Věra Trnková

К теории категорий

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 3 (1962), No. 4, 9--35

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104918`

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

3, 4 (1962)

К ТЕОРИИ КАТЕГОРИЙ

Вера ТРНКОВА (Věra TRNKOVÁ), Прага

В этой статье рассматриваются некоторые вопросы теории категорий. В первой части приведены две теоремы о репрезентации категорий множественными категориями. Во второй части рассматривается категория всех топологических пространств.

По известной теореме Эйленберг-Мэклейна [1] всякая категория, объекты которой сотавляют множество, изоморфна с множественной категорией. Конструкция Эйленберг-Мэклейна при том такая, что мономорфизмы перейдут в взаимно однозначные отображения. В этой статье решен вопрос репрезентации категории, объекты которой составляют множество так, чтобы эпиморфизмы соответствовали отображениям на множества или при каких условиях можно требовать, чтобы одновременно мономорфизмы соответствовали взаимно однозначным отображениям и эпиморфизмы отображениям на множества. Аналогичную проблематику получим, если вместо изоморфизма категорий требуется только коэкстензивность, но данному классу мономорфизмов должен соответствовать класс инъекций. В [3] доказана теорема, что всякая бикатегория (K, I, P) объекты которой составляют множество, коэкстенсивна множественной категории так, что I соответствует инъекциям. В настоящей статье эта теорема еще положена так, что можно еще требовать, чтобы P одновременно соответствовало проекциям (определения всех нужных понятий приведены в тексте). Во второй части рассматривается категория всех топологических пространств. Дается "категорная характеристика" гомеоморфного отображения одного пространства в другое и гомеоморфного отображения пространства на замкнутое подпространство другого пространства.

Определения всех употребляемых понятий или приведены здесь, или в [5] за исключением понятия бикатегории, которое приведено в [3]. Обозначение употребляется то же самое как и в [5].

I.

Под множественной категорией в дальнейшем будем понимать любую подкатегорию категории всех непустых множеств, т. е. ее объекты есть не пустые множества и морфизмы есть отображения этих множеств. При том, как это принято в теории категорий, отображение α множества a в множество b не только подмножество картезъянского произведения множеств a и b, но и тройка, первый элемент которой есть названное подмножество, второй a и третий b.

Если K есть категория, объекты которой составляют множество, не всегда существует изоморфное отображение φ категории K на множественную категорию так, чтобы для всякого мономорфизма α отображение $\alpha\varphi$ было взаимно однозначным отображением в множество и для всякого эпиморфизма β отображение $\beta\varphi$ было отображением на множество. Пример тривиальный: Пусть K есть категория, имеющая три разных объекта a, b, c и морфизмы K пусть есть кроме единичных морфизмов еще именно следующие морфизмы: $\alpha : a \to b$, $\beta : a \to b$, $\alpha \neq \beta$, $\gamma : b \to c$ и $\alpha . \gamma = \beta . \gamma$. Категорию K невозможно репрезентовать вышеназначенным путем, так как в множественной категории выполнено: если α есть отображение на множество и $\alpha . \gamma$ есть взаимно однозначное отображение в множество, то γ есть взаимно однозначное.

<u>Лемма 1</u>: Пусть K есть категория, объекты которой составляют множество. Пусть I есть класс мономорфизмов и P класс эпиморфизмов категории K такие, что

1) $\sigma . \nu \in I$, $\sigma \in P \Longrightarrow \nu \in I$

2) $\alpha \cdot \mu = \sigma \cdot \beta$, $\mu \in I$, $\sigma \in P \Longrightarrow \alpha = \sigma \cdot \tau$.

Тогда существует категория K^* так, что

a) K является подкатегорией категории K^* и имеет тот же самый класс объектов;

b) всякое $\alpha \in I$ является мономорфизмом K^* ;

c) для всякого $\sigma \in P$, $\sigma : a \to b$, $\rho \in K^*, \rho : c \to b$ существует $\alpha \in K^*$ так что $\alpha \cdot \sigma = \rho$.

d) если $\alpha \in K^*$ есть обратимый в K^* , тогда $\alpha \in K$ и есть обратимый в K .

<u>Доказательство</u>: Пусть a, b есть любые объекты категории K. Обозначим через $D(a, b)$ множество всех символов α/β, где $\alpha : a \longrightarrow c$, $\beta \in P$, β не является обратимым, $\beta : b \longrightarrow c$, c - любой объект. Потом определим $\bar{H}(a, b) = D(a, b) \cup H(a, b)$, где $H(a, b)$ обозначаем множество морфизмов из a в b. Для любых объектов a, b, c и для $\mu \in \bar{H}(a, b)$, $\nu \in \bar{H}(b, c)$ определим умножение $\oplus$ следующим путем (через $\cdot$ обозначаем умножение в K) :

1) Если $\mu \in H(a, b)$, $\nu \in H(b, c)$, тогда $\mu \oplus \nu = \mu \cdot \nu$.

2) Если μ есть единичный, тогда $\mu \oplus \nu = \nu$.

3) Если ν есть единичный, тогда $\mu \oplus \nu = \mu$.

4) Если $\mu = \alpha/\beta$, $\nu = \beta \cdot \rho$ (ρ определено однозначно, так как β есть эпиморфизм), тогда $\mu \oplus \nu = \alpha \cdot \rho$.

5) В остальных случаях положим $\mu \oplus \nu$ равно символу (μ , ν).

Через H обозначим $\bigcup\limits_{a,\, b \text{ объекты } K} \bar{H}(a, b)$. Пусть M есть множество всех конечных последовательностей $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ элементов H и таких что для всякого $i (i = 1, 2, \ldots, k-1)$ $\alpha_i \oplus \alpha_{i+1}$ определено и есть $\alpha_i \oplus \alpha_{i+1} = (\alpha_i, \alpha_{i+1})$. 1-членную последовательность (α_1) отождествим прямо с α_1. Определим полной индукцией по k умножение k-членной последовательности 1-членной последовательностью:

a) $\alpha_1 \oplus \alpha_2$ уже определено.

b) $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) \oplus \alpha_{k+1}$ определено тогда и только тогда, если определено $\alpha_k \oplus \alpha_{k+1}$. Если $\alpha_k \oplus \alpha_{k+1} = (\alpha_k, \alpha_{k+1})$, тогда положим $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \oplus \alpha_{k+1} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1})$; в остальных случаях положим $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \oplus \alpha_{k+1} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}) \oplus [\alpha_k \oplus \alpha_{k+1}]$.

