методом редукции, слабо сходящимся в пространстве ℓ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (3) и $R_m A X_m \to 0$ слабо в пространстве ℓ .

Отметим ряд частных случаев этой общей теоремы, естественно дополняющей теорему I.

Теорема 5. Если система уравнений (I) однозначно разрешима в ℓ , выполняется условие (3), $\|AX_m\| \leq C < \infty$ и $\ell^* = [\ell^*]$, то эта система уравнений разрешима методом редукции, слабо сходящимся с пространстве ℓ .

Следствие. Если $\|A\| < 1$ и $\ell^* = [\ell^*]$, то система уравнений (I) разрешима методом редукции, слабо сходящимся в пространстве ℓ .

Так как $m^* = \ell_1 = [\ell_1]$, то, в частности, любая вполне регулярная система уравнений разрешима методом редукции, слабо сходящимся в пространстве m . Это является уточнением известного утверждения о разрешимости методом редукции вполне регулярной системы уравнений ([6], стр. 41).

Теорема 6. Однозначно разрешимая в ℓ α-непрерывная система уравнений разрешима методом редукции, слабо сходящимся в пространстве ℓ .

Матричный оператор A называется β-непрерывным, если $\lim_{n\to\infty} \|A - AP_n\| = 0$. Любой β-непрерывный оператор вполне непрерывен. Систему уравнений (I) будем называть β-непрерывкой, если A является β-непрерывным оператором.

Теорема 7. Однозначно разрешимая в ℓ β-непрерывная система уравнений разрешима методом редукции, слабо сходящимся в пространстве ℓ. Метод редукции сходится по норме пространства ℓ в том и только том случае, когда $X \in [\ell]$ или, что эквивалентно, $\lim\limits_{n \to \infty} \| R_n (A X_n + H)\| = 0$.

Последняя теорема уточняет одно имеющееся в [7] утверждение о β-непрерывных системах уравнений. В пространстве m любой вполне непрерывный матричный оператор является β-непрерывным оператором. Поэтому любая однозначно разрешимая в m вполне непрерывная система уравнений разрешима методом редукции, слабо сходящимся в пространстве m.

Цитированная литература

[1] F. HELLINGER, O. TOEPLITZ, Integral-gleichungwn und Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, Enzyklopädie d.Math.Wiss.,II,C 13,Leipzig, 1928

[2] Ю.И.ГРИБАНОВ, Изв.вузов,Математика,№ 3(1963)

[3] Л.В. КАНТОРОВИЧ, УМН,3,№ 6(28)(1948)

[4] Л.В. КАНТОРОВИЧ, Г.П. АКИЛОВ, Функциональный анализ в нормированных пространствах,Физматгиз, 1959

[5] Ю.И. ГРИБАНОВ, Изв.вузов, Математика,№ I (1962)

[6] Л.В. КАНТОРОВИЧ, В.И. КРЫЛОВ, Приближенные методы высшего анализа, Физматгиз, 1962

[7] Ю.И. ГРИБАНОВ, ДАН СССР, 129,№ 6 (1959)