František Nožička

Elementareigenschaften der Weltlinien und gleichförmig beschleunigte Bewegung in der Minkowskischen Mechanik

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 3 (1962), No. 2, 3--31

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104909

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

3, 2 (1962)

ELEMENTAREIGENSCHAFTEN DER WELTLINIEN UND GLEICHFÖRMIG BE - SCHLEUNIGTE BEWEGUNG IN DER MINKOWSKISCHEN MECHANIK

František NOŽIČKA, Praha

1. Einige Eigenschaften der Weltlinien

Im gegebenen Lorentzschen Raum-Zeitsystem (x, y, z, t) sei die Bewegung eines Massenpunktes von Ruhmasse μ durch die Gleichungen

(1,1) $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\quad t \in (-\infty, \infty)$

beschrieben. Dabei wird vorausgesetzt:

(a) die Funktionen $x(t), y(t), z(t)$ sind reelle Funktionen des reellen Parameters t ("Zeit"), welche im Interval $(-\infty, \infty)$ stetige Ableitungen wenigstens vom Range fünf besitzen;

(b) für jedes $t \in (-\infty, \infty)$ ist

$|V| \equiv \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} < C$ (C... Lichtgeschwindigkeit)

Die skalare Funktion

(1,2) $$\tau = \tau(t) = \int_0^t \sqrt{1 - \frac{|V|^2}{c^2}}\, dt$$

wird als "Eigenzeit" des betreffenden Massenpunktes M bezeichnet. Im Bezug auf die Voraussetzung (b) existiert zu der Funktion $\tau(t)$ inverse Funktion $t = (\tau)$ (d.h. man kann die Gleichung (1,2) ekvivalent in der Form $t = t(\tau)$ schreiben). Führen wir in die Gleichungen (1,1) den Parameter τ ein, dann entspricht der Bewegungskurve (1,1 in dem Minkowskischen (linearen) vierdimensionalen Raum $\mathfrak{M}$ die Weltlinie mit der Beschreibung

(1,3) $x = x(\tau),\ y = y(\tau),\ z = z(\tau),\ t = t(\tau),$

wo x, y, z, t die Koordinaten der Punkte in $\mathfrak{M}$ sind.

Im Sinne der in der Tensorrechnung üblichen Symbolik führen wir die Bezeichnung

$$x^1 = x,\quad x^2 = y,\quad x^3 = z,\quad x^4 = t$$

ein. Im ganzen Texte dieser Arbeit laufen die griechischen Indizes die Menge 1,2,3,4, die lateinischen Indizes die Menge 1,2,3 durch. Das Symbol x^α bedeutet dann die Koordinaten des Punktes $x \in \mathfrak{M}$, y^α die Koordinaten des Punktes $y \in \mathfrak{M}$ u.s.w. Vektor- und Tensorgrössen werden wir direkt durch ihre Komponenten ausdrücken, d.h. wir werden sagen "der Vektor v^α " anstatt "der Vektor mit den Komponenten v^α " oder "der Tensor $g_{\alpha\beta}$ " anstatt "der Tensor mit den Koordinaten $g_{\alpha\beta}$ ". Dabei werden wir immer die in der Tensorrechnung übliche Einsteinsche Summation (Einsteinsche Konvention) benützen.

Die indefinite Metrik des Raumes $\mathfrak{M}$ ist vollkommen durch den Tensor $g_{\alpha\beta}$ beschrieben, wo

(1,4) $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1,\ g_{44} = -c^2,\ g_{\alpha\beta} = 0$ für $\alpha \neq \beta$ ist.

In den Punkten der Weltlinie (1,3), derer Beschreibung man nun kürzer auf die Form

(1,5) $$x^\alpha = x^\alpha(\tau)$$

bringen kann, gelten dann - unter oben angegebenen Voraussetzungen (a), (b) - die folgenden Gleichungen:

$$\frac{d}{d\tau}\overset{\cdot}{\underset{1}{i}}{}^\alpha = \frac{P}{\mu}\overset{\cdot}{\underset{2}{i}}{}^\alpha,$$

(1,6) $$\frac{d}{d\tau}\overset{\cdot}{\underset{2}{i}}{}^\alpha = \frac{P}{\mu c^2}\overset{\cdot}{\underset{1}{i}}{}^\alpha + \frac{Q}{\mu c}\overset{\cdot}{\underset{3}{i}}{}^\alpha,$$

$$\frac{d}{d\tau}\underset{3}{\dot{i}}^{\alpha} = -\frac{Q}{\mu c}\underset{2}{\dot{i}}^{\alpha} + \frac{R}{\mu c}\underset{4}{\dot{i}}^{\alpha},$$

$$\frac{d}{d\tau}\underset{4}{\dot{i}}^{\alpha} = -\frac{R}{\mu c}\underset{3}{\dot{i}}^{\alpha};$$

die Grössen $\underset{\varkappa}{\dot{i}}^{\alpha}$ ($\varkappa$ = 1,2,3,4) sind Vektoren entlang der gegebenen Weltlinie (1,5), welche ortogonal und normiert im Sinne der Minkowskischen Metrik sind, d.h.

$$g_{\alpha\beta}\underset{1}{\dot{i}}^{\alpha}\underset{1}{\dot{i}}^{\beta} = -c^2,\quad g_{\alpha\beta}\underset{2}{\dot{i}}^{\alpha}\underset{2}{\dot{i}}^{\beta} = g_{\alpha\beta}\underset{3}{\dot{i}}^{\alpha}\underset{3}{\dot{i}}^{\beta} = g_{\alpha\beta}\underset{4}{\dot{i}}^{\alpha}\underset{4}{\dot{i}}^{\beta} = 1,$$

(1,7)

$$g_{\alpha\beta}\underset{\varkappa}{\dot{i}}^{\alpha}\underset{\sigma}{\dot{i}}^{\beta} = 0 \qquad \text{für } \varkappa \neq \sigma \ (\varkappa,\sigma = 1,2,3,4)$$

Dabei ist $\underset{1}{\dot{i}}^{\alpha} = \frac{dx^{\alpha}}{d\tau}$ und der Vektor $\underset{2}{\dot{i}}^{\alpha}$ hat die Richtung des Vektors $\mu\frac{d^2x^{\alpha}}{d\tau^2}$, d.h. des Vektors der Minkowskischen Kraft. Die Grössen P, Q, R, die in den Gleichungen (1,6) auftreten, sind nichtnegative Skalare in Punkten der Weltlinie (1,5), die invariant gegenüber den sämtlichen Lorentztransformationen sind. Diese Skalare werden in denselben Masseinheiten wie die Kraft ausgedrückt und es gilt für sie:

$$P = \mu\left(g_{\alpha\beta}\frac{d^2x^{\alpha}}{d\tau^2}\frac{d^2x^{\beta}}{d\tau^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

(1,8)a

$$Q = \frac{\mu^3 c}{P^2}\left[\begin{vmatrix}\dot{x}^1 & \dot{x}^2 & \dot{x}^4\\ \ddot{x}^1 & \ddot{x}^2 & \ddot{x}^4\\ \dddot{x}^1 & \dddot{x}^2 & \dddot{x}^4\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}\dot{x}^2 & \dot{x}^3 & \dot{x}^4\\ \ddot{x}^2 & \ddot{x}^3 & \ddot{x}^4\\ \dddot{x}^2 & \dddot{x}^3 & \dddot{x}^4\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}\dot{x}^1 & \dot{x}^3 & \dot{x}^4\\ \ddot{x}^1 & \ddot{x}^3 & \ddot{x}^4\\ \dddot{x}^1 & \dddot{x}^3 & \dddot{x}^4\end{vmatrix}^2 - \right.$$

(1,8)b

$$\left. -\frac{1}{c^2}\begin{vmatrix}\dot{x}^1 & \dot{x}^2 & \dot{x}^3\\ \ddot{x}^1 & \ddot{x}^2 & \ddot{x}^3\\ \dddot{x}^1 & \dddot{x}^2 & \dddot{x}^3\end{vmatrix}^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad \text{für } P \neq 0,\quad Q = 0 \quad \text{für } P = 0,$$

(1,8)$_c$

$$R=\frac{u^6 c^3 \vartheta}{Q^2 P^3}\begin{vmatrix} \dot{x}^1 & \dot{x}^2 & \dot{x}^3 & \dot{x}^4 \\ \ddot{x}^1 & \ddot{x}^2 & \ddot{x}^3 & \ddot{x}^4 \\ \dddot{x}^1 & \dddot{x}^2 & \dddot{x}^3 & \dddot{x}^4 \\ \ddddot{x}^1 & \ddddot{x}^2 & \ddddot{x}^3 & \ddddot{x}^4 \end{vmatrix} \quad \text{für } Q \neq 0, \; R = 0 \text{ für } Q = 0$$

(ϑ ... Signum der Determinante rechts,

$\dot{x}^\alpha = \frac{d x^\alpha}{d\tau}$, $\ddot{x}^\alpha = \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2}$ u.s.w.)