Определим полной индукцией по ℓ умножение $\oplus$ k-членной последовательности ℓ-членной последовательностью:

a) $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \oplus \beta_1$ уже определено.

b) $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \oplus (\beta_1, \ldots, \beta_\ell)$ определено тогда и только тогда, если определено $\alpha_k \oplus \beta_1$ и есть

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \oplus (\beta_1, \ldots, \beta_2) = [(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \oplus \beta_1] \oplus (\beta_2, \ldots, \beta_\ell).$$

Определим категорию K^1 так, что объекты K^1 есть именно объекты категории K и морфизмы - это элементы множества M. При том $\alpha \in M$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ есть морфизм из a в b тогда и только тогда, если $\alpha_1 : a \to c$, $\alpha_k : d \to b$. Умножение в категории K^1 есть выше указанным путем определенное умножение $\oplus$. Ассоциативность умножения $\oplus$ проверена в приложении A. в конце статьи. Ясно также, что если e есть единичный морфизм категории K, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in M$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_\ell) \in M$ тогда есть $e \oplus \alpha = \alpha$, $\beta \oplus e = \beta$, когда только эти произведения определены.

Категория K^1 имеет следующие свойства:

1) Если σ есть эпиморфизм категории K, то он также есть

эпиморфизм K^1. Действительно, пусть $\alpha=(\alpha_1,..,\alpha_k)$, $\beta=(\beta_1,..,\beta_l)$ есть морфизмы K^1 такие, что $\sigma\oplus\alpha$ и $\sigma\oplus\beta$ определено. Может случиться или $\sigma\oplus\alpha=(\sigma,\alpha_1,\cdots,\alpha_k)$ или $\sigma\oplus\alpha=(\sigma.\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)$ и одновременно $\sigma\oplus\beta=(\sigma,\beta_1,\cdots,\beta_l)$ или $\sigma\oplus\beta=(\sigma.\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l)$. Легко можно увидеть, что $\alpha\neq\beta\Longrightarrow\sigma\alpha\neq\sigma\beta$ во всех четырех возможных случаях.

2) Если $\sigma\in P$, $\sigma: a\to b$, $\alpha\in K$, $\alpha: c\to b$, тогда существует $\rho\in K^1$ так, что $\rho\oplus\sigma=\alpha$. Действительно, если σ обратимое, можно взять $\rho=\alpha\sigma^{-1}$. В другом случае достаточно взять $\rho=\alpha/\sigma$.

3) Если $\mu\in I$, $\alpha=(\alpha_1,..,\alpha_k)\in M$ и $\alpha\oplus\mu$ определено, есть или $\alpha\oplus\mu=(\alpha_1,..,\alpha_k,\mu)$ или $\alpha\oplus\mu=(\alpha_1,..,\alpha_k\cdot\mu)$. Декствительно, если $\alpha_k=\rho/\sigma$, тогда должно $\mu\neq\sigma\cdot\nu\,(\nu\in K)$. Когда бы $\mu=\sigma\nu$, $\mu: a\to b$, $\sigma: a\to c$, $\nu: c\to b$, то из условий 1) и 2) для классов I, P вытекало вы: $\nu\in I$ и $e_a=\sigma\cdot\tau\,(\tau\in K)$; следовательно $\sigma\tau\mu=\sigma\nu$, следовательно $\tau\mu=\nu$ и потому $\tau\sigma\nu=\nu$, следовательно $\tau\sigma=e_c$. Но это значит, что $\tau=\sigma^{-1}$ и это невозможно. Если $\alpha_k\in K$, $\alpha_{k-1}=\rho/\sigma$, тогда обязательно $\alpha_k\cdot\mu\neq\sigma\nu$. Действительно, когда бы $\alpha_k\mu=\sigma\nu$, то $\alpha_k=\sigma\tau$, и это противоречит тому, что $\alpha_{k-1}\oplus\alpha_k=(\alpha_{k-1},\alpha_k)$.

4) Обозначим через I^1 множество всех $\alpha=(\alpha_1,..,\alpha_k)\in M\,(k=1,2,..)$ таких, что или $\alpha_1=\rho/\sigma$ или $\alpha_1\in I$. Ясно, что $I\subset I^1$ и при помощи свойства 3) категории K^1 не трудно проверить:

Если $\alpha=(\alpha_1,..,\alpha_k)\in I^1$, $\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_l)\in M$ и $\beta\oplus\alpha$ определено, тогда или $\beta\oplus\alpha=(\beta_1,..,\beta_l,\alpha_1,..,\alpha_k)$ или $\beta\oplus\alpha=(\beta_1,\cdots,\beta_{l-1},\beta_l\cdot\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)$. Из этого легко вытекает, что всякий морфизм $\alpha\in I^1$ есть мономорфизм K^1.

5) I^1 уже определено, положим еще $P^1=P$. Имеет место

следующее утверждение: $\sigma \oplus \beta \in I^1, \sigma \in P^1 \Longrightarrow \beta \in I^1$. Действительно, пусть $\sigma \oplus \beta = \alpha$, $\beta = (\beta_1, .., \beta_\ell)$. Если $\alpha = (\sigma, \beta_1, .., \beta_\ell)$, тогда $\beta_1 = {}^{\mu}/_{\nu}$ и следовательно $\beta \in I^1$. Если $\alpha = (\sigma \cdot \beta_1, \beta_2, .., \beta_\ell)$, тогда $\sigma \cdot \beta_1 \in I$, следовательно $\beta_1 \in I$ и потому $\beta \in I^1$.

6) $\alpha \oplus \mu = \sigma \oplus \nu$, $\mu \in I^1$, $\sigma \in P^1 \Longrightarrow \alpha = \sigma \oplus \tau$. Действительно, пусть $\alpha = (\alpha_1, .., \alpha_k)$, $\mu = (\mu_1, .., \mu_s)$, $\nu = (\nu_1, .., \nu_\ell)$; из свойства 4) категории K^1 вытекает, что или $\alpha \oplus \mu = (\alpha_1, .., \alpha_k, \mu_1, .., \mu_s)$ или $\alpha \oplus \mu = (\alpha_1, .., \alpha_{k-1}, \alpha_k \cdot \mu_1, \mu_2, .., \mu_s)$. $\sigma \oplus \nu$ равно или $(\sigma, \nu_1, .., \nu_\ell)$, или $(\sigma \cdot \nu_1, \nu_2, .., \nu_\ell)$. Следовательно должно быть или $\alpha_1 = \sigma$ или $\alpha_1 = \sigma \cdot \nu_1$ или для $k = 1$ также может случиться $\alpha_1 \cdot \mu_1 = \sigma$ или $\alpha_1 \cdot \mu_1 = \sigma \cdot \nu_1$. Но в последних двух случаях обязательно $\mu_1 \in I$. Из этого факта наше утверждение уже легко вытекает.

7) Очевидно, что если $(\alpha_1, .., \alpha_k) \in M$ есть обратимый в K^1, есть $k = 1$, $\alpha_1 \in K$ и α_1 есть обратимый в K.

Категория K^1 с классами I^1 и P^1 исполняет условия 1) и 2) из леммы 1 и можно к ней тем же самым путем конструировать надкатегорию K^2, к ней опять K^3 и т.д. Если положить $K^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} K^n$, очевидно K^* имеет требуемые свойства.

<u>Теорема 1</u>: Пусть K есть категория, объекты которой составляют множество. Пусть I есть класс мономорфизмов и P класс эпиморфизмов категории K такие, что

1) $\sigma \cdot \nu \in I$, $\sigma \in P \Longrightarrow \nu \in I$.

