

Jurij Ivanovich Gribanov

К проблеме сходимости метода редукции для бесконечных систем
линейных уравнений

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 4 (1963), No. 1, 47--51

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/104928>

Terms of use:

© Charles University in Prague, Faculty of Mathematics and Physics, 1963

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

К ПРОБЛЕМЕ СХОДИМОСТИ МЕТОДА РЕДУКЦИИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ю.И. ГРИБАНОВ, Казань

Наряду с бесконечной системой линейных уравнений

$$(1) \quad X = AX + H : \quad x_m = \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk} x_k + h_m \quad (m = 1, 2, \dots)$$

рассмотрим усеченную систему уравнений

$$(2) \quad \begin{cases} x_m^{(n)} = \sum_{k=1}^n a_{mk} x_k^{(n)} + h_m & (m \leq n) \\ x_m^{(n)} = 0 & (m > n) \end{cases}$$

Пусть система уравнений (2) при любом достаточно большом n имеет единственное решение

$$X_n = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}, 0, 0, \dots) \quad . \text{ Если тогда}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_m^{(n)} = x_m$ и $X = \{x_m\}$ является решением системы (1), то говорят, что система уравнений (1) разрешима методом редукции.

Известно (см., напр., [1], стр. 38), что любая вполне регулярная система уравнений имеет единственное ограниченное решение при любом ограниченном векторе H и что это ограниченное решение может быть найдено методом редукции. Этот результат можно сформулировать также следующим образом: если матричный оператор A непрерывно отображает пространство m ограниченных последовательностей в себя и $\|A\| < 1$, то система уравнений (1) однозначно разрешима в пространстве m и ее единственное принадлежащее пространству m решение может быть найдено методом редукции.

Естественно возникает вопрос: будет ли метод редукции давать последовательность векторов X_n , сходящихся к решению X вполне регулярной системы уравнений по норме пространства m ? На примере простейшей системы уравнений

$$x_m = 1 \quad (m = 1, 2, \dots)$$

легко заметить, что в общем случае такая сходимость не имеет места.

В настоящей работе устанавливаются необходимые и достаточные условия, при которых метод редукции для системы уравнений (1) с $\|A\| < 1$, рассматриваемой в произвольном координатном пространстве [2], сходится к решению системы по норме пространства.

Через \mathcal{L} мы обозначаем в дальнейшем произвольное координатное пространство. Пространство m , пространства Φ . Рисса \mathcal{L}_p ($p \geq 1$) пространства последовательностей Орлица [3] является координатными пространствами. Через $[\mathcal{L}]$ мы обозначаем, как обычно, замыкание в метрике пространства \mathcal{L} множества всех векторов с конечным числом отличных от нуля координат. Для того чтобы вектор X из \mathcal{L} принадлежал $[\mathcal{L}]$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|R_n X\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|(0, \dots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)\| = 0.$$

Если матричный оператор A непрерывно отображает \mathcal{L} в себя и норма $\|A\| < 1$, то система уравнений (1) однозначно разрешима в пространстве \mathcal{L} . Так как в пространстве \mathcal{L} норма матричного оператора A_n , соответствующего системе уравнений (2), $\|A_n\| \leq \|A\|$, то при $\|A\| < 1$ система уравнений (2) однозначно разрешима при любом $n \in \mathcal{L}$.

Имеет место следующая общая

Теорема 1. Пусть $\|A\| < 1$. Тогда для того чтобы

метод редукции определял последовательность векторов X_n , сходящихся по норме координатного пространства ℓ к единственному решению $X \in \ell$ системы уравнений (1), необходимо и достаточно, чтобы $A\{\ell\} \subset [\ell]$ и $H \in [\ell]$. Имеет место оценка

$$(3) \quad \|X - X_n\| \leq \frac{\|R_n X\|}{1 - \|A\|}$$

Необходимость. Последовательность векторов $\{X_n\} \subset [\ell]$. Поэтому последовательность X_n может сгсдиться по норме пространства ℓ к решению X системы уравнений (1) лишь в том случае, когда $X \in [\ell]$. Но из $X = AX + H$ следует, что $X \in [\ell]$ тогда и только тогда, когда $A\{\ell\} \subset [\ell]$ и $H \in [\ell]$.