Die Gleichungen (1,6), die man als "Frenetsche Formeln" der Weltlinie in dem Minkowskischen Raum ansehen kann, wurden in einer früheren Arbeit des Verfassers abgeleitet [1]. In dieser früheren Arbeit wurden auch die folgenden Resultate bewiesen:

I) Wenn $P = 0$ entlang der gegebenen Weltlinie ist, dann existiert ein derartiges Inertialsystem, in welchem der Massenpunkt im Zustand der Ruhe ist.

II) Wenn $Q = 0$ entlang der gegebenen Weltlinie und P nicht identisch gleich Null ist, dann existiert ein derartiges Inertialsystem, in dem sich der Massenpunkt geradlinig aber nicht gleichförmig bewegt.

III) Wenn $R = 0$ entlang der gegebenen Weltlinie und Q nicht identisch gleich Null ist, dann existiert ein derartiges Inertialsystem, in welchem sich der Massenpunkt in einer ebenen - von einer gerade verschiedenen - Kurve bewegt.

Unser erstes Ziel in dieser vorliegenden Arbeit ist der Beweis einiger charakteristischen Eigenschaften der Weltlinie,

---

[1] Diese Arbeit ist bisher im Druck. Sie wird am Ende des 1962 in der Tschechoslowakischen mathematischen Zeitschrift (Czechoslovak Mathematical Journal) veröffentlicht. Auszug aus dieser Arbeit im Sonderdruck der Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Band 41, Sonderheft-GAMM-Tagung Würzburg 1961.

die in erster Reihe als Folge des oben angegebenen Postulats (b) sind. Zu diesem Zwecke führen wir folgende Mengen ein (bei fest gewähltem Punkte $\xi \in \mathfrak{M}$):

$K_\xi = E[x \in \mathfrak{M};\ g_{\alpha\beta}(x^\alpha - \xi^\alpha)(x^\beta - \xi^\beta) = 0]$ ... Isotropischer Doppelkegel mit der Mitte in ξ.

$K_\xi^{ext} = E[x \in \mathfrak{M};\ g_{\alpha\beta}(x^\alpha - \xi^\alpha)(x^\beta - \xi^\beta) > 0]$ ... Aussenraum des Doppelkegels K_ξ.

$K_\xi^{int} = E[x \in \mathfrak{M};\ g_{\alpha\beta}(x^\alpha - \xi^\alpha)(x^\beta - \xi^\beta) < 0]$ ... Innenraum

(1,9) des Doppelkegels K_ξ.

${}^+K_\xi = E[x \in K_\xi;\ x^4 \geqq \xi^4]$ ... Positiver isotropischer Kegel im Punkte ξ.

${}^-K_\xi = E[x \in K_\xi;\ x^4 \leqq \xi^4]$ ... Negativer isotropischer Kegel im Punkte ξ.

${}^+K_\xi^{int} = E[x \in K_\xi^{int};\ x^4 > \xi^4]$ ... Innenraum des Kegels ${}^+K_\xi$.

${}^-K^{int} = E[x \in K_\xi^{int};\ x^4 < \xi^4]$ ... Innenraum des Kegels ${}^-K_\xi$.

<u>Hilfssatz 1.</u> Sei ξ ein beliebiger Punkt der Weltlinie (1,5). Dann gilt für jeden Punkt x dieser Weltlinie,

$$x \neq \xi : x \in K_\xi^{int}$$

Beweis: Es seien τ_0, τ_1 die Werte des Parameters τ, die den Punkten ξ, x der gegebenen Weltlinie entsprechen (in angegebener Anordnung). Unserer Bezeichnung nach sind also $x^\alpha(\tau_0)$ die Koordinaten von ξ, $x^\alpha(\tau_1)$

die Koordinaten von x. Bilden wir nun den Ausdruck

$$(1,10) \quad A = g_{\alpha\beta}\,(x^{\alpha}(\underset{1}{\tau}) - x^{\alpha}(\underset{0}{\tau}))\,(x^{\beta}(\underset{1}{\tau}) - x^{\beta}(\underset{0}{\tau}))\,.$$

Kehren wir zu dem ursprünglichen Parameter t zurück, dann lässt sich, laut (1,1), (1,4), der Ausdruck A aus (1,10) folgendermassen umschreiben:

$$(1,11) \quad A = \delta_{ik}\,(x^{i}(\underset{1}{t}) - x^{i}(\underset{0}{t}))\,(x^{k}(\underset{1}{t}) - x^{k}(\underset{0}{t})) - c^{2}(\underset{1}{t} - \underset{0}{t})^{2}\,,$$

wo δ_{ik} das bekannte Kroneckersche Delta ist,

$\underset{1}{t} = t\,(\underset{1}{\tau})$, $\underset{0}{t} = t\,(\underset{0}{\tau})$ im Sinne der ein-eindeutigen Zuordnung (1,2). Aus dem Postulat (b) für die Kurve (1,1) folgt:

$$(1,12)_a \quad \left| \int_{\underset{0}{t}}^{\underset{1}{t}} \sqrt{\delta_{ik}\,\frac{dx^{i}}{dt}\,\frac{dx^{k}}{dt}}\,dt \right| \leqq \sup_{t\in\langle \underset{0}{t},\underset{1}{t}\rangle} |V| \cdot |\underset{1}{t} - \underset{0}{t}| < c\,|\underset{1}{t} - \underset{0}{t}|\,.$$

Von dem geometrischen Standpunkt aus ist die Geltung der Ungleichung

$$(1,12)_b \quad \delta_{ik}\,(x^{i}(\underset{1}{t}) - x^{i}(\underset{0}{t}))\,(x^{k}(\underset{1}{t}) - x^{k}(\underset{0}{t})) \leqq \left| \int_{\underset{0}{t}}^{\underset{1}{t}} \sqrt{\delta_{ik}\,\frac{dx^{i}}{dt}\,\frac{dx^{k}}{dt}}\,dt \right|^{2}.$$

Aus $(1,12)_{a,b}$ folgt unmittelbar:

$$\delta_{ik}\,(x^{i}(\underset{1}{t}) - x^{i}(\underset{0}{t}))\,(x^{k}(\underset{1}{t}) - x^{k}(\underset{0}{t})) < c^{2}(\underset{1}{t} - \underset{0}{t})^{2}\,.$$

Daraus und aus (1,10), (1,11) ergibt sich

$$g_{\alpha\beta}\,(x^{\alpha}(\underset{1}{\tau}) - x^{\alpha}(\underset{0}{\tau}))\,(x^{\beta}(\underset{1}{\tau}) - x^{\beta}(\underset{0}{\tau})) < 0\,.$$

Im Sinne der in (1,9) angeführten Symbolik bedeutet diese Ungleichung, dass der Punkt x mit den Koordinaten $x^{\alpha}(\underset{1}{\tau})$ der Menge K_{ξ}^{int} angehört.

<u>Bemerkung 1</u>. Die geometrische Bedeutung des Hilfssatzes 1 ist klar. Die Weltlinie liegt im Innen jedes isotropischen Doppelkegels, dessen Mitte der Weltlinie angehört (wenn wir zu diesem Innenteil den Gipfel des Doppelkegels beirechnen).

Hilfssatz 2. Seien $\underset{1}{\xi}$, $\underset{2}{\xi}$ zwei verschiedene Punkte der Weltlinie (1,5). Dann gilt:

$$^{+}K_{\underset{1}{\xi}} \cap {}^{+}K_{\underset{2}{\xi}} = \emptyset , \qquad ^{-}K_{\underset{1}{\xi}} \cap {}^{-}K_{\underset{2}{\xi}} = \emptyset .$$

Beweis: Denken wir uns die gegebene Weltlinie mittels der ursprünglichen Gleichungen (1,1) beschrieben. Es seien $\underset{1}{t}$, $\underset{2}{t}$ die Werte des Parameters t, die (in angeführter Anordnung) den Punkten $\underset{1}{\xi}$, $\underset{2}{\xi}$ entsprechen. Aus der Voraussetzung $\underset{1}{\xi} \neq \underset{2}{\xi}$ geht hervor, dass $\underset{1}{t} \neq \underset{2}{t}$ ist. Setzen wir voraus, dass $\underset{2}{t} > \underset{1}{t}$ ist. Wenn wir anderseits aus der Beschreibung (1,5) der gegebenen Weltlinie ausgehen und wenn wir mit

$\underset{1}{\xi}^{\alpha} = x^{\alpha}(\underset{1}{\tau}), \underset{2}{\xi}^{\alpha} = x^{\alpha}(\underset{2}{\tau})$ die Koordinaten der Punkte $\underset{1}{\xi}$, $\underset{2}{\xi}$ bezeichnen, dann folgt aus unserer Voraussetzung, dass $\underset{2}{\xi}^{4} > \underset{1}{\xi}^{4}$ ist. Dem Hilfssatze 1 nach gilt gleichzeitig: $\underset{2}{\xi} \in K^{int}_{\underset{1}{\xi}}$.

