Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

K. K. Mokrishchev

О некоторых специальных кривых пространства посштоянной кривизны

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 5 (1964), No. 2, 79--84

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104960

Terms of use:

© Charles University in Prague, Faculty of Mathematics and Physics, 1964

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
5, 2 (1964)

О НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ КРИВЫХ ПРОСТРАНСТВА ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

К.К. МОКРИЩЕВ, Ростов на Дону

1. В этой статье рассматриваются основные свойства кривых пространства постоянной кривизны $\frac{1}{k^2}$ аналогичных кривым Бертрана [1], Мангейма [2], Чезаро [3] и некоторых других. Эти свойства при $\frac{1}{k^2} > 0$ превращаются в свойства соответственных кривых эллиптического пространства, при $\frac{1}{k^2} < 0$ – в свойства кривых гиперболического пространства, а при $k \to \infty$ – в свойства кривых евклидова пространства.

Если кривую трехмерного пространства постоянной кривизны $\frac{1}{k^2}$ задать гиперкомплексной координатой

$$\bar{r} = \bar{r}(s), \tag{1}$$

где s – длина дуги этой кривой, тогда основные формулы теории кривых можно записать в виде [4]:

$$\bar{r}' = \frac{1}{k}\bar{t}, \quad \bar{t}' = k_1\bar{n} - \frac{1}{k}\bar{r}, \quad \bar{n}' = -k_1\bar{t} - k_2\bar{b}, \quad \bar{b}' = k_2\bar{n}, \tag{2}$$

где $\bar{t}, \bar{n}, \bar{b}$ – гиперкомплексные координаты абсолютных полюсов нормальной, спрямляющей и соприкасающейся плоскостей кривой (1) а k_1 и k_2 -кривизна и кручение ее.

В последующих рассуждениях большую помощь оказало утверждение: если точки $A(\bar{a})$ и $B(\bar{b})$ взаимно ортогональны, то точка $C(\bar{c})$ прямой AB, определяется формулой

$$\bar{c} = \cos\frac{m}{k}\cdot\bar{b} - \sin\frac{m}{k}\cdot\bar{a}, \tag{3}$$

где $m = BC$.

2. Если главные нормали кривой (C) являются главными нормалами кривой $(C^{\times})$, тогда уравнение $(C^{\times})$ можно представить в виде

$$\bar{\tau}^{\times} = \bar{\tau}\cos\frac{a}{k} - \bar{n}\sin\frac{a}{k},$$

$$\bar{n}^{\times} = \bar{n}\cos\frac{d}{k} - \bar{\tau}\sin\frac{d}{k},$$

где a - расстояние между соответственными точками (C) и $(C^{\times})$, а d - расстояние между абсолютными полюсами соответственных спрямляющих плоскостъй их. Пользуясь формулами (2) и (3) устанавливаем:

а) расстояние между абсолютными полюсами соответственных спрямляющих плоскостей кривых (C) и $(C^{\times})$, равно расстоянию между соответственными точками их;

б) расстояние a между их соответственными точками и расстояние δ между абсолютными полюсами их соответственных нормальных плоскостей - величины постоянные.

При $k \to \infty$ получаем отсюда известные теоремы Бертрана [1], при $\frac{1}{k^2} > 0$ - теоремы о соответственных кривых эллиптического пространства [5], а при $\frac{1}{k^2} < 0$ - теоремы о кривых пространства Лобачевского [6, 7];

в) кривизна k_1 и кручение k_2 кривой (C) связаны линейным уравнением с постоянными коэффициентами

$$\sin\frac{a}{k}\sin\frac{\delta}{k}\cdot k_1 + \sin\frac{a}{k}\cos\frac{\delta}{k}\cdot k_2 + \frac{1}{k}\cos\frac{a}{k}\sin\frac{\delta}{k} = 0.$$

При $k \to \infty$ получаем отсюда натуральное уравнение кривых Бертрана [1]

$$a k_1 + a \operatorname{ctg}\alpha \cdot k_2 + 1 = 0,$$

где α - угол между соответственными касательными к (C) и $(C^{\times})$,

г) кривизны k_1 и $k_1^{\times}$ кривых (C) и $(C^{\times})$ в их соответственных точках связаны уравнением

$$\left(\frac{1}{k}\cos\frac{a}{k}+k_1\sin\frac{a}{k}\right)\left(\frac{1}{k}\cos\frac{a}{k}-k_1^{x}\sin\frac{a}{k}\right)=\frac{1}{k^2}\cdot\cos^2\frac{\delta}{k}\ .$$

Отсюда, если учесть, что [4]

$$k_1=\frac{1}{k\cdot tg\,\frac{\beta_1}{k}}\ ,$$

где β_1 - радиус кривизны кривой (C), и построить для соответственных точек C и C^x кривых (C) и (C^x) их центры кривизны C_1 и C_1^x, находим

$$(C\,C_1\,C^xC_1^x)=\frac{\sin\frac{C\,C_1}{k}}{\sin\frac{C^xC_1}{k}}:\frac{\sin\frac{C\,C_1^x}{k}}{\sin\frac{C^x\,C_1^x}{k}}=\frac{1}{\cos^2\frac{\delta}{k}}\ ,$$

т.е. сложное отношение двух соответственных точек кривых (C) и (C^x) и соответствующих этим точкам центров кривизны этих кривых есть величина постоянная. При $k\to\infty$ получаем отсюда известную теорему Мангейма [8];

д) произведение кручений k_2 и k_2^x, взятых в соответственных точках кривых (C) и (C^x) есть постоянная положительная величина

$$k_2\,k_2^x=\left(\frac{\sin\frac{\delta}{k}}{k\sin\frac{a}{k}}\right)^2\ .$$

Отсюда при $k\to\infty$ получаем известную реорему Шелля [9] для кривых Бертрана евклидова пространства.