Достаточность. Если $A\{\ell\} \subset [\ell]$ и $H \in [\ell]$, то также и $X \in [\ell]$. Но тогда из оценки (3) следует, что $X_n \rightarrow X$ по норме пространства ℓ . Таким образом, доказательство достаточности условий теоремы сводится к установлению оценки (3).

При $m \leq n$

$$x_m - x_m^{(n)} = \sum_{k=1}^m a_{mk} (x_k - x_k^{(n)}) + \sum_{k=m+1}^{\infty} a_{mk} x_k$$

Следовательно, при любом векторе $Y = \{y_m\}$

$$\sum_{m=1}^n (x_m - x_m^{(n)}) y_m = \sum_{m=1}^n y_m \sum_{k=1}^m a_{mk} (x_k - x_k^{(n)}) + \sum_{m=1}^n y_m \sum_{k=m+1}^{\infty} a_{mk} x_k$$

что можно записать в следующей форме:

$$(P_n(X - X_n), Y) = (P_n A P_n(X - X_n), Y) + (P_n A R_n X, Y).$$

Здесь $P_n V = V - R_n V$.

Но из предыдущего равенства вытекает, что

$$\|P_n(X - X_n)\| \leq \|A\| \cdot \|P_n(X - X_n)\| + \|A\| \cdot \|R_n X\|.$$

Так как по предположению $\|A\| < 1$, то

$$\|P_n(X - X_n)\| \leq \frac{\|A\| \cdot \|R_n X\|}{1 - \|A\|}.$$

Следовательно,

$$\|X - X_n\| \leq \|P_n(X - X_n)\| + \|R_n X\| \leq \frac{\|R_n X\|}{1 - \|A\|},$$

что и завершает доказательство теоремы.

Оценка (3) неэффективна. В [4] при более жестких условиях (дополнительное требование ω -непрерывности системы уравнений (1) (указаны различные достаточно эффективные оценки).

Отметим некоторые частные случаи теоремы 1.

Теорема 2. Пусть (1) является вполне регулярной системой уравнений: $\sup_{1 \leq m < \infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}| < 1$. Тогда для того чтобы метод редукции сходился по норме пространства m к решению $X \in m$ системы уравнений, необходимо и достаточно, чтобы $A\{m\} \subset C_0$ и $H \in C_0$.

Здесь C_0 обозначает пространство сходящихся к нулю последовательностей, $c_0 = [m]$.

Матричный оператор A отображает пространство l_1 в себя тогда и только тогда, когда $\alpha = \sup_{1 \leq n < \infty} \sum_{m=1}^{\infty} |a_{mn}| < \infty$. При этом $\|A\| = \alpha$. Так как $[l_1] = l_1$, то из теоремы 1 вытекает

Теорема 3. Если $\alpha < 1$, то система уравнений (1) однозначно разрешима в пространстве l_1 и метод редукции сходится по норме пространства l_1 к решению $X \in l_1$ системы уравнений (1).

Аналогичный результат имеет место и для бесконечных систем линейных уравнений в пространствах l_p ($p > 1$).

Л и т е р а т у р а

- [1] Л.В. КАНТОРОВИЧ и В.И. КРЫЛОВ, Приближенные методы высшего анализа. ГТИ, 1950.
- [2] Ю.И. ГРИБАНОВ, Координатные пространства и бесконечные системы линейных уравнений, 1. Изв. вузов, МАТЕМАТИКА, № 4 (29), 1962.
- [3] J.J. GRIBANOV, Zur Theorie der Orliczschen Koordinatenräume und der unendlichen Matrizenabbildungen. Wiss.Z.Humboldt-Univ. Berlin, Math.-Naturwiss. Reihe, VIII, 3, 1958/59, S.339 - 349.
- [4] Ю.И. ГРИБАНОВ, О методе редукции для бесконечных систем линейных уравнений. Изв. вузов, МАТЕМАТИКА, № 1 (25), 1962 .