2) $\alpha \cdot \mu = \sigma \cdot \nu$, $\mu \in I$, $\sigma \in P \Longrightarrow \alpha = \sigma \cdot \tau$.

Тогда существует множественная категория H и изоморфное отображение φ категории K на H так, что

а) для $\alpha \in P$ есть $\alpha\varphi$ взаимно однозначное отображение;

b) для $\alpha \in P$ есть $\alpha\varphi$ отображение на множество;

c) $\alpha\varphi$ есть взаимно однозначное отображение на множество тогда и только тогда, если α есть обратимый в K ;

d) если a, b есть разные объекты категории H, $c \subset b$, тогда $c \not\subset a$, $c \notin a$, $\{c\} \notin a$.

<u>Доказательство</u>: Категорию K погрузим в категорию K^* со свойствами a) b) c) d) из леммы 1 . Известной конструкцией Эйленберг-Мэклейна из [1] получим множественную категорию H^* и изоморфное отображение φ категорий K^* на H^*. Если обозначим $H = \varphi(K)$, тогда φ и H очевидно удовлетворяют условиям a) b) d) из теоремы [x)]. Покажем еще c): Пусть для $\alpha \in K$, $\alpha : a \to b$ есть $\alpha\varphi$ взаимно однозначное отображение на множество. Так как $\alpha\varphi$ есть отображение на множество, вытекает из конструкции Эйленберг-Мэклейна существование $\tau \in K^*$ так что $e_b = \tau\alpha$. Следовательно $\alpha = \alpha e_b = \alpha[\tau\alpha] = [\alpha\tau]\alpha$ и так как α является мономорфизмом, то $\alpha\tau = e_a$.

Напомним теперь некоторые определения, некоторые основные факты и конвенции:

Морфизм $\alpha : a \to b$ в множественной категории назовем <u>инклуссией</u>, если $a \subset b$ и для всякого $x \in a$ есть $x\alpha = x$; назовем его <u>инъекцией</u>, если $\alpha = \sigma\iota\rho$, где ι есть инклуссия и σ и ρ есть обратимые.

Морфизм $\alpha : a \to b$ в множественной категории назовем <u>факторизацией</u>, если b является разбиением множества a и для всякого $x \in a$ есть $x\alpha$ множество разбиения b ,

----

x) См. приложение B. в конце статьи.

содержащее x ; назовем его проекцией, если $\alpha = \sigma\varphi\rho$, где φ есть факторизация и σ и ρ есть обратимые.

Подкатегорию K категории K^* назовем полной, если выполнено: если $\alpha: a \to b$ есть морфизм категории K^* и a и b есть объекты K , тогда $\alpha \in K$.
Объекты a, b категории K^* назовем эквивалентные, если существует в K^* обратимый морфизм $\alpha: a \to b$.

Полную подкатегорию K категории K^* , содержащую из каждого класса эквивалентных объектов категории K^* точно один объект, назовем скелетом категории K^* . Категории, имеющие изоморфные скелеты называются коэкстензивные.

Очевидно: Если K есть скелет категории K^*, $\alpha \in K$ есть мономорфизм (или эпиморфизм) категории K , есть α мономорфизм (или эпиморфизм) категории K^* .

Скажем, что класс морфизмов L категории K есть замкнутый по отношению к умножению обратимыми морфизмами, если выполнено: если ρ есть обратимый, $\alpha, \beta \in L$, тогда $\alpha\rho \in L$, $\rho\beta \in L$, когда только эти произведения определены.

Очевидно: Если K есть скелет категории K^*, L^* есть класс морфизмов категории K^* , содержащий все морфизмы, обратимые в K^*, и замкнутый по отношению к умножению этими морфизмами, и если $L = L^* \cap K$, тогда $\alpha \in L^*$ тогда и только тогда если $\alpha = \sigma\rho\tau$, где $\rho \in L$ и σ, τ есть обратимые. Следовательно если K есть скелет категории K^*, I есть класс мономорфизмов и P есть класс эпиморфизмов категории K , оба содержащие все морфизмы обратимые в K и замкнуты по отношению к умножению этими морфизмами, тогда существует ровно один класс I^* мономорфизмов и ровно один класс P^* эпиморфизмов категории K^* , которые содержат все морфизмы обратимые в K^*, замкнуты по отношению к умножению этими морфизмами и $I^* \cap K = I$, $P^* \cap K = P$.

Пусть K^* есть категория, I есть класс мономорфизмов и P есть класс эпиморфизмов категории K^*, оба класса содержат все обратимые морфизмы и замкнуты по отношению к умножению этими морфизмами. Скажем, что K^* есть коэкстензивна с множественной категорией так, что I точно соответствует инъекциям и P проекциям если выполнено: существует множественная категория H^* и изоморфизм φ скелета K категории K^* на скелет H категории H^* так, что $\varphi(K \cap I) = H \cap I^*$, $\varphi(K \cap P) = H \cap P^*$, где I^* есть класс всех инъекций и P^* есть класс всех проекций категории H^*.

<u>Лемма 2</u>: Пусть A есть такой класс непересекающихся множеств, что если $a, b \in A$, $a \neq b$, $c \subset b$, то
1) $c \notin a$ 2) $\{c\} \notin a$.

Тогда для любых разных $a, b \in A$ и $c \subset b$ есть $a \cap c = \phi$, $a\kappa \cap c = \phi$, $aj \cap cj = \phi$, $aj \cap c = \phi$, $a\kappa \cap cj = \phi$, где через $a\kappa$ обозначено любое разбиение множества a и через dj разбиение множества d на одноточечные множества.

<u>Доказательство</u>: Пусть $a, b \in A$, $a \neq b$, $c \subset b$. Из свойства 1) класса A вытекает $a\kappa \cap c = \phi$ и следовательно $aj \cap cj = \phi$; из свойства 2) вытекает $aj \cap c = \phi$, Равенства $a \cap c = \phi$ и $a\kappa \cap cj = \phi$ тривиальны, так как $a \cap b = \phi$.

<u>Лемма 3</u>: Пусть H есть множественная категория такая, что

1) если морфизм α является взаимно однозначным отображением на множество, тогда $\alpha : a \to a$ и α есть обратимый в H;

2) если a, b есть разные объекты H, $c \subset b$, тогда $c \cap a = \emptyset$, $c \notin a$, $\{c\} \notin a$.

Пусть I есть класс взаимно однозначных отображений, P есть класс отображений на множества в категории H, оба класса содержат все обратимые морфизмы и замкнуты по отношению к умножению этими морфизмами.

Тогда существует множественная категория H^* так, что

a) H является скелетом категории H^*

b) морфизм α категории H^* является обратимым в H^* тогда и только тогда, если он есть инъекция и проекция в H^*.

c) $I = I^* \cap H$, $P = P^* \cap H$, где через I^* обозначен класс всех инъекци-й категории H^* и через P^* класс всех ее проекций H^*.