Es ist also

$$(1,13) \qquad g_{\alpha\beta}(\underset{2}{\xi}^{\alpha} - \underset{1}{\xi}^{\alpha})(\underset{2}{\xi}^{\beta} - \underset{1}{\xi}^{\beta}) < 0, \quad \underset{2}{\xi}^{4} > \underset{1}{\xi}^{4} .$$

Aus der Definition der Menge K^{int}_{ξ} in (1,9) folgt, dass der Gipfel $\underset{2}{\xi}$ des Kegels $^{+}K_{\underset{2}{\xi}}$ dem Innenraum des Kegels $^{+}K_{\underset{1}{\xi}}$ angehört, d.h. $\underset{2}{\xi} \in {}^{+}K^{int}_{\underset{1}{\xi}}$.

Sei nun $\bar{x}$ mit den Koordinaten $\bar{x}^{\alpha}$ ein beliebiger Punkt des Kegels $^{+}K_{\underset{2}{\xi}}$, $\bar{x} \neq \xi$. Dann ist

$$(1,14) \qquad g_{\alpha\beta}(\bar{x}^{\alpha} - \underset{2}{\xi}^{\alpha})(\bar{x}^{\beta} - \underset{2}{\xi}^{\beta}) = 0, \quad \bar{x}^{4} > \underset{2}{\xi}^{4} .$$

Wir definieren weiter die Zahl λ folgendermassen:

$$(1,15)_a \qquad \lambda(\underset{2}{\xi}^{4} - \underset{1}{\xi}^{4}) + \bar{x}^{4} - \underset{2}{\xi}^{4} = 0,$$

d.h.

$$(1,15)_b \quad \Lambda = - \frac{\bar{x}^4 - \underset{2}{\xi}^4}{\underset{2}{\xi}^4 - \underset{1}{\xi}^4} < 0$$

(laut (1,13), (1,14)). Aus (1,14), $(1,15)_a$ ergibt sich dann

$$0 \leq \delta_{ik} [\Lambda (\underset{2}{\xi}^i - \underset{1}{\xi}^i) + (\bar{x}^i - \underset{2}{\xi}^i)] [\Lambda (\underset{2}{\xi}^k - \underset{1}{\xi}^k) + (\bar{x}^k - \underset{2}{\xi}^k)] =$$

$$= g_{\alpha\beta} [\Lambda (\underset{2}{\xi}^\alpha - \underset{1}{\xi}^\alpha) + (\bar{x}^\alpha - \underset{2}{\xi}^\alpha)] [\Lambda (\underset{2}{\xi}^\beta - \underset{1}{\xi}^\beta) + (\bar{x}^\beta - \underset{2}{\xi}^\beta)] =$$

$$= \Lambda^2 g_{\alpha\beta} (\underset{2}{\xi}^\alpha - \underset{1}{\xi}^\alpha)(\underset{2}{\xi}^\beta - \underset{1}{\xi}^\beta) + 2 \Lambda g_{\alpha\beta} (\underset{2}{\xi}^\alpha - \underset{1}{\xi}^\alpha)(\bar{x}^\beta - \underset{2}{\xi}^\beta) .$$

Daraus folgt

$$2 \Lambda g_{\alpha\beta} (\bar{x}^\alpha - \underset{2}{\xi}^\alpha)(\underset{2}{\xi}^\beta - \underset{1}{\xi}^\beta) \geq -\Lambda^2 g_{\alpha\beta} (\underset{2}{\xi}^\alpha - \underset{1}{\xi}^\alpha)(\underset{2}{\xi}^\beta - \underset{1}{\xi}^\beta) .$$

Laut (1,13), (1,14) ist die rechte Seite dieser Ungleichung positiv und demzufolge gilt (mit Hinsicht auf $(1,15)_b$)

$$(1,16) \qquad g_{\alpha\beta} (\bar{x}^\alpha - \underset{2}{\xi}^\alpha)(\underset{2}{\xi}^\beta - \underset{1}{\xi}^\beta) < 0 .$$

Es ist nun

$$g_{\alpha\beta} (\bar{x}^\alpha - \underset{1}{\xi}^\alpha)(\bar{x}^\beta - \underset{1}{\xi}^\beta) = g_{\alpha\beta} [(\bar{x}^\alpha - \underset{2}{\xi}^\alpha) + (\underset{2}{\xi}^\alpha - \underset{1}{\xi}^\alpha)] \cdot$$

$$\cdot [(\bar{x}^\beta - \underset{2}{\xi}^\beta) - (\underset{2}{\xi}^\beta - \underset{1}{\xi}^\beta)] = g_{\alpha\beta} (\bar{x}^\alpha - \underset{2}{\xi}^\alpha)(\bar{x}^\beta - \underset{2}{\xi}^\beta) +$$

$$+ 2 g_{\alpha\beta} (\bar{x}^\alpha - \underset{2}{\xi}^\alpha)(\underset{2}{\xi}^\beta - \underset{1}{\xi}^\beta) + g_{\alpha\beta} (\underset{2}{\xi}^\alpha - \underset{1}{\xi}^\alpha)(\underset{2}{\xi}^\beta - \underset{1}{\xi}^\beta) ,$$

woraus - mit Hilfe von (1,13), (1,14) und (1,16) - folgt, dass

$$(1,17) \qquad g_{\alpha\beta} (\bar{x}^\alpha - \underset{1}{\xi}^\alpha)(\bar{x}^\beta - \underset{1}{\xi}^\beta) < 0$$

ist, d.h. $\bar{x} \in K^{int}_{\underset{1}{\xi}}$.

Da auch $\bar{x}^4 > \underset{1}{\xi}^4$ (was aus (1,14), (1,13) sichtbar ist, folgt aus (1,17) unmittelbar, dass $\bar{x} \in {}^+K^{int}_{\underset{1}{\xi}}$ ist. Jeder Punkt des Kegels ${}^+K_{\underset{2}{\xi}}$ gehört also in den Innenraum des Kegels ${}^+K_{\underset{1}{\xi}}$. Dies bedeutet, dass die Mengen ${}^+K_{\underset{1}{\xi}}$, ${}^+K_{\underset{2}{\xi}}$

keinen gemeinsamen Punkt haben, d.h. ${}^{+}K_{\underset{1}{\xi}} \cap {}^{+}K_{\underset{2}{\xi}} = \emptyset$.

Die Behauptung ${}^{-}K_{\underset{1}{\xi}} \cap {}^{-}K_{\underset{2}{\xi}} = \emptyset$ wird ähnlich bewiesen.

<u>Hilfssatz 3</u>. Zu jedem Punkt $X \in \mathfrak{M}$ existiert höchstens ein Punkt ξ der Weltlinie (1,5) derart, dass $X \in {}^{+}K_{\xi}$ ist. Beweis ist klar. Wären $\underset{1}{\xi}$, $\underset{1}{\xi}$ zwei verschiedene Punkte der Weltlinie (1,5) mit der Eigenschaft $X \in {}^{+}K_{\underset{1}{\xi}}$, $X \in {}^{+}K_{\xi}$, dann wäre $X \in {}^{+}K_{\underset{1}{\xi}} \cap {}^{+}K_{\underset{2}{\xi}}$ im Widerspruch mit der Behauptung des Hilfssatzes 2 .

<u>Bemerkung 2</u>. Hilfssatz 3 gilt selbstverständlich, wenn man das Symbol ${}^{+}K_{\xi}$ in ${}^{-}K_{\xi}$ umwechselt.

<u>Satz 1</u>. Es seien (1,1) die Bewegungsgleichungen eines Massenpunktes im gegebenen Lorentzschen Raum-Zeitsystem (x, y, z, t). Seien weiter (1,5) die Gleichungen der entsprechenden Weltlinie. Wir setzen voraus die Existenz einer Zahl $v_0 > 0$ mit der Eigenschaft:

$$(1{,}19)\quad |V| = \sqrt{\delta_{ik}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^i}{dt}} \leq v_0 < c \qquad \text{für jedes } t \in (-\infty, \infty).$$

Zu jedem Punkt $\underset{0}{X} \in \mathfrak{M}$ existiert dann gerade ein Punkt $\underset{1}{\xi}$ der Weltlinie (1,5), für welchen $\underset{0}{X} \in {}^{-}K_{\underset{1}{\xi}}$ und gerade ein Punkt $\underset{2}{\xi}$ dieser Weltlinie, für welchen $\underset{0}{X} \in {}^{+}K_{\underset{2}{\xi}}$ ist.

Beweis: Unterscheiden wir zwei Möglichkeiten:

a) Der Punkt $\underset{0}{X}$ gehört zu der Weltlinie (1,5). Der Kegel ${}^{+}K_{\underset{0}{X}}$ enthält dann den Punkt $\underset{0}{X}$ (er ist der Gipfel des Kegels). Kein anderer Punkt der Weltlinie besitzt diese Eigenschaft, wie es sofort aus dem Hilfssatze 3 hervorgeht.

b) Der Punkt $\underset{0}{X}$ gehört nicht zu der Weltlinie (1,5). Bezeichnen wir $\underset{0}{X}^{\alpha}$ die Koordinaten des Punktes $\underset{0}{X}$, x^{α}, die Koordinaten des laufenden Punktes $x \in \mathfrak{M}$. Auf Grund der Beschreibung (1,5) der Weltlinie definieren wir die Funktion

$$\psi(\tau) = g_{\alpha\beta}\,(x^{\alpha}(\tau) - \underset{0}{X}^{\alpha})\,(x^{\beta}(\tau) - \underset{0}{X}^{\beta})\,. \tag{1,20}$$

Dann gilt:

<u>Behauptung 1</u>. Es gibt Werte des Parameters τ der Weltlinie (1,5), für welche die Funktion $\psi(\tau)$ aus (1,20) positiv ist.