3. Если точки кривых (C) и (C^x) находятся во взаимно однозначном соответствии таком, что прямая, соединяющая любые две соответственные точки является общей нормалью их и образует с главной нормалью кривой (C) постоянный угол α, а с главной нормалью кривой (C^x) постоянный угол β, то тогда:

а) расстояние a между соответственными точками кривых (C) и (C^*) есть величина постоянная;

б) кривизны k_1 и k_1^*, взятые в соответственных точках кривых (C) и (C^*), связаны уравнением

$$\left(\frac{1}{k}\cos\frac{a}{k}+k_1\cos\alpha\sin\frac{a}{k}\right)\left(\frac{1}{k}\cos\frac{a}{k}-k_1^*\cos\beta\sin\frac{a}{k}\right)=\frac{1}{k^2}\cos^2\varphi ,$$

где φ - угол между соответственными нормальными плоскостями. Это утверждение является далеко идущим обобщением теоремы Мангейма;

в) произведение кручений k_2 и k_2^*, взятых в соответственных точках кривых (C) и (C^*), удовлетворяет условию

$$k_2 k_2^* = \left(\frac{\sin\varphi}{k\sin\frac{a}{k}}\right)^2$$

Это - обобщение теоремы Шелля.

г) при $\alpha=\beta=0$ получаем кривые, рассмотренные в пункте 2 ;

д) при $\beta=\frac{\pi}{2}$ кривизна и кручение кривой (C) связаны уравнением

$$(\cos^2\alpha\cdot k_1^2+k_2^2+\frac{1}{k^2})\sin\frac{a}{k}\cos\frac{a}{k}+\frac{k_1}{k}\cos\alpha=0 ;$$

е) при $\alpha=0$, $\beta=\frac{\pi}{2}$, т.е. когда главные нормали кривой (C) совпадают с бинормалями в соответственных точках кривой (C^*), натуральное уравнение кривой (C) принимает вид

$$(k_1^2+k_2^2+\frac{1}{k^2})\sin\frac{a}{k}\cos\frac{a}{k}+\frac{k_1}{k}=0 ,$$

которое, при $k\to\infty$ обращается в натуральное уравнение кривых Мангейма [8] евклидова пространства;

ж) при $\alpha=\beta=\frac{\pi}{2}$, т.е. когда кривые (C) и (C^*) имеют общие бинормали, находим

$$k_2^2 + \frac{1}{k^2} = 0,$$

следовательно, в эллиптическом пространстве не существует действительной кривой, бинормали которой были бы бинормалями другой кривой, а в параболическом пространстве такая кривая - всегда плоская.

4. Предположим, что прямая p неизменно связана с основным репером кривой (C), тогда:

а) если на прямой p, не проходящей через вершину репера кривой (C), существует точка, которая движется ортогонально к p, то кривизна и кручение кривой (C) будут связаны линейным уравнением с постоянными коэффициентами;

б) если прямая p огибает некоторую кривую, то кривизна и кручение кривой (C) связаны уравнением вида

$$A\ k_1^2 + B k_1 k_2 + C k_2^2 + D\ k_1 + E\ k_2 + F = 0$$

где $A, B, \ldots, F$ - функции параметров, определяющих положение прямой p относительно репера кривой (C). Отсюда, при $k \to \infty$ получаем кривые Чезаро [3].

в) можно установить классификацию кривых пространства постоянной кривизны, определяемых натуральным уравнением

$$A k_1^2 + B k_1 k_2 + C k_2^2 + D k_1 + E k_2 + F = 0$$

с постоянными коэффициентами, в зависимости от положения соответствующей прямой p относительно репера кривой.

Литература:

[1] BERTRAND, Mémoire sur la théorie des courbes à double courbure, Journal de Math., XV, (1850).

[2] MANNHEIM, Applications d'un mode de représentation plane de classes de surfaces réglées, Comptes Rendus, 85, (1877).

[3] CESARO, Sulle courve di Bertrand, Riv.di Mat.,2,(1892).

[4] О.С.СМОГОРЖЕВСКИЙ, Основи геометрії , Київ, (1954).

[5] BIANCHI, Lezioni di geometria differenziale, v.II, p. II, (1924).

[6] Д.Д. МОРДУХАЙ-ВОЛТОВСКИЙ, Кривые Бертрана в пространстве Лобаческого, ДАН СССР, 69, Н 6, (1949).

[7] К.К. МОКРИЩЕВ, О некоторых классах кривых в пространстве Лобаческого, ДАН СССР, 100, Н 1, (1954).

[8] MANNHEIM, Sur les courbes ayant les mêmes normales principales et sur surface formée par ces normales, Comptes Rendus, 85, (1877).

[9] SCHELL, Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung in rein geometrischer Darstellung, Leipzig, 2.Aufl.,(1898).