<u>**Доказательство:**</u> Пусть A есть класс объектов категории H. Для $\mu \in I$, $\mu : a \to b$ обозначим через (μ) образ множества a при отображении μ; ясно, что $(\mu) \subset b$ и $\mu \in A$ тогда и только тогда, если μ обратимое в H; обозначим через B класс всех этих (μ) (для $\mu \in I$). Для $\sigma \in P$, $\sigma : a \to b$ обозначим через $[\sigma]$ разбиение множества a, определенное отображением σ; обозначим через C класс всех этих $[\sigma]$ (для $\sigma \in P$). Пусть $D = A \cup B \cup C$. Для $a \in D$ пусть aj обозначаем разбиение множества a на одноточечные множества, пусть $j_a : a \longrightarrow aj$ есть соответствующая факторизация. Пусть D^* есть класс всех aj для $a \in D$. Множественную категорию H^* определим следующим путем: класс ее объектов пусть есть класс $E = \dot{D} \cup D^*$. Морфизмы категории H^* пусть будут именно:

1) все морфизмы категории H;

2) все тождественные отображения на множествах класса E;

3) все отображения j_a (для $a \in D$) и j_a^{-1} ;

4) для всякого $\mu \in I$, $\mu : a \to b$ является морфизмом категории H^* отображение $\bar{\mu} : a \to (\mu)$ такое, что для $x \in a$ есть $x\bar{\mu} = x\mu$, потом отображение $\bar{\mu}^{-1}$ и еще отображение $\mu_\iota : (\mu) \to b$ такое, что для $x \in (\mu)$ есть $x\mu_\iota = x$. Ясно, что если μ есть обратимое, тогда μ_ι есть идентичное и если μ не является обратимым, тогда μ_ι не является отображением на множество. (Хотя еще не знаем все морфизмы категории H^*, можно сказать: μ_ι обратимое в H^* тогда и только тогда, если μ обратимое в H);

5) для всякого $\sigma \in P$, $\sigma : a \to b$ является морфизмом категории H^* факторизация $\sigma_\varphi : a \to [\sigma]$, потом еще отображение $\bar{\sigma} : [\sigma] \to b$ такое, что для $x \in [\sigma]$ есть $x\bar{\sigma} = y\sigma$ для любого $y \in x$ и потом еще отображение $\bar{\sigma}^{-1}$. Ясно опять, что если σ есть обратимое в H , есть $\sigma_\varphi = j_a$ и $\bar{\sigma} = j_a^{-1} \cdot \sigma$ и если σ не является обратимым в H , не является взаимно однозначным и потому σ_φ не является обратимым в H^*. Значит σ_φ явьяется обратимым в H^* тогда и только тогда если σ есть обратимый в H.

6) морфизмами H^* наконец являются все отображения, которые являются произведениями отображений из 1) - 5).

Отображения типа 1) - 5) будем в дальнейшем называть элементарными отображениями.

Покажем теперь, что

если $\alpha : a \to b$ есть морфизм H^*, $a, b \in A$, тогда

$$\alpha \in H \qquad (*).$$

Пусть $\alpha = \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_k$, $\alpha_i : a_i \to a_{i+1}$ $(i = 1,\ldots,k,\ a_1 = a,\ a_{k+1} = b)$, α_i является элементарными отображениями, не идентичными (если α само идентичное, то конечно ($*$) верно) и так что $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}^{-1}$.

Утверждение (ж) доказываем полной индукцией по k :

Для $k=1$ есть (ж) ясно, пусть $k>1$. Если $a_2 \in A$, тогда $\alpha_1 \in H$, $\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_k \in H$ и следовательно $\alpha \in H$. Нетрудно проверить, что для всякого i $(i=1,\ldots,k)$ есть $a_i \notin D^* - D$, так как в противном случае было бы необходимо $1 < i < k, \alpha_{i-1} = j_{a_{i-1}}, \alpha_i = j_{a_{i-1}}^{-1}$. Следовательно, если $a_2 \notin A$, тогда или $a_2 \in B$ или $a_2 \in C$. Если $a_2 \in B$, тогда существует $\mu \in I$ так, что $a_2 = (\mu)$, $\alpha_1 = \bar{\mu}$, $\alpha_2 = \mu_\iota$, следовательно $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \in H$ и можно воспользоваться предположением полной индукции. Если $a_2 \in C$, тогда существует $\sigma \in P$ так, что $a_2 = [\sigma]$, $\alpha_1 = \sigma_\varphi$, $\alpha_2 = \bar{\sigma}$ и опять $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \in H$.

Ясно, что всякий объект H^* эквивалентен какому-нибудь объекту из H. Теперь уже видно, что H является скелетом категории H^*.

Пусть морфизм α категории H^* является одновременно инъекцией и проекцией в H^*; тогда очевидно α является обратимым в H^*. Чтобы показать, что всякий обратимый морфизм в категории H^* является одновременно инъекцией и проекцией достаточно показать, что всякое идентичное отображение есть проекция. Если e_a значит идентичное отображение множества a, тогда для $a \in D$ есть $e_a = e_a \cdot j_a \cdot j_a^{-1}$ и для $a \in D^*, a = bj$ есть $e_a = j_b^{-1} \cdot j_b \cdot e_a$.

Пусть I^* обозначает класс всех инъекций и P^* класс всех проекций в категории H^*. Из конструкции элементарных отображений прямо вытекает, что $I \subset I^* \cap H$, $P \subset P^* \cap H$. Из леммы 2 вытекает: если ι есть инклуссия в H^*, не идентичная, тогда существует $\mu \in I$ так, что $\iota = \mu_\iota$; если φ есть факторизация в H^*, но не на одноточечные множества, тогда существует $\sigma \in P$ так, что $\varphi = \sigma_\varphi$. Если φ есть факторизация на одноточечные множества, тогда φ есть обратимое в H^*. Пусть теперь $\alpha \in I^* \cap H$, $\alpha : a \to b$, покажем, что $\alpha \in I$. Пусть $\alpha = \rho \iota \sigma$, где ι есть инклуссия в H^*, ρ, σ обратимые в H^*. Если ι есть обратимое, тогда α есть также обратимое и следовательно $\alpha \in I$. Если ι не является обратимым, тогда существует $\mu \in I$ так, что $\iota = \mu_\iota$. Но потом $\rho = \tau \bar{\mu}$, следовательно $\alpha = \tau \mu \sigma$, где τ и σ есть обратимые, следовательно $\alpha \in I$. Аналогично для проекции.

Теорема 2: Пусть K есть категорий, объекты скелета которой составляют множество. Пусть I есть класс мономорфизмов и P класс эпиморфизмов категории K так, что

1) оба класса содержат все обратимые морфизмы и замкнуты по отношению к умножению этими морфизмами;
2) $\sigma \cdot \nu \in I, \ \sigma \in P \Longrightarrow \nu \in I$;
3) $\alpha \mu = \sigma \nu, \ \mu \in I, \ \sigma \in P \Longrightarrow \alpha = \sigma \tau$.