Um dies zu beweisen, betrachten wir die Hyperebene mit der Beschreibung $x^4 = \underset{0}{X}^4$ in $\mathfrak{M}$ (die offensichtlich durch den Punkt $\underset{0}{X}$ durchgeht). Diese Hyperebene schneidet die Weltlinie (1,5) in bestimmtem Punkte $\underset{0}{x}$ mit den Koordinaten $\underset{0}{x}^{\alpha}$ durch, wobei $\underset{0}{x}^4 = \underset{0}{X}^4$. Dann ist aber

$$g_{\alpha\beta}\,(\underset{0}{x}^{\alpha} - \underset{0}{X}^{\alpha})\,(\underset{0}{x}^{\beta} - \underset{0}{X}^{\beta}) = \delta_{ik}\,(\underset{0}{x}^{i} - \underset{0}{X}^{i})\,(\underset{0}{x}^{k} - \underset{0}{X}^{k}) -$$
$$- c^2\,(\underset{0}{x}^{4} - \underset{0}{X}^{4})^2 = \delta_{ik}\,(\underset{0}{x}^{i} - \underset{0}{X}^{i})\,(\underset{0}{x}^{k} - \underset{0}{X}^{k}) > 0\,,$$

da der Punkt $\underset{0}{X}$ mit keinem Punkt der Weltlinie (1,5) zusammenfällt (laut Voraussetzung). Für den Wert $\underset{0}{\tau}$ des Parameters, der dem Punkte $\underset{0}{x}$ entspricht (d.h. $\underset{0}{x}^{\alpha} = x^{\alpha}(\underset{0}{\tau})$) ist also $\psi(\underset{0}{\tau})$ positiv.

<u>Behauptung 2</u>. Unter der Voraussetzung (1,19) gibt es Werte des Parameters τ der Weltlinie (1,5), für welche die Funktion $\psi(\tau)$ aus (1,20) negativ ist.

Den Beweis dieser Behauptung führen wir folgendermassen durch: Es sei $\underset{0}{x}$ der Punkt mit den Koordinaten $\underset{0}{x}^{\alpha} = x^{\alpha}(\underset{0}{\tau})$ der Weltlinie (1,5), für welchen

$$(1{,}21)\quad \psi(\underset{0}{\tau}) = g_{\alpha\beta}(x^{\alpha}(\underset{0}{\tau}) - \underset{0}{X}^{\alpha})(x^{\alpha}(\underset{0}{\tau}) - \underset{0}{X}^{\beta}) > 0,\ \underset{0}{x}^{4} = \underset{0}{X}^{4},$$

dessen Existenz durch Behauptung 1 gesichert ist. Betrachten wir nun den Kegel ${}^{+}Q_{\underset{0}{x}}$ in $\mathfrak{M}$ mit der Beschreibung

$${}^{+}Q_{\underset{0}{x}} = E\,(x \in \mathfrak{M});\ \delta_{ik}\,(x^{i} - \underset{0}{x}^{i})(x^{k} - \underset{0}{x}^{k}) - (\underset{0}{v})^{2}\,(x^{4} - \underset{0}{x}^{4})^{2} = 0, x^{4} \geq \underset{0}{x}^{4}.$$

Als Innenraum des Kegels ${}^{+}Q_{\underset{0}{x}}$ definieren wir die Menge

$$(1{,}22)\ {}^{+}Q_{\underset{0}{x}}^{int} = E\,(x \in \mathfrak{M};\ \delta_{ik}\,(x^{i} - \underset{0}{x}^{i})(x^{k} - \underset{0}{x}^{k}) - (\underset{0}{v})(x^{4} - \underset{0}{x}^{4})^{2} < 0,\ x^{4} > \underset{0}{x}^{4}).$$

Wir betrachten weiter die Hyperebene

$$(1{,}23)\quad R_{k} = E\,(x \in \mathfrak{M};\ x^{4} = k,\quad k > \underset{0}{x}^{4}),$$

wo k eine bisher unbestimmte Konstante ist. Führen wir noch die Mengen

$$(1{,}24)\qquad \underset{1}{S} = {}^{+}K_{\underset{0}{x}}^{int} \cap R_{k},\ \underset{2}{S} = {}^{+}Q_{\underset{0}{x}}^{int} \cap R_{k}$$

ein, dann ist offensichtlich

$$\underset{1}{S} = E\,(x \in \mathfrak{M};\ \delta_{ik}\,(x^{i} - \underset{0}{X}^{i})(x^{k} - \underset{0}{X}^{k}) - c^{2}\,(k - \underset{0}{X}^{4})^{2} < 0),$$

$$\underset{2}{S} = E\,(x \in \mathfrak{M};\ \delta_{ik}\,(x^{i} - \underset{0}{x}^{i})(x^{k} - \underset{0}{x}^{k}) - (\underset{0}{v})^{2}\,(k - \underset{0}{x}^{4})^{2} < 0).$$

Die Menge $\underset{1}{S}$ stellt den Innenraum einer dreidimensionaler Kugel mit dem Mittelpunkt in $\underset{0}{X}$ und vom Halbmesser $\underset{1}{\rho} = c\,|k - \underset{0}{X}^{4}|$, die Menge $\underset{2}{S}$ stellt dann den Innenraum einer dreidimensionaler Kugel mit dem Mittelpunkt in $\underset{0}{x}$ und vom Halbmesser $\underset{2}{\rho} = \underset{0}{v}\,|k - \underset{0}{x}^{4}|$ dar. Beide diese Kugeln liegen in der Hyperebene R_{k} aus (1,23). Aus (1,19), (1,23) folgt

$$(1{,}25)\qquad \underset{1}{\rho} = c\,(k - \underset{0}{x}^{4}),\ \underset{2}{\rho} = \underset{0}{v}\,(k - \underset{0}{x}^{4}).$$

Bezeichnen wir noch d_{12} die Entfernung der Mittelpunkte der Kugeln $\underset{1}{S}$, $\underset{2}{S}$ in der Hyperebene (1,23), d.h.

$$d_{12} = \sqrt{\delta_{ik} (\underset{0}{X}^i - \underset{0}{x}^i)(\underset{0}{X}^k - \underset{0}{x}^k)}$$

Wir wählen nun die Zahl k so gross, damit $d_{12} < \underset{1}{\rho} - \underset{2}{\rho}$ wäre. Es genügt dazu die Wahl

$$(1,26) \qquad k > \underset{0}{x}^4 + \frac{d_{12}}{c - \underset{0}{V}},$$

wie es sich aus (1,25) ergibt. Dann aber enthält der Innenraum der Kugel $\underset{1}{S}$ (vom Halbmesser $\underset{1}{\rho}$) den Innenraum der Kugel $\underset{2}{S}$ (vom Halbmesser $\underset{2}{\rho}$), d.h. $\underset{2}{S} \subset \underset{1}{S}$. Daraus und aus (1,25) folgt dann

$$(1,27) \qquad \underset{2}{S} \subset {}^+K_{\underset{0}{x}} .$$

Aus der Voraussetzung des Satzes 1 (Formel (1,19)) folgt aber (was in ähnlicher Weise wie die Behauptung des Hilfssatzes 1 bewiesen werden kann), dass alle Punkte x der betrachteten Weltlinie, für welche $x^4 > \underset{0}{x}^4$ ist, der Menge ${}^+Q^{int}_{\underset{0}{x}}$ aus (1,22) anhören. Die Hyperebene R_k aus (1,23), wo k die Eigenschaft (1,26) besitzt, schneidet die betrachtete Weltlinie in einem einzigen Punkte ξ mit den Koordinaten ξ^α durch, wobei $\xi^4 = k$ ist. Da $\xi \in {}^+Q^{int}_{\underset{0}{x}}$, $\xi \in R_k$ ist, ist auch $\xi \in {}^+Q^{int}_{\underset{0}{x}} \cap R_k = \underset{2}{S}$.
Daraus und aus (1,27) folgt dann, dass $\xi \subset {}^+K^{int}_{\underset{0}{x}}$ ist.
Aus der Definition ${}^+K^{int}_{\underset{0}{x}}$ in (1,9) folgt dann, dass

$$(1,28) \qquad g_{\alpha\beta} (\xi^\alpha - \underset{0}{X}^\alpha)(\xi^\beta - \underset{0}{X}^\beta) < 0, \quad \xi^4 = k > \underset{0}{X}^4$$

ist. Es sei $\bar{\tau}$ derjenige Wert des Parameters τ der Weltlinie (1,5), für welchen $\xi^\alpha = x^\alpha(\bar{\tau})$ ist. Aus (1,28), (1,20) folgt dann $\psi(\bar{\tau}) < 0$. Hiemit ist die Behauptung 2 bewiesen.

