A. L. Kuz'mina

Об одной (обратной) задаче з теории ортогональних функций

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 4 (1963), No. 2, 75--79

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104932

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

4, 2 (1963)

ОБ ОДНОЙ (ОБРАТНОЙ) ЗАДАЧЕ В ТЕОРИИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

А.Л. КУЗЬМИНА, КАЗАНЬ

Б.М. Гагаев (см.[1]) поставил следующую задачу:

Задана некоторая система функций комплексного переменного. Найти контур или область, если они существуют, по которым эта система ортогональна относительно данного веса (проблема III).

В п.п. 1 – 3 нашей заметки мы приведем решение этой (и видоизмененой) задачи для системы многочленов, в п.4 – для произвольной системы функций.

1. Пусть задана система многочленов

$$(1) \qquad p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} x^k , \qquad n = 0, 1, 2, \dots ,$$

и неотрицательная функция $P(\theta)$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ такая, что $\left| \int_0^{2\pi} \ln p(\theta)\, d\theta \right| < \infty$.

Искомый контур ортогональности C будем считать спрямляемой жордановой кривой. Обозначим через $z = \gamma(x)$ функцию, конформно отображающую внутренность C на круг $|z| < 1$ так, что $\gamma(a) = 0$, причем $\sum |p_n(a)|^2 < \infty$.

Очевидно, для того чтобы система (1) была ортогональна по некоторому контуру C с весом $p(\theta(s))|\gamma'(x(s))|$, s – дуга C, необходимо, чтобы равномерно внутри имело место

$$(2) \qquad \frac{1}{2\pi\gamma(x)\overline{\nu(a)}} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x)\overline{p_n(a)} ,$$

где

$$(3)\qquad \nu(x) = \exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \ln p(\theta)\, \frac{e^{i\theta}+\gamma(x)}{e^{i\theta}-\gamma(x)}\, d\theta\right\}$$

– функция, аналитическая внутри C и

$$\lim_{\substack{x\to\xi,\\ \xi\in C}} |\nu(x)|^2 = p_1(\xi) \doteq p(\theta(s))\,.$$

(см. [2]).

Положим

$$C_{ki} = \int_C \xi^k \bar{\xi}^i p_1(\xi)|\gamma'(\xi)|\,ds\,,\ k,\ i = 0, 1, 2, \ldots\,.$$

Тогда для того чтобы система (1) была ортогональна по контуру C с весом $p_1(\xi)|\gamma'(\xi)|$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения:

$$(4)\qquad \sum_{k,i=0}^{n,m} a_k^{(n)} \bar{a}_i^{(m)} C_{ki} = \delta_{nm}\,,\ n, m = 0, 1, 2, \ldots\,.$$

2. Пусть задана система (1) и контур C (C –спрямляемая жорданова кривая).

Положим $\mu_{00} = 1$ и найдем μ_{ki}, $\mu_{ki} = \bar{\mu}_{ik}$, $i, k = 0, 1, 2, \ldots,$ из условий:

$$(5)\qquad \sum_{k,i=0}^{n,m} a_k^{(n)} \bar{a}_i^{(m)} \mu_{ki} = \delta_{nm}\,,\ n, m = 0, 1, 2, \ldots\,.$$

Для того чтобы система (1) была ортогональна по контуру C с интегральным весом $\sigma(s)$ ($\sigma(s)$– неубывающая функция) необходимо и достаточно, чтобы последовательность μ_{ki}, $k, i = 0, 1, 2$ была ненегативна на C, т.е. из условия

$$\sum_{k,i=0} \alpha_{ki}\, \xi^k \bar{\xi}^i + \overline{\alpha_{ki}\, \xi^k \bar{\xi}^i} \geq 0$$

вытекало условие

(6) $$\sum_{k,i=0}^{n} \alpha_{ki}\,\mu_{ki} + \overline{\alpha_{ki}\,\mu_{ki}} \geq 0$$

(см. [3]).

3. Пусть опять задана система (1).

Будем считать искомый контур ортогональности C $\mathcal{L}$ - гладким и искомый вес $p(s)=|\nu(\xi(s))|^2|\psi'(\xi(s))|$, где $\nu(x)$ - некоторая аналитическая и не равная нулю вне C функция, а функция $x=\psi(x)$ конформно отображает внешность C на $|x|>1$.

Для ортогональности системы (1) по некоторому $\mathcal{L}$-гладкому контуру C с весом $p(s)$ необходимо, чтобы

(7) $$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}(x)}{p_n(x)} = \psi(x)$$

равномерно вне C .

Если $|\psi(x)|=1$ представляет $\mathcal{L}$-гладкую кривую C и выполнены условия (6), то система (1) будет ортогональной по контуру C с интегральным весом $\sigma(s)$, $\sigma(s)$-неубывающая функция.

Если $\left|\int_0^{2\pi} \ln \sigma'(s(\theta))\,d\theta\right|<\infty$, то система (1) ортогональна по контуру C с весом

$$p(s)=|\nu(\zeta(s))|^2\,|\psi'(\xi(s))|\,,$$

где

$$\nu(x)=\exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \ln \sigma'(s(\theta))\,\frac{e^{i\theta}+\psi(x)}{e^{i\theta}-\psi(x)}\,d\theta\right\}.$$

4. Пусть задана система аналитических функций

(8) $$g_n(x)\,,\quad n=0,1,2,\ldots,$$

и неотрицательная функция $p(\theta),\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$ такая, что $\left|\int_0^{2\pi} \ln p(\theta)\, d\theta\right| < \infty$.

Будем предполагать, что система (8) замкнута в H_p^2. Тогда, для того, чтобы эта система была ортогональна по некоторому контуру C с весом $p(\theta(s))|\gamma'(\xi(s))$, s -дуга C, необходимо, чтобы равномерно внутри имело место

$$\frac{1}{2\pi\gamma(x)\overline{\gamma(a)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)\overline{\varphi_n(a)}, \tag{9}$$

где $\gamma(x)$ определеяется формулой (3), a выбрано так, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\varphi_n(a)|^2 < \infty$.

Запишем $\varphi_n(x)$ в виде:

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{(n)} p_k(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

где $p_k(x),\ k = 0, 1, 2, \ldots,$ - многочлены, ортогональные по контуру C с весом $p(\theta(s))|\gamma'(\xi(s))|$.

Очевидно, для того чтобы система (2) была ортогональна по контуру C с весом $p(\theta(s))|\gamma'(\xi(s))|$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения:

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k^{(n)} \overline{C}_k^{(m)} = \delta_{nm}, \quad n, m = 0, 1, 2, \ldots \tag{11}$$

В заключение надо отметить, что указанные условия трудно проверяемые, но, по-видимому, и любые другие будут такими же.

Литература

[1] В.М. ГАГАЕВ, Работы Казанских математиков по ортогональным системам. УМН, 12:4(76), 1957.

[2] П.П. КОРОВКИН, О полиномах ортогональных по спрямляемому контуру, Мат.сб., 9(51):3, 1941.

[3] М.Г. КРЕЙН, Идеи П.Л. Чебышева и А.А. Маркова в теории предельных величин. УМН, 6:4(44), 1951.