Тогда K есть коэкстенсивна с множественной категорией так, что I точно соответствует инъекциям и P проекциям. Можно еще требовать, что в той множественной категории морфизм является обратимым тогда и только тогда, если он одновременно является инъекцией и проекцией.

Доказательство: Скелет $\bar{K}$ категории K с классами $\bar{I} = I \cap \bar{K}$, $\bar{P} = P \cap \bar{K}$ выполняет предпосылки теоремы 1. Потом надо воспользоваться леммой 3.

Заметка: Можно увидеть, что в бикатегории (K, I, P) для классов I и P выполнены условия 1) 2) из теоремы 1 и 1) 2) 3) из теоремы 2. Так мы получим следующие результаты: Если объекты бикатегории (K, I, P) составляют множество, тогда K есть изоморфна с множественной категорией так, что образы морфизмов из I есть взаимно однозначные отображения и образы морфизмов из P есть отображения на множества.

Если объекты скелета бикатегории (K, I, P) составляют множество, тогда K есть коэкстензивна с множественной категорией так что I точно соответствует инъекциям и P проекциям.

II.

В этой части рассматривается понятие подобъекта и дается "категорная характеристика" замкнутого подпространства в категории всех топологических пространств.

Пусть I есть класс мономорфизмов и P класс эпиморфизмов категории K. Обозначим через $\tilde{I}$ класс всех эпиморфизмов α категории K таких, что если $\alpha = \beta \cdot \gamma$, $\gamma \in I$, тогда γ есть обратимый; через $\tilde{P}$ обозначим класс всех мономорфизмов α таких, что если $\alpha = \beta \cdot \gamma$, $\beta \in P$, тогда β есть обраимый. Очевидно, что

a) всякие $\alpha \in I \cap \tilde{I}$, $\beta \in P \cap \tilde{P}$ обратимы;

b) если $\alpha \in \tilde{I}$, $\alpha = \beta \cdot \gamma$, тогда $\gamma \in \tilde{I}$; если $\alpha \in \tilde{P}$, $\alpha = \beta \cdot \gamma$, тогда $\beta \in \tilde{P}$;

c) пусть для всякого $\alpha \in I$, $\alpha = \beta \cdot \gamma$ есть $\beta \in I$; тогда
$$I \subset \approx{I}, \quad \overset{\approx\approx}{I} = \tilde{I};$$
пусть для всякого $\alpha \in P$, $\alpha = \beta \cdot \gamma$ есть $\gamma \in P$; тогда
$$P \subset \overset{\approx}{P}, \quad \overset{\approx\approx}{P} = \tilde{P};$$

d) для всякого I и P есть $\overset{\approx\approx\approx}{I} = \overset{\approx}{I}$, $\overset{\approx\approx\approx}{P} = \overset{\approx}{P}$.

Равенство $I = \overset{\approx}{I}$ не выполнено всегда, хотя и для I выполнено условие из c) и хотя I содержит все обратимые морфизмы и есть замкнутый по отношению к умножению обратимыми морфизмами. Чтобы показать этот факт, достаточно взять категорию K, имеющую четыре разных объекта a, b, c, d и содержащую кроме множества E единичных морфизмов именно еще морфизмы $\alpha: a \to b$ и $\beta: c \to d$. Если взать $I = E \cup \{\alpha\}$, тогда $\tilde{I} = E$, $\tilde{\tilde{I}} = E \cup \{\alpha, \beta\}$. Равенство $I = \tilde{\tilde{I}}$ верно, конечно, во всякой бикатегории (K, I, P) так как в бикатегории тривиально выполнено: $\tilde{I} = P$, $\tilde{P} = I$. Но равенство $I = \tilde{\tilde{I}}$ (или $P = \tilde{\tilde{P}}$) также тривиально выполнено во всякой категории K, если в качестве I (или P) взять класс всех мономорфизмов (или эпиморфизмов) категории K. В таком случае элементы $\tilde{I}$ (или $\tilde{P}$) назовем абстрактными проекциями (или абстрактными инъекциями) и покажем, что также имеют некоторые хорошие свойства.

<u>Предложение 1</u>: Пусть K есть множественная категория.

1. Если в K всякий эпиморфизм является отображением на множество и всякий морфизм α имеет вид $\alpha = \sigma \cdot \iota$, где σ есть эпиморфизм и ι инклуссия, тогда класс всех абстрактных инъекций совпадает с классом всех инъекций.

2. Если в K всякий мономорфизм является взаимно однозначным отображением в множество и всякий морфизм α имеет вид $\alpha = \varphi \cdot \rho$, где φ есть факторизация и ρ есть мономорфизм, тогда класс всех абстрактных проекций совпадает с классом всех проекций.

<u>Доказательство</u>: 1. Если α есть абстрактная инъекция, очевидно, что она есть инъекция. Покажем теперь, что всякая инклуссия ι является абстрактной инъекцией: пусть $\iota = \sigma \cdot \mu$, σ есть эпиморфизм; покажем, что он обратимый. μ имеет вид $\mu = \tau \varepsilon$, где τ есть эпиморфизм, ε есть инклуссия, следовательно $\iota = \sigma \tau \varepsilon$. Пусть $\iota: a \to b$, $\sigma: a \to c$, $\tau: c \to d$, $\varepsilon: d \to b$. Для $x \in a$ есть $x = x\iota = x\sigma\tau\varepsilon = x\sigma\tau$, следовательно $a \subset d$ и $\sigma \cdot \tau$ есть инклуссия. Так как σ и τ являются отображениями на

множества, есть $a = d$, $\tau = \sigma^{-1}$. Если всякая инклуссия явьяется абстрактной инъекцией, тогда уже очевидно, что всякая инъекция является абстрактной инъекцией. 2. В этой части доказательства покажем только, что факторизация является абстрактной проекцией, все остальное очевидно. Пусть φ есть факторизация, $\varphi = \mu \cdot \sigma$, σ есть мономорфизм; покажем, что σ есть обратимый. Пусть $\mu = \pi \cdot \nu$, π есть факторизация, ν есть мономорфизм, $\varphi : a \to b$, $\pi : a \to c$, $\nu : c \to d$, $\sigma : d \to b$. Если для $x \in a$, $y \in a$ есть $x\pi = y\pi$, тогда $x\varphi = y\varphi$. И если наоборот $x\varphi = y\varphi$, тогда $x\pi = y\pi$, так как $\sigma\tau$ есть взаимно однозначное. Следовательно b и c есть то же самое разбиение множества a , $\varphi = \pi$, $\nu \cdot \sigma$ есть тождественное отображение, следовательно $\nu = \sigma^{-1}$.

Обратимся теперь к категории всех топологических пространств. Топологическое пространство можно в дальнейшем понимать в более широком смысле: топологией u на множестве X считаем отображение множества $\exp X$ всех частей множества X в $\exp X$ такое, что $\phi u = \phi$, $M \subset Mu$, $Muu = Mu$ для любого $M \subset X$ x); но все предложения сохраняются, если предполагаем для u также аксиому аддитивности. Заметим еще, что непрерывность отовражения $\alpha : (X, u) \to (Y, v)$ определяем для таких общих пространств принятым условием: $Mu\alpha \subset M\alpha v$ дья всех $M \subset X$.