Nun ist schon leicht den Beweis der Behauptung des Satzes 1 vollzuenden. Die Funktion $\psi(\tau)$ aus (1,20) ist eine stetige Funktion von τ in Punkten der Weltlinie (1,5), die - der Behauptung 1 und 2 nach - mindestens in einem Punkt der Weltlinie einen positiven und mindestens in einem Punkt der Weltlinie einen negativen Wert annimmt. Daraus folgt die Existenz wenigstens eines Punktes ξ (der Weltlinie (1,5), der einem bestimmten Wert τ^* des Parameters τ entspricht), für dessen Koordinaten $\xi^\alpha = x^\alpha(\tau^*)$ gilt

(1,29) $\psi(\tau^*) = g_{\alpha\beta}(\xi^\alpha - \underset{0}{X}^\alpha)(\xi^\beta - \underset{0}{X}^\beta) = 0 .$

Dabei ist $\underset{0}{\tau} < \tau^* < \bar{\tau}$, wo $\underset{0}{\tau}$, $\bar{\tau}$ die betreffenden Parameterwerte aus dem Beweis der Behauptungen 1 und 2 sind. Aus dieser Ungleichung folgt aber (in Folge der Monotonie der Funktion $t(\tau)$), dass

$$t(\underset{0}{\tau}) < t(\tau^*) < t(\bar{\tau})$$

ist, d.h.

$$\underset{0}{X}^4 < \xi^4 < \xi^4$$

ist.

Es ist also (laut (1,29) und der vorigen Ungleichung)

$$g_{\alpha\beta}(\xi^\alpha - \underset{0}{X}^\alpha)(\xi^\beta - \underset{0}{X}^\beta) = 0, \quad \xi^4 > \underset{0}{x} .$$

Dies bedeutet aber, dass zugleich

$$\xi \in {}^{+}K_{\underset{0}{x}} \Longleftrightarrow \underset{0}{X} \in {}^{-}K_{\xi}$$

ist, was man aus (1,9) einsieht. Setzen wir noch $\xi = \underset{1}{\xi}$, dann haben wir die Existenz des Punktes $\underset{1}{\xi}$ der Weltlinie

(1,5) mit der Eigenschaft $\underset{0}{X} \in {}^{-}K_{\underset{1}{\xi}}$ bewiesen. Die eindeutige Existenz folgt dann unmittelbar aus dem Hilfssatze 3 und der Bemerkung 2 . In ähnlicher Weise wird die eindeutige Existenz des Punktes $\underset{2}{\xi}$ der Weltlinie mit der Eigenschaft $\underset{0}{X} \in {}^{+}K_{\underset{2}{\xi}}$ überprüft.

<u>Bemerkung 3</u>. Für die Punkte $\underset{1}{\xi}$, $\underset{2}{\xi}$ aus dem Satze 1, deren eindeutige Existenz oben bewiesen wurde, sind die Implikationen

$$\underset{1}{\xi} \in {}^{+}K_{\underset{0}{x}} \Longleftrightarrow \underset{0}{X} \in {}^{-}K_{\underset{1}{\xi}} ,$$

$$\underset{2}{\xi} \in {}^{-}K_{\underset{0}{x}} \Longleftrightarrow \underset{0}{X} \in {}^{+}K_{\underset{2}{\xi}}$$

gültig. Daraus folgt, dass der Doppelkegel $K_{\underset{0}{x}}$ die Weltlinie (1,5) entweder gerade in zwei (verschiedenen) Punkten oder in einem einzigen Punkt schneidet. Der zweite Fall kommt gerade dann in Frage, wenn $\underset{0}{X}$ der Weltlinie angehört. Weiter gilt offensichtlich

$$\underset{0}{X} \in {}^{+}K_{\underset{2}{\xi}} \cap {}^{-}K_{\underset{1}{\xi}} .$$

<u>Satz 2</u>. Sei L die aus (1,5), für welche ein Punkt $\underset{0}{X} \in \mathfrak{M}$ mit der Eigenschaft existiert [2)]

(1,30) $L \cap {}^{+}K_{\underset{0}{x}} = \emptyset \qquad (L \cap {}^{-}K_{\underset{0}{x}} = \emptyset)$.

Dann gilt:

(1,31)$_1$ $\qquad \sup_{x \in L} |V| = c$,

---

2) Die Existenz solcher Weltlinien werden wir später an einem einfachen Beispiel zeigen.

$$(1{,}31)_2 \qquad L \subset \mathfrak{M} - ({}^{+}K^{int}_{\underset{0}{x}} \cup {}^{+}K_{\underset{0}{x}})$$

$$(L \subset \mathfrak{M} - ({}^{-}K^{int}_{\underset{0}{x}} \cup {}^{-}K_{\underset{0}{x}})).$$

Beweis: Wenn ein Punkt $\underset{0}{X} \in \mathfrak{M}$ mit der Eigenschaft (1,30) existiert, dann - der Behauptung des Satzes 1 nach - existiert keine Zahl $\underset{0}{V}$ $(0 < \underset{0}{v} < c)$ mit der Eigenschaft (1,19). Daraus folgt unmittelbar $(1{,}31)_1$. Der Behauptung 1 aus dem Beweise des Satzes 1 nach, gilt für den Punkt $\underset{0}{x}$ der betrachteten Weltlinie, für welchen $\underset{0}{x}^4 = \underset{0}{X}^4$ ist,

$$g_{\alpha\beta}(\underset{0}{x}^{\alpha} - \underset{0}{X}^{\alpha})(\underset{0}{x}^{\beta} - \underset{0}{X}^{\beta}) > 0,$$

d.h. $\underset{0}{x} \in K^{ext}_{\underset{0}{x}}$. Wenn es wenigstens einen Punkt ξ der Weltlinie L gäbe, für den

$$g_{\alpha\beta}(\xi^{\alpha} - \underset{0}{X}^{\alpha})(\xi^{\beta} - \underset{0}{X}^{\beta}) < 0, \; \xi^4 > \underset{0}{x}^4$$

gelten möchte, dann müsste auch ein Punkt $\bar{\xi}$ der Weltlinie mit der Eigenschaft

$$g_{\alpha\beta}(\bar{\xi}^{\alpha} - \underset{0}{X}^{\alpha})(\bar{\xi}^{\beta} - \underset{0}{X}^{\beta}) = 0, \; \xi^4 > \bar{\xi}^4 > \underset{0}{x}^4 ,$$

existieren. Dies folgt aus der Stetigkeit der Funktion $\psi(\tau)$ aus (1,20). Dann wäre aber $\bar{\xi} \in L \cap {}^{+}K_{\underset{0}{x}}$ und dies steht im Widerspruch zu (1,30). Daraus folgt, dass für jeden Punkt x der Weltlinie, für den $x^4 \geqq \underset{0}{X}^4$ gilt, die Ungleichung

$$g_{\alpha\beta}(x^{\alpha} - \underset{0}{X}^{\alpha})(x^{\beta} - \underset{0}{X}^{\beta}) > 0$$

erfüllt ist. Dies bedeutet aber, dass alle Punkte x der Weltlinie L, für welche $x^4 \geqq \underset{0}{X}^4$ ist, in der Menge $\mathfrak{M} - ({}^{+}K^{int}_{\underset{0}{x}} \cup {}^{+}K_{\underset{0}{x}})$ liegen. Der Beweis der Behauptung des Satzes für den Fall $L \cap {}^{-}K_{\underset{0}{x}} = \emptyset$ wird in ähnlicher Weise durchgeführt.

Bemerkung 4. Aus dem Satze 2 folgt unmittelbar: Es sei L eine Weltlinie mit der Beschreibung (1,5), für welche ein Punkt $\underset{0}{X} \in \mathfrak{M}$ mit der Eigenschaft $L \cap K_{\underset{0}{x}} = \emptyset$ existiert. Dann gilt:

$$\sup_{x \in L} |V| = c, \quad L \subset K_{\underset{0}{x}}^{ext} .$$

Wir werden nun ein einfaches Beispiel solcher Weltlinie vorführen.

Beispiel: Im gegebenen Inertialsystem betrachten wir die Kurve mit der Beschreibung

$$(1,32)_a \quad \begin{aligned} x &= x^1 = \sqrt{a^2 + c^2 t^2}, \quad a \neq 0, \quad t \in (-\infty, \infty) \\ y &= x^2 = 0, \\ z &= x^3 = 0. \end{aligned}$$

Dann ist

$$(1,32)_b \quad \frac{dx^1}{dt} = \frac{c^2 t}{\sqrt{a^2+c^2t^2}}, \quad \frac{dx^2}{dt} = \frac{dx^3}{dt} = 0$$

und

$$(1,32)_c \quad |V| = \frac{c^2 |t|}{\sqrt{a^2+c^2t^2}} < c \quad \text{für} \quad t \in (-\infty, \infty).$$

Wir können also die gegebene Kurve als Bewegungskurve eines Massenpunktes ansehen. Unserer Kurve entspricht in $\mathfrak{M}$ die Weltlinie

$$(1,33) \quad x^1 = \sqrt{a^2 + c^2 t^2}, \; x^2 = x^3 = 0, \; x^4 = t, \; t \in (-\infty, \infty).$$

Es sei $\underset{0}{X}$ Punkt aus $\mathfrak{M}$ mit den Koordinaten $\underset{0}{X}^{\alpha} = 0$ für $\alpha = 1,2,3,4$.

