Grozó Stanilov

Геодезическая нормаль к поверхности в P_3

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 5 (1964), No. 1, 33--36

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104956

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
5, 1 (1964)

ГЕОДИЗИЧЕСКАЯ НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ В P_3.

Г. СТАНИЛОВ, София

Формули для производных вершин тетраэдра $T = MM_1M_2M_3$ поверхности $M(u,v)$ даются следующей таблицей

(1)

	M	M_1	M_2	M_3	M	M_1	M_2	M_3
M	a	1	0	0	b	0	1	0
M_1	a_1^0	$-a$	β	0	b_1^0	b	0	1
M_2	a_2^0	0	a	1	b_2^0	γ	$-b$	0
M_3	a_3^0	a_3^1	a_3^2	$-a$	b_3^0	b_3^1	b_3^2	$-b$

Между прочим имеет место

(2) $$a_2^0 - a_3^1 = b_1^0 - b_3^2$$

Тетраэдр T не вполне определен: MM_1, MM_2 – асимптотические касательные; M_1, M_2 –нормированные; $(MM_1M_2M_3) = 1$; имеет место разложение

(3) $$z = xy - \frac{1}{3}(\beta x^3 + \gamma y^3) + \cdots \quad ;$$

ребра (MM_3) и (M_1M_2) полярно-сопраженны относительно любой поверхности Дарбу

(4) $$xy - z + \nu z^2 = 0$$

Для полного закрепления тетраэдра можно произвольно выбрать поверхность ν и нормаль (MM_3).

Соприкасающаяся плоскость любой кривой на поверхности

$$v = \varphi(u)$$

определяется тремя точками M, dM, d^2M. Легко можно получить точечное уравнение этой плоскости в виде

$$2m^2x - 2my + z(2am - 2bm^2 + n - \gamma m^3 + \beta) = 0 \qquad (5)$$

где $m = \dfrac{dv}{du}$, $n = \dfrac{d^2v}{du^2}$. Таким образом уравнение плоскости в данной точке M зависит от двух параметров m и n [1].

При данной параметризации поверхности мы рассмотрим кривые на поверхности, которые определяются уравнением второго порядка

$$n = \gamma m^3 - \beta \qquad (6)$$

Через каждую точку M поверхности $M(u, v)$ по каждому направлению $m_0 = \left(\dfrac{dv}{du}\right)_0$ проходит только одна кривая. Через точку M проходят ∞^1 кривых. Назовем их геодизическими линиями. Они определяются уравнением (6). Их соприкасающиеся плоскости образуют пучок плоскостей. Ось этого пучка - прямая

$$x = bz, \qquad y = az \qquad (7)$$

Назовем эту прямую - геодизической нормалью поверхности. Она не принадлежит касательной плоскости поверхности. Поэтому можно ее выбрать в качестве проективной нормали. Это дает $a = b = 0$. Выберем еще в качестве координатной поверхности - поверхность Ли $v = 0$. Это дает $a_3^1 = a_2^0$. Таблица (1) принимает следующий простой вид

(8)

	M	M_1	M_2	M_3	M	M_1	M_2	M_3
M	0	1	0	0	0	0	1	0
M_1	a_1^0	0	β	0	b_1^0	0	0	1
M_2	a_2^0	0	0	1	b_2^0	γ	0	0
M_3	a_3^0	a_2^0	a_3^2	0	b_3^0	b_3^1	b_1^0	0

Все геодизические прямые (7) описывают конгруенцию, сопряженную поверхности. Действительно, полагая $z = 1$ в (7) получим $x = b$, $y = a$, $z = 1$. Условие сопряженности конгруенции имеет вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \chi}{\partial u} + b_3^2 - a_3^1 = 0$$

которые в нашем случае являются тождеством – следует из уравнений совместности.

Формулы для перехода от общего тетраэдра (1) к геодизическому (8) будут:

$$\begin{aligned}
&\bar M = M, \quad \bar M_1 = aM + M_1, \quad \bar M_2 = bM + M_2, \\
&\bar M_3 = \tau M + bM_1 + aM_2 + M_3, \quad 2\tau = a_2^0 - a_3^1 + 2ab, \\
&\bar a = \bar b = 0, \qquad \bar\beta = \beta, \qquad \bar\gamma = \gamma, \\
&\bar a_1^0 = a_1^0 + a_u + a^2 - b\beta, \quad \bar b_1^0 = b_1^0 + a_2 + ab - \tau, \\
(9)\quad &\bar a_2^0 = a_2^0 + b_u + ab - \tau, \quad \bar b_2^0 = b_2^0 + b_2 + b^2 - a\gamma, \\
&\bar a_3^2 = a_3^2 + a_u + a^2 + b\beta, \quad \bar b_3^1 = b_3^1 + b_2 + b^2 + a\gamma, \\
&\bar a_3^0 + \bar a_2^0 a + \bar a_3^2 b = a_3^0 + a_2^0 a + a_1^0 b + \tau_u + a\tau, \\
&\bar b_3^0 + \bar b_1^0 b + \bar b_3^1 a = b_3^0 + b_1^0 b + b_2^0 a + \tau_v + b\tau.
\end{aligned}$$

Эти формулы показывают, что величины β, γ не зависят от выбора величин a, b. Тогда можно сказать, что при проективном изгибании поверхности геодизических кривые переходят в геодизические.

Этот выбор тетраэдра не является инвариантным, но он значительно упрощает всю таблицу. Он сохраняет свой вид только при тривиальных сменах параметров $u = u^* + C$, $v = v^* + C_2$ и при перенормировании координат $\bar M_i = M_i \rho_i$, причем $\rho = \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = const$. Тогда все величины в (8) являются инвариантами.

Этот тетраэдр можно с успехом применять в теории поверхностей, специально к вопросам об изгибании поверхностей. Дальнейшие рассмотрения будут предметом других публикаций.

Литература

[1] С.П. ФИНИКОВ, Проективно-дифференциальная геометрия, Москва, 1937.