----

x) Последнюю аксиому о замкнутости замыкания также можно не предполагать. Но тогда надо взать немножко другое определение квоциент-пространства. Если (X, u) есть топологическое ...транство (X есть множество и u есть топология на X), ...азбиение X и $\varphi : X \to Y$ есть факторизация, определяем квоциент-топологию v на Y условием:

для $N \subset Y$ есть $Nv = N\varphi^{-1}u\varphi$.

Пусть $a = (X, u), b = (Y, v)$ есть топологические пространства. Отображение $\iota : a \to b$ называем инклуссией в категории всех топологических пространств если (X, u) является подпространством (Y, v) и для $x \in X$ есть $x\iota = x$. Факторизацией в категории всех топологических пространств называем всякое отображение $\pi : a \to b$ такое, что b является квоциент-пространством пространства a (следовательно Y является разбиением X) и для $x \in X$ есть $x\pi$ множество разбиения Y, содержащее x. Ясно, что в категории всех топологических пространств инъекции совпадают с гомеоморфными отображениями одного пространства в другое и проекции с непрерывными квазикомпактными x) отображениями одного пространства на другое.

Заметим еще, что если (X, u) есть пространство, $x \in X$, можно (X, u) отобразить двумя разными отображениями α, β в "двойточье" xx) так, что для $y \in X$, $y \neq x$ есть $y\alpha = y\beta$. Следовательно в категории всех топологических пространств эпиморфизмы есть точно отображения на пространства.

<u>Предложение 2</u>: В категории всех топологических пространств класс всех абстрактных инъекций совпадает с классом всех инъекций и класс всех абстрактных проекций с классом всех проекций.

<u>Доказательство</u>: аналогично доказательству предложения 1.

<u>Замечание</u>: Предложение 2 не является непосредственным следствием предложения 1. На самом деле не существует

----

x) Отображение f пространства (X, u) на (Y, v) является непрерывным и квазикомпактным если $M \subset Y$ есть замкнутое тогда и только тогда если $f^{-1}(M)$ замкнутое.

xx) Т.е. пространство, которое состоит из двух точек, которые не замкнуты.

изоморфное отображение категории всех топологических пространств на множественную категорию такое, что факторизации в категории всех топологических пространств соответствовали бы точно факторизациям в той множественной категории. Если множества b является разбиением множества a и $c \neq a$, тогда b не является разбиением множества c. Но легко можно найти пространства (P, u_1) и (P, u_2) разные (даже не гомеоморфные, оба метризуемые бикомпактные) и разбиение Q множества P, так что квоциент-пространство то же самое в обоих случаях.

Как известно ([4]), абстрактные инъекции в категории всех Хаусдорфовых T_1-пространств характеризуют гомеоморфные отображения пространства на замкнутое подмножество другого пространства. Дадим здесь теперь характеристику таких отображений в категории всех топологических пространств, хотя она и сложнее. Определим понятие замкнутого подобъекта так, что в категории всех топологических пространств совпадает с понятием замкнутого подпространства.

Для наших рассуждений надо изменить немножко определение подобъекта, которое приведено в [5] : сохраним все так как в [5], только на место пар $[b, \mu]$, где μ любой мономорфизм, берем только пары $[b, \mu]$, где μ есть абстрактная инъекция. Частичное упорядочение подобъектов данного объекта, определенное в [5], будем, как и в [5], обозначать $\leq$. Подобъект, содержащий пару $[b, \mu]$ будем обозначать (b, μ).

Аналогично определяем фактор-объекты при помощи абстрактных проекций и введем аналогичное обозначение.

Пусть V есть свойство объектов категории K такое, что если $\xi : b \longrightarrow a$ обратимый и b имеет свойство V, тогда и a имеет свойство V. В этом случае введем конвенцию: скажем, что подобъект (b, μ) имеет свойство V, если V имеет b.

<u>Определение</u>: Пусть α морфизм категории K, $\alpha: a \to b$, (c, μ) есть подобъект a. Образом (c, μ) при морфизме α назовем всякий подобъект (d, ν) объекта b такой, что

1) $\mu\alpha = \sigma\nu$ где σ есть эпиморфизм;

2) если (d', ν') есть подобъект b такой, что $\mu\alpha = \sigma'\nu'$, где σ' эпиморфизм, тогда $(d', \nu') \subseteq (d, \nu)$.

Именно образом морфизма α назовем образ подобъекта (a, e_a) при морфизме α:

Морфизм $\alpha: a \to b$ назовем морфизмом на b, если (b, e_a) является образом α.

<u>Определение</u>: Пусть α есть морфизм категории K, $\alpha: a \to b$, (d, ν) - подобъект b. Прообразом подобъекта (d, ν) при морфизме α назовем всякий подобъект (c, μ) объекта a такой, что

1) (d, ν) является образом (c, μ) при морфизме α.

2) Если (d, ν) является также образом подобъекта (c', μ') при морфизме α, тогда $(c', \mu') \leq (c, \mu)$.

Тривиальны следующие факты:

a) Образ и прообраз любого подобъекта любого объекта при единичном морфизме есть тот же самый подобъект.

b) Всякий подобъект любого объекта имеет при всяком морфизме не больше одного образа и одного прообраза.

c) Пусть в категории K всякий биморфизм - обратимый и пусть K обладает нулевым объектом. Тогда морфизм α есть нулевой тогда и только тогда, если он имеет нулевой образ.

Определение: Объект a категории K назовем одноточечным, если

1) $H(a,b) \neq \phi$ для всякого объекта b ;

2) $H(b,a)$ есть одноточечное множество для всякого объекта b .

Очевидны или легко проверить следующие факты:

a) Объект a является нулевым объектом категории K тогда и только тогда, если он является одноточечным объектом категории K и категории $\tilde{K}$ дуальной к K .

b) Одноточечные объекты категории K составляют класс эквивалентных объектов.

c) Если в категории K существует одноточечный объект, тогда данный объект a есть одноточечный тогда и только тогда, если множество $H(a,a)$ есть одноточечное.

d) Образ одноточечного объекта при любом морфизме есть одноточечный (если он существует).

e) Если $\alpha : a \longrightarrow b$ мономорфизм и b - одноточечный объект, тогда a также одноточечных объект и α обратимый. Именно подобъект одноточечного объекта есть одноточечный.

f) Если $\alpha : a \longrightarrow b$, (c, μ) подобъект a, (d, ν) одноточечный подобъект b, $\mu \alpha = \sigma \nu$, где σ эпиморфизм, тогда (d, ν) является образом (c, μ) при морфизме α .

Определение: Объект a категории K назовем свободным, если он удовлетворяет условию: если $\alpha : c \longrightarrow b$ морфизм на b, $\beta : a \longrightarrow b$, существует морфизм $\sigma : a \longrightarrow c$ так, что $\beta = \sigma \cdot \alpha$. Объект a категории K назовем конечным, если множество $H(a,a)$ - конечное.