Dann gilt

$$g_{\alpha\beta}\,(x^\alpha - \underset{0}{X}^\alpha)(x^\beta - \underset{0}{X}^\beta) = g_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta = a^2 > 0$$

für jeden Punkt der Weltlinie (1,33). Sie liegt also in der Menge $K^{ext}_{\underset{0}{x}}$, d.h. im Aussenraum des isotropischen Doppelkegels im Punkte (0,0,0,0) (Abb.1). Dem Satze 1 und der Bemerkung 3 nach ist dann

$$\sup_{x \in L} |V| = c \quad .$$

Dies folgt auch offensichtlich aus $(1,32)_c$, wonach

$$\lim_{t\to\infty} |V| = \lim_{t\to-\infty} |V| = c$$

ist. Die Kurve (1,33) liegt in der Ebene x^1, t; sie stellt offensichtlich denjenigen Teil der Hyperbel $(x^1)^2 - c^2t^2 = a^2$ dar, wo $x^1 > 0$ ist. (Abb.1). Aus (1,2), $(1,32)_c$ folgt nun

$$\tau = \int_0^t \sqrt{1 - \frac{|V|^2}{c^2}}\, dt = \int_0^t \frac{|a|}{\sqrt{a^2 + c^2t^2}}\, dt, \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{|a|}{\sqrt{a^2 + c^2 t^2}}$$

und weiter

$$\underset{1}{\dot{i}}^1 = \frac{dx^1}{d\tau} = \frac{dx^1}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau} = \frac{c^2 t}{|a|}, \quad \underset{1}{\dot{i}}^2 = \frac{dx^2}{d\tau} = 0, \quad \underset{1}{\dot{i}}^3 = \frac{dx^3}{d\tau} = 0,$$

$$\underset{1}{\dot{i}}^4 = \frac{dt}{d\tau} = \frac{\sqrt{a^2 + c^2t^2}}{|a|} \quad .$$

Aus (1,34) bekommen wir

$$\frac{d}{d\tau}\underset{1}{i}^1 = \frac{d^2x^1}{d\tau^2} = \frac{c^2}{a^2}\sqrt{a^2 + c^2t^2}\,,$$

$$\frac{d}{d\tau}\underset{1}{i}^2 = \frac{d^2x^2}{d\tau^2} = 0,$$

$$\frac{d}{d\tau}\underset{1}{i}^3 = \frac{d^2x^3}{d\tau^2} = 0,$$

$$\frac{d}{d\tau}\underset{1}{i}^4 = \frac{d^2t}{d\tau^2} = \frac{c^2|t|}{a^2} \quad .$$

Daraus und der Formel $(1,8)_a$ nach erhalten wir weiter

$$P^2 = \mu\, g_{\alpha\beta} \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} \frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} = \mu^2 \frac{c^4}{a^4} (a^2 + c^2t^2 - c^2t^2) = \left(\frac{\mu c^2}{|a|}\right)^2 ,$$

wo P derjenige Skalar aus den Frenetschen Formeln (1,6) und μ die Ruhmasse des bewegten Massenpunktes bedeutet. In unserem Falle ist also

$$(1,34) \qquad P = P_0 = \frac{\mu c^2}{|a|}$$

konstant. Mit Hilfe der Formel (1,34) können wir die Gleichungen der Kurve $(1,32)_a$ auf die Form

$$x = \frac{\mu c^2}{P_0} \sqrt{1 + \frac{P_0^2 t^2}{\mu^2 c^2}} , \quad y = z = 0, \; t \in (-\infty, \infty)$$

bringen. Für genügend kleine $t \; (|t| < \frac{\mu c}{P_0})$ erhalten wir in erster Aproximation

$$x = \frac{\mu c^2}{P_0} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{P_0^2 t^2}{\mu^2 c^2}\right) ,$$

d.h.

$$x = \frac{\mu c^2}{P_0} + \frac{1}{2} \frac{P_0}{\mu} t^2 .$$

Führen wir noch die Bezeichnung $x_0 = \frac{\mu c^2}{P_0}$, $g = \frac{P_0}{\mu}$ ein, dann haben wir die klassische Formel

$$x = x_0 + \frac{1}{2} g t^2$$

für die gleichförmig beschleunigte Bewegung (mit der Anfangsgeschwindigkeit gleich Null) [3]

Unser Beispiel ist in gewissem Sinne von dem physikalischen Standpunkt aus interessant. Denken wir uns einen

---

[3] Sieh z.B. A.I.Žukov:Vvedenie v teoriju otnositelnosti, Gos. Izdav.fys.-mat.literatury, Moskva 1961, Seite 91-92.

Beobachter A im Ursprung des gegebenen Inertialsystems, dessen Weltlinie im zugehörigen Minkowskischen Raum $\mathfrak{M}$ durch die Gleichungen

$$x^1 = x^2 = x^3 = 0, \quad x^4 = t, \quad t \in (-\infty, \infty)$$

beschrieben ist. Das von dem Beobachter A in der Zeit $t_1 \in (-\infty, 0)$ ausgesandte Signal erreicht den Massenpunkt (dessen Bewegungskurve in $(1,32)_a$ beschrieben ist) und das vom Massenpunkt abgeprallte Signal kehrt zu dem Beobachter A in einer gewissen Zeit $t_2 \in (0, \infty)$ zurück. Ein jedes Signal aber, welches in einer Zeit $t_1 \in \langle 0, \infty \rangle$ von dem Beobachter A ausgesandt wurde, erreicht überhaupt nicht den Massenpunkt (der sich entlang der Kurve $(1,32)_a$ bewegt). In diesem Falle ist es also bei der Radiolokation zwecklos die Signale im Zeitinterval $\langle 0, \infty)$ vom Beobachter A auszusenden. Die Signale, die im Zeitinterval $(-\infty, 0)$ ausgesandt wurden, "betasten" vollständig die Bewegungskurve des Massenpunktes. Viel schlimmer wäre daran ein Beobachter, der sich mit dem Massenpunkte mitbewegen sollte. Ein von diesem Beobachter in beliebigem Zeitpunkt ausgesandtes Signal kehrt nie - als vom Beobachter A abgeprallten Signal - zu ihm zurück (Abb.1).

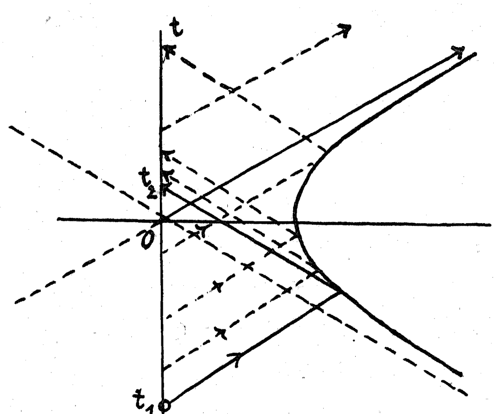

Abb.1

Den eben betrachteten Spezialfall $(1,32)_a$ der Weltlinie werden wir tiefer in dem nächsten Kapitel untersuchen.

2. Gleichförmig beschleunigte Bewegung in der Minkowskischen Mechanik

Definition 1. Es sei durch (1,1) die Bewegungskurve eines Massenpunktes im gegebenen Inertialsystem beschrieben, deren entsprechende Weltlinie im Minkowskischen Raum $\mathfrak{M}$ in (1,3) angegeben ist. Es gelte

$$P = \underset{\circ}{P} = konst \neq 0, \quad Q = R = 0 \,, \tag{2,1}$$

in jedem Punkte der Weltlinie (1,3), wo P, Q, R die Skalargrössen aus der Frenetschen Formeln (1,6) sind. Dann sagen wir, dass sich der betrachtete Massenpunkt gleichförmig beschleunigt bewegt (im Bezug zum Lichtstrahl).

Bemerkung 1. Der Begriff der eben eingeführten beschleunigten Bewegung ist offensichtlich invariant in Bezug auf die Gruppe der Lorentztransformationen. Dies folgt aus der Invarianz der Skalare P, Q, R. Es ist also durch die Bedingungen (2,1) eine gewisse Klasse der Weltlinien charakterisiert. In den nächsten Ueberlegungen wollen wir eine geometrische Charakteristik dieser Klasse von Weltlinien dargeben, die in jedem Lorentzschen System gültig wird. Zu diesem Zwecke führen wir einige metrische Begriffe im Minkowskischen Raum ein.

Definition 2. Sei $\xi \in \mathfrak{M}$ ein festgewählter Punkt, $a > 0$ eine feste Zahl. Die Menge

$$H_\xi(a) = E(x \in \mathfrak{M};\ g_{\alpha\beta}(x^\alpha - \xi^\alpha)(x^\beta - \xi^\beta) - a^2 = 0) \tag{2,2}$$

nennen wir eine H-Hyperfläche in $\mathfrak{M}$.

Bemerkung 2. Der Begriff der H-Hyperfläche ist invariant gegenüber sämtlichen Lorentztransformationen in $\mathfrak{M}$.

Dies folgt daraus, dass diese Eigenschaft das Skalarprodukt $g_{\alpha\beta}(x^\alpha-\xi^\alpha)(x^\beta-\xi^\beta)$ besitzt.

Satz 3. Die geodätischen Linien [4] der H-Hyperfläche (2,2) sind Weltlinien mit der Eigenschaft (2,1).

Beweis: Der kovariante Vektor mit den Komponenten

$$T_\alpha = \frac{1}{a}\, g_{\alpha\beta}\,(x^\beta - \xi^\beta) \tag{2,3}$$

ist der Tangentialvektor der Mannigfaltigkeit (2,2) in jedem ihrer Punkte; er ist normiert im Sinne der Minkowskischen Metrik, d.h. es gilt für ihn

$$g^{\alpha\beta}\, T_\alpha\, T_\beta = 1\,,$$

wo $g^{\alpha\beta}$ der zu dem Tensor $g_{\alpha\beta}$ kontragrediente Tensor ist, d.h. $g^{\alpha\gamma}\, g_{\gamma\beta} = \delta^\alpha_\beta$.

Der Vektor

$$N^\alpha = g^{\alpha\beta}\, T_\beta = \frac{1}{a}\,(x^\alpha - \xi^\alpha)\,, \tag{2,4}$$

der offensichtlich die Bedingung $g_{\alpha\beta}\, N^\alpha N^\beta = 1$ erfüllt, ist sogenannter Normal-Einheitsvektor der Hyperfläche (2,2) im Sinne der Minkowskischen Metrik. Von jedem Vektor v^α (vom Nullvektor verschieden), der im Punkte der betrachteten Hyperfläche definiert ist und der in diesem Punkte die Gleichung

$$v^\alpha\, T_\alpha = 0 \tag{2,4*}$$

erfüllt, sagen wir, dass er in der betrachteten Hyperfläche liegt. Der Vektor v^α mit der Eigenschaft (2,4)* und

---

4) d.h. im Sinne der Minkowskischen Metrik.

der Vektor N^α aus (2,4) sind ortogonal im Sinne der Minkowskischen Metrik, d.h.

$$g_{\alpha\beta}\, v^\alpha N^\beta = 0 .$$

Dies folgt unmittelbar aus (2,4), (2,5).

Die Mannigfaltigkeit (2,2) lässt sich auch durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x^1 &= a \sin \eta^1 \cos \eta^2 \cosh \eta^3 + \xi^1 , \\ x^2 &= a \sin \eta^1 \sin \eta^2 \cosh \eta^3 + \xi^2 , \\ x^3 &= a \cos \eta^1 \cosh \eta^3 + \xi^3 , \\ x^4 &= \frac{a}{c} \sinh \eta^3 + \xi^4 \end{aligned} \tag{2,5}$$

parametrisch beschreiben, wenn wir noch den Definitionsbereich $\eta^1 \in \langle -\pi, \pi\rangle$, $\eta^2 \in \langle 0, 2\pi\rangle$, $\eta^3 \in (-\infty, \infty)$ der Parameter η^1, η^2, η^3 angeben. Bezeichnen wir weiter

$$B_a^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \eta^a} \quad (\alpha = 1,2,3,4;\ a = 1,2,3), \tag{2,6}$$

dann wird der erste metrische Tensor (im Sinne der Minkowskischen Metrik) der betrachteten Hyperfläche (2,5) folgendermassen definiert

$$\hat{g}_{ab} = B_a^\alpha\, g_{\alpha\beta} \tag{2,7}$$

und die Berechnung seiner Komponenten aus(2,5), (2,6), (2,7) führt zum Resultat:

$$\begin{aligned} &\hat{g}_{11} = a^2 \cosh^2 \eta^3 , \quad \hat{g}_{22} = a^2 \sin^2 \eta^1 \cosh^2 \eta^3 , \\ &a_{33} = -a^2 , \\ &\hat{g}_{ik} = \hat{g}_{ki} = 0 \qquad \text{für } i \neq k \ (i,k = 1,2,3) . \end{aligned} \tag{2,8}$$

Der Tensor mit den Komponenten

$$h_{ab} = B_a^\alpha \, \partial_b T_\alpha \qquad \left(\partial_b \equiv \frac{\partial}{\partial \eta^b}\right)$$

ist sogenannter zweiter metrischer Tensor der Hyperfläche (2,2). Es ist offensichtlich

(2,9) $$h_{ab} = B_a^\alpha \, B_b^\beta \, \partial_\beta T_\alpha \quad \left(\partial_\beta \equiv \frac{\partial}{x^\beta}\right).$$

Aus (2,3) folgt aber:

$$\partial_\beta T_\alpha = \frac{1}{a} g_{\alpha\beta} \, .$$

Daraus und aus (2,9), (2,7) folgt dann unmittelbar, dass in Punkten der Hyperfläche (2,2) die Gleichungen

(2,10) $$h_{ab} = \frac{1}{a} \hat{g}_{ab}$$

erfüllt sind.

Wenn wir noch mit den Symbolen [5]

(2,11) $$\left\{ {c \atop ab} \right\} = \frac{1}{2} \hat{g}^{cd} \left(\partial_a \hat{g}_{db} + \partial_b \hat{g}_{ad} - \partial_d \hat{g}_{ab}\right)$$

die Koeficienten der induzierten Konnexion der in dem Minkowskischen Raum $\mathfrak{M}$ eingebetteten Mannigfaltigkeit (2,2) bezeichnen, dann gilt (ähnlich wie in den Riemannschen Räumen) die bekannte Gaussche Formel

(2,12) $$\partial_b B_a^\alpha = B_c^\alpha \left\{ {c \atop ab} \right\} - h_{ab} N^\alpha \, .$$

Es sei nun durch die Gleichungen (1,3) eine Weltlinie in $\mathfrak{M}$ beschrieben, die in der Mannigfaltigkeit (2,2) liegt.

---

5) $\hat{g}^{cd}$ ist zu dem Tensor $\hat{g}_{cd}$ kontragredient, d.h. $\hat{g}^{cd} \hat{g}_{da} = \delta_a^c$. Dieser Tensor ist im Bereich $\eta^1 \in (-\pi, \pi)$, $\eta^2 \in \langle 0, 2\pi)$, $\eta^3 \in (-\infty, \infty)$ eindeutig definiert. Die Schwierigkeiten, die in denjenigen Punkten der Hyperfläche (2,5), wo $\eta^1 = \pi$ oder $\eta^1 = -\pi$ vorkommen möchten, werden leicht durch einfache Parametertransformation beseitigt.

Dann gilt in jedem Punkte dieser Weltlinie die Gleichung

$$g_{\alpha\beta}\,(x^{\alpha}(\tau)-\xi^{\alpha})\,(x^{\beta}(\tau)-\xi^{\beta}) = a^2 .$$

In jedem festen Punkt dieser Weltlinie gilt dann

$$(2,13) \qquad \dot{\underset{1}{i}}^{\alpha}(\tau) = \frac{d\,x^{\alpha}}{d\,\tau} = B^{\alpha}_{a}\,\dot{\underset{1}{i}}^{a} ,$$

wo $\dot{\underset{1}{i}}^{a}\ (a = 1, 2, 3)$ die Koefficienten der zugehörigen Linear-Kombination sind, die einen kontravarianten Vektor der betrachteten Hyperfläche (2,2) im betrachteten Punkt darstellen. Auf Grund der Formel (2,12) folgt dann aus (2,13)

$$(2,14) \qquad \frac{d}{d\tau}\dot{\underset{1}{i}}^{\alpha} = \frac{d^2 x^{\alpha}}{d\,\tau^2} = B^{\alpha}_{a}\,\nabla_{\tau}\dot{\underset{1}{i}}^{a} - h_{ab}\,\dot{\underset{1}{i}}^{a}\,\dot{\underset{1}{i}}^{b}\,N^{\alpha} .$$

Diese Relation ist aus der Riemannschen Differentialgeometrie wohl bekannt. Dabei bedeutet ∇_{τ} das Symbol der absoluten Ableitung in Bezug auf die Konnexion (2,11), d.h.

$$\nabla_{\tau}\dot{\underset{1}{i}}^{a} = \frac{d}{d\tau}\dot{\underset{1}{i}}^{a} + \left\{ {a \atop bc} \right\}\dot{\underset{1}{i}}^{b}\,\dot{\underset{1}{i}}^{c} .$$