Объект a категории K назовем основным, если всякий его конечный подобъект есть свободный.

Замечание: В [6] показано, что в категории всех абелевых групп свободные объекты совпадают с свободными абелевыми группами и написано, что в категории всех групп с свободными неабелевыми группами. Легко проверить, что в категории всех топологических пространств свободные объекты как раз дискретные T_1-пространства. Конечные объекты, очевидно, совпадают в категории всех групп с конечными группами, в категории всех топологических пространств с конечными пространствами и в категории всех непустых множеств с конечными множествами. Видно уже, что

в категории всех ненулевых множеств всякий объект основной, в категории всех групп основные объекты совпадают с группами без кручения и в категории всех топологических пространств - это именно T_1-пространства.

Определение: Подобъект (c, μ) объекта a в категории K назовем сильно замкнутым, если существует морфизм α объекта a в основной объект b так, что (c, μ) при этом морфизме является прообразом одноточечного подобъекта b. Подобъект (c, μ) объекта a в категории K назовем замкнутым, если существует абстрактная проекция $\nu : b \rightarrow a$, при которой (c, μ) имеет сильно замкнутый прообраз.

Ясно, что сильно замкнутый подобъект является замкнутым.

Предложение 3: Пусть (c, μ) есть подобъект объекта a в категории всех групп. Следующие свойства эквивалентны:

(a) (c, μ) есть сильно замкнутый.

(b) (c, μ) замкнутый.

(c) μ является изоморфным отображением группы c на нормальный делитель b группы a такой, что факторгруппа a/b является группой без кручения.

Доказательство: $(c) \Rightarrow (a)$ и $(a) \Rightarrow (b)$ очевидны, покажем $(b) \Rightarrow (c)$: Обозначим через b подгруппу группы a, изоморфную с c. Если (c, u) замкнутый, тогда существуют группы $m \subset n \subset g$ так что $g/m \simeq a$, $n/m \simeq b$ ($\simeq$ значит изоморфизм групп) и g/n является группой без кручения. Но $g/n \simeq {}^{g/m}/_{n/m} \simeq a/b$.

Предложение 2: Подобъект (c, u) объекта a в категории всех топологических пространств сильно замкнутый тогда и только тогда, если u гомеоморфное отображение пространства c на замкнутое подпространство b пространства a такое, что для всякой точки x пространства a, не лежащей в b существует замкнутое множество, содержащее x и не пересекающее b.

Доказательство: Если (c, u) сильно замкнутый, очевидно, что u удовлетворяет предложению. Пусть u - гомеоморфное отображение пространства c на замкнутое множество b пространства a со свойствами из предложения. Найдем непрерывное отображение пространства a на T_1-пространство так, чтобы b был прообразом одноточечного множества. Для всякой точки $x \in a$ обозначим через $\bar{x}$ наименьшее замкнутое множество, содержащее x и определим:

$x \sim y$ если или : $x \in b$ и также $y \in b$

или : $x \in \bar{y}$ или $y \in \bar{x}$

Эквивалентность $\sim$ очевидно определяет замкнутое разбиение пространства a, отображение a на соответствующее квоциент-пространство имеет требуемые свойства.

Предложение 3: Подобъект (c, u) объекта a в категории всех топологических пространств замкнутый тогда и только тогдам если u есть гомеоморфное отображение пространства на замкнутое подмножество пространства a .

Доказательство: Обозначим через b образ пространства c при отображении μ . Если (c, μ) замкнутый, тогда существует квазикомпактное отображение на пространство a такое, что прообраз b в этом отображении замкнутый; следовательно b замкнутое в a .

Пусть наоборот b замкнутое. Достаточно найти T_1-пространство d и непрерывное квазикомпактное отображение d на a . Пусть n - бесконечное множество; на множестве $d = a \times n$ определим топологию так, что окрестностям точки $[x, y] \in a \times n$ являются все множества $h \subset a \times n$ для которых $[x, y] \in h$ и для которых существует окрестность u точки x в пространстве a так, что если $k \subset u$ конечная, то $(k \times n) - h$ также конечная. Ясно, что d является T_1-пространством и отображение $\pi : d \to a$, определенное $[x, y]\pi = x$, непрерывное и квазикомапктное.

Приложение:

A.

Доказательство ассоциативности умножения $\oplus$ в категории K^1, конструированной в доказательстве леммы 1 :

I. Сначала покажем:

для элементов H верно: $\alpha \oplus [\beta \oplus \gamma] = [\alpha \oplus \beta] \oplus \gamma$ (ж)

Если некоторый морфизм единичный, тогда (ж) очевидно.

Пусть α, β, γ все не единичные.

a) Пусть $\gamma \notin K$, тогда $\beta \oplus \gamma = (\beta, \gamma)$ и (ж) вытекает из определения умножения $\oplus$.

b) Пусть $\gamma \in K$, $\beta \notin K$, тогда $\alpha \oplus \beta = (\alpha, \beta)$. Если $\beta \oplus \gamma = (\beta, \gamma)$, можно (ж) доказать тем же самым путем как в a). Если $\beta \oplus \gamma = \mu \in K$, тогда $(\alpha, \beta) \oplus \gamma = \alpha \oplus [\beta \oplus \gamma]$.

c) Пусть $\gamma \in K, \beta \in K, \alpha = \mu/\nu$. Если β не имеет вид $\beta = \nu \cdot \tau$, тогда $\alpha \oplus \beta = (\alpha, \beta)$ и можно (ж) доказать как в случае b). Если $\beta = \nu \cdot \tau$, тогда $[\alpha \oplus \beta] \oplus \gamma = [\mu \cdot \sigma] \oplus \gamma = \mu \cdot \sigma \cdot \gamma, \alpha \oplus [\beta \oplus \gamma] = \mu/\nu \oplus [\nu \cdot \sigma \cdot \gamma] = \mu \cdot \sigma \cdot \gamma$.

d) Для $\alpha \in K$, $\beta \in K \gamma \in K$ (ж) тривиально.

Очевидно, что для $(\alpha_1, .., \alpha_k) \in M$ есть
$(\alpha_1, .., \alpha_k) = [\ldots [[\alpha_1 \oplus \alpha_2] \oplus \alpha_3] \oplus \cdots] \oplus \alpha_k$.

II. Доказываем полной индукцией по k :

Для $(\alpha_1, .., \alpha_k) \in M, \beta \in H, \gamma \in H$ есть

$$(\alpha_1, .., \alpha_k) \oplus [\beta \oplus \gamma] = [(\alpha_1, .., \alpha_k) \oplus \beta] \oplus \gamma \qquad (жж)$$

Если β или γ есть единичный морфизм, тогда (жж) очевидно. Пусть они не являются единичными. Для $k = 1$ есть (жж) результат (ж).

a) Если $\beta \oplus \gamma = (\beta, \gamma)$, тогда (жж) вытекает из определения умножения $\oplus$.

b) Если $\beta \oplus \gamma = \mu \in K$, возможны два случая:

1) Если $\alpha_k \oplus \beta = (\alpha_k, \beta)$, тогда $(\alpha_1,..,\alpha_k)\oplus\beta = (\alpha_1,..,\alpha_k, \beta)$, следовательно $[(\alpha_1,..,\alpha_k)\oplus\beta]\oplus\gamma = (\alpha_1,..,\alpha_k)\oplus[\beta\oplus\gamma]$ по определению умножения $\oplus$.