Aus (2,10), (2,13), (2,7), (1,7) folgt nun

$$(2,15)_a \qquad g_{\alpha\beta}\,\dot{\underset{1}{i}}^{\alpha}\,\dot{\underset{1}{i}}^{\beta} = -c^2 = (B^{\alpha}_{a}\,B^{\beta}_{b}\,g_{\alpha\beta})\,\dot{\underset{1}{i}}^{a}\,\dot{\underset{1}{i}}^{b} = \hat{g}_{ab}\,\dot{\underset{1}{i}}^{a}\,\dot{\underset{1}{i}}^{b} = \\ = a\,h_{ab}\,\dot{\underset{1}{i}}^{a}\,\dot{\underset{1}{i}}^{b} ,$$

d.h.

$$(2,15)_b \qquad h_{ab}\,\dot{\underset{1}{i}}^{a}\,\dot{\underset{1}{i}}^{b} = -\frac{c^2}{a} .$$

Laut der ersten Relation in (1,6) ist

$$(2,15)_c \qquad \frac{d}{d\tau}\dot{\underset{1}{i}}^{\alpha} = \frac{P}{\mu}\,\dot{\underset{2}{i}}^{\alpha} .$$

Aus $(2,15)_{b,c}$, (2,4) und (2,14) folgt:

$$(2,16)\quad \frac{P}{\mu}\dot{\underset{2}{i}}^{\alpha} = B^{\alpha}_{a}\nabla_{\tau}\dot{\underset{1}{i}}^{a} + \frac{c^2}{a^2}(x^{\alpha} - \xi^{\alpha}).$$

Setzen wir nun voraus, dass die betrachtete Weltlinie (1,3) eine geodätische Linie (im Sinne der Minkowskischen Metrik) der Mannigfaltigkeit (2,2) sei. Dann gilt [6]

$$\nabla_{\tau}\dot{\underset{1}{i}}^{a} = 0$$

entlang dieser Weltlinie und die Gleichungen (2,16) reduzieren sich auf die Form

$$\frac{P}{\mu}\dot{\underset{2}{i}}^{\alpha} = \frac{c^2}{a^2}(x^{\alpha}(\tau) - \xi^{\alpha}).$$

Wenn wir diese Gleichungen nach τ differenzieren und wenn wir die Frenetsche Formeln (1,6) benützen, dann erhalten wir

$$\frac{1}{\mu}\frac{dP}{d\tau}\dot{\underset{2}{i}}^{\alpha} + \frac{P}{\mu}\left(\frac{P}{\mu c^2}\dot{\underset{1}{i}}^{\alpha} + \frac{Q}{\mu c}\dot{\underset{3}{i}}^{\alpha}\right) = \frac{c^2}{a^2}\dot{\underset{1}{i}}^{\alpha},$$

d.h.

$$\frac{1}{\mu}\frac{dP}{d\tau}\dot{\underset{2}{i}}^{\alpha} + \left[\frac{P^2}{\mu^2c^2} - \frac{c^2}{a^2}\right]\dot{\underset{1}{i}}^{\alpha} + \frac{QP}{\mu c}\dot{\underset{3}{i}}^{\alpha} = 0.$$

In Bezug auf die Unabhängigkeit der Vektoren $\dot{\underset{1}{i}}^{\alpha}, \dot{\underset{2}{i}}^{\alpha}, \dot{\underset{3}{i}}^{\alpha}$ folgt aus diesen Gleichungen

$$\frac{dP}{d\tau} = 0, \quad P = \frac{\mu c^2}{a} > 0, \quad Q = 0.$$

Laut (1,8) ist auch $R = 0$, wenn $Q = 0$ ist. Wenn die betrachtete Weltlinie eine geodätische Linie der Hyperfläche

---

6) Die geodätische Linie ist allgemein durch die Gleichungen $\nabla_{\tau}\dot{\underset{1}{i}}^{a} = \varphi(\tau)\dot{\underset{1}{i}}^{a}$ definiert ($\varphi(\tau)$...Skalar). Da $\hat{g}_{ab}\dot{\underset{1}{i}}^{a}\dot{\underset{1}{i}}^{b} = -1$ ist, ergibt sich daraus, dass $\hat{g}_{ab}\dot{\underset{1}{i}}^{a}\nabla_{\tau}\dot{\underset{1}{i}}^{b} = 0$ gibt. In unserem Falle ist also

$$0 = \hat{g}_{ab}\dot{\underset{1}{i}}^{a}\nabla_{\tau}\dot{\underset{1}{i}}^{b} = \varphi(\tau)\hat{g}_{ab}\dot{\underset{1}{i}}^{a}\dot{\underset{1}{i}}^{b} = -c^2\varphi(\tau),$$

d.h. $\varphi(\tau) \equiv 0$.

(2,2) ist, dann gilt also $P = konst > 0, \; Q = R = 0$ in al- -len ihren Punkten. Damit ist aber unser Satz 3 bewiesen.

Satz 4. Es sei durch die Gleichungen (1,3) eine Weltlinie in $\mathfrak{M}$ beschrieben, die die Eigenschaft (2,1) aus der Definition 1 besitzt. Dann existiert in $\mathfrak{M}$ eine H-Hyperfläche mit den Eigenschaften:

a) sie enthält die betrachtete Weltlinie;

b) die betrachtete Weltlinie ist eine geodätische Weltlinie dieser Hyperfläche (im Sinne der Einbettung im Minkowskischen Raum).

Beweis: Es seien u, v zwei festgewählte Zahlen (reelle). Definieren wir - für jeden Wert τ des Parameters der Weltlinie (1,3) - die Funktionen

$$(2,17) \quad \xi^{\alpha} = \xi^{\alpha}(\tau) = x^{\alpha}(\tau) - \frac{\mu c^2}{P}\, \underset{2}{i}^{\alpha}(\tau) + u\, \underset{3}{i}^{\alpha}(\tau) + v\, \underset{4}{i}^{\alpha}(\tau),$$

wo $x^{\alpha}(\tau), \underset{2}{i}^{\alpha}(\tau), \underset{3}{i}^{\alpha}(\tau), \underset{4}{i}^{\alpha}(\tau)$ den Sinn aus (1,3) und (1,7) haben. Mit Hilfe der Frenetschen Formeln (1,6) und in Bezug auf die Voraussetzung (2,1) erhalten wir aus (2,17):

$$\frac{d\xi^{\alpha}}{d\tau} = \underset{1}{i}^{\alpha} - \frac{\mu c^2}{P}\left(\frac{P}{\mu c^2}\underset{1}{i}^{\alpha} + \frac{Q}{\mu c}\underset{3}{i}^{\alpha}\right) + u\left(-\frac{Q}{\mu c}\underset{2}{i}^{\alpha} + \frac{R}{\mu c}\underset{4}{i}^{\alpha}\right) +$$
$$+ v\left(-\frac{R}{\mu c}\underset{3}{i}^{\alpha}\right) = \underset{1}{i}^{\alpha} - \underset{1}{i}^{\alpha} = 0 ,$$

d.h. ξ^{α} sind Koordinaten eines festen Punktes in $\mathfrak{M}$.

Aus (2,17) folgt - in Bezug auf die Relationen (1,7) -

$$(2,18)_a \quad g_{\alpha\beta}\,(x^{\alpha}(\tau) - \xi^{\alpha})(x^{\beta}(\tau) - \xi^{\beta}) = \frac{\mu^2 c^4}{P^2} + u^2 + v^2 > 0 .$$

Daraus folgt, dass jede Hyperfläche mit der Beschreibung

$$(2,18)_b \quad g_{\alpha\beta}\,(x^{\alpha} - \xi^{\alpha})(x^{\beta} - \xi^{\beta}) = \frac{\mu^2 c^4}{P^2} + u^2 + v^2 ,$$

wo u, v beliebige Zahlen sind und

$$(2,19) \quad \xi^{\alpha} = x^{\alpha}(\tau_0) - \frac{u\, c^2}{P(\tau_0)} \dot{i}_2^{\alpha}(\tau_0) + u\, i_3^{\alpha}(\tau_0) + v\, \dot{i}_4^{\alpha}(\tau_0)$$

(τ_0 ist ein beliebiger Wert des Parameters τ aus dem Definitionsbereich des Parameters der Weltlinie (1,3)) die betrachtete Weltlinie enthält.

Für die Hyperfläche $(2,18)_b$ können wir uns die parametrische Beschreibung (2,5) denken, wo ξ^{α} den Sinn aus (2,19) haben und

$$(2,20) \qquad a = \sqrt{\frac{u^2 c^4}{P^2} + u^2 + v^2}$$

ist.

Bei Beibehaltung der im Beweis des Satzes 3 eingeführten Symbolik gilt dann (2,16) für die betrachtete Weltlinie, d.h. es gelten die Gleichungen

$$(2,21) \qquad \frac{P}{u} \dot{i}_2^{\alpha} = B_a^{\alpha} \nabla_{\tau} \dot{i}_1^{a} + \frac{c^2}{a^2}(x^{\alpha} - \xi^{\alpha}),$$

wo ξ^{α} in (2,17) und a in (2,20) definiert ist.

Für die Wahl $u = 0,\ v = 0$ erhalten wir aus $(2,18)_b$ die H-Hyperfläche

$$(2,22)_a \qquad g_{\alpha\beta}(x^{\alpha} - \xi^