2) Если $\alpha_k \oplus\beta = \rho\in K$, тогда $(\alpha_1,..,\alpha_k)\oplus[\beta\oplus\gamma] =$
$= (\alpha_1,..,\alpha_k)\oplus\mu = [(\alpha_1,..,\alpha_{k-1})\oplus\alpha_k]\oplus\mu = (\alpha_1,..,\alpha_{k-1})\oplus$
$\oplus[\alpha_k\oplus\mu] = (\alpha_1,..,\alpha_{k-1})\oplus[\alpha_k\oplus[\beta\oplus\gamma]] = (\alpha_1,..,\alpha_{k-1})\oplus$
$\oplus[\rho\oplus\gamma] = [(\alpha_1,..,\alpha_{k-1})\oplus\rho]\oplus\gamma = [(\alpha_1,..,\alpha_{k-1})\oplus[\alpha_k\oplus\beta]]\oplus$
$\oplus\gamma = [(\alpha_1,..,\alpha_k)\oplus\beta]\oplus\gamma$.

III. Доказываем полной индукцией по l утверждение:

для $(\alpha_1,..,\alpha_k)\in M$, $(\beta_1,..,\beta_l)\in M$, $\gamma\in H$ есть

$(\alpha_1,..,\alpha_k)\oplus[(\beta_1,..,\beta_l)\oplus\gamma] = [(\alpha_1,..,\alpha_k)\oplus(\beta_1,..,\beta_l)]\oplus\gamma$ (жжж)

Если γ есть единичный морфизм, тогда (жжж) ясно.

Пусть γ не является единичным.

Для $l = 1$ (жжж) вытекает из (жж), проверим l-той шаг:

a) Если $\beta_l\oplus\gamma = (\beta_l, \gamma)$, тогда $[(\alpha_1,..,\alpha_k)\oplus(\beta_1,..,\beta_l)]\oplus$
$\oplus\gamma = [[\cdots[[(\alpha_1,..,\alpha_k)\oplus\beta_1]\oplus\cdots]\oplus\beta_l]\oplus\gamma$ и
$(\alpha_1,..,\alpha_k)\oplus[(\beta_1,..,\beta_l)\oplus\gamma] = (\alpha_1,..,\alpha_k)\oplus(\beta_1,..,\beta_l,\gamma) =$
$= [[\ldots[[(\alpha_1,..,\alpha_k)\oplus\beta_1]\oplus\beta_2]\oplus\ldots]\oplus\beta_l]\oplus\gamma$.

b) Если $\beta_l\oplus\gamma = \mu\in K$, тогда $(\alpha_1,..,\alpha_k)\oplus[(\beta_1,..,\beta_l)\oplus\gamma] =$
$= (\alpha_1,..,\alpha_k)\oplus[(\beta_1,..,\beta_{l-1})\oplus\mu] = [(\alpha_1,..,\alpha_k)\oplus$
$\oplus(\beta_1,..,\beta_{l-1})]\oplus\mu = [[(\alpha_1,..,\alpha_k)\oplus(\beta_1,..,\beta_{l-1})]\oplus$
$\oplus\beta_l]\oplus\gamma = [(\alpha_1,..,\alpha_k)\oplus(\beta_1,..,\beta_l)]\oplus\gamma$.

IV. Доказываем полной индукцией по m равенство:
$(\alpha_1,..,\alpha_k)\oplus[(\beta_1,..,\beta_l)\oplus(\gamma_1,..,\gamma_m)] = [(\alpha_1,..,\alpha_k)\oplus(\beta_1,..,\beta_l)]\oplus$
$\oplus(\gamma_1,..,\gamma_m)$.
Достаточно проверить только
$[(\alpha_1,..,\alpha_k)\oplus(\beta_1,..,\beta_l)]\oplus(\gamma_1,..,\gamma_m) = [[(\alpha_1,..,\alpha_k)\oplus(\beta_1,..,\beta_l)]\oplus$
$\oplus\gamma_1]\oplus(\gamma_2,..,\gamma_m) = [(\alpha_1,..,\alpha_k)\oplus[(\beta_1,..,\beta_l)\oplus\gamma_1]]\oplus$
$\oplus(\gamma_2,..,\gamma_m) = (\alpha_1,..,\alpha_k)\oplus[[(\beta_1,..,\beta_l)\oplus\gamma_1]\oplus(\gamma_2,..,\gamma_m)] =$
$= (\alpha_1,..,\alpha_k)\oplus[(\beta_1,..,\beta_l)\oplus(\gamma_1,..,\gamma_l)]$.

B. Свойство d) из теоремы 1 очевидно, если мы возьмем понятие множества в наивном смысле и морфизмы являются объектами исследования другого рода, чем множества. С точки зрения [2] (и в таком случае надо модифицировать доказательство леммы 1, где мы говорим о множестве символов и т.д.) вытекает свойство d) из следующего утверждения: Пусть K есть категория. Тогда существует изоморфное отображение φ категории K на категорию H, имеющую тот же самый класс объектов и такую, что если C есть множество морфизмов H, тогда ни C ни $\{C\}$ не являются морфизмами H.

Чтобы это утверждение доказать, достаточно для морфизма α категории K положить $\alpha\varphi = \{\{\alpha\}, \{\{\alpha\}\}\}$. Всякий морфизм из H имеет точно два элемента. Следовательно никакое множество вида $\{C\}$ не может быть морфизмом H. Для никакого морфизма α категории K множество $\alpha\varphi$ не может быть множеством морфизмов категории H так как элементом $\alpha\varphi$ есть одноточечный элемент $\{\alpha\}$.

Литература:

[1] S. EILENBERG, S. MAC LANE, General theory of natural equivalences, Trans. Amer. Math. Soc., 58 (1945), 231 - 294.

[2] K. GOEDEL, The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with axioms of set theory, Princeton, 1940, Annals of Mathematics Studies No 3.

[3] J.R. ISBELL, Categories and subspaces, Canad. J. Math. 9 (1957), 563 - 577.

[4] J.R. ISBELL, Algebras of uniformly continuous functions, Ann. of Math., 68 (1958), 96 - 125.

[5] А.Г. КУРОШ, А.Х. ЛИВШИЦ, Е.Г. ШУЛЬГЕЙФЕР, Основы теории категорий, Успехи мат. наук 15 вып. 6 (96) (1960), 3 - 58.

[6] S. MAC LANE, Duality for groups, Bull. Amer. Math. Soc., 56 (1950), 485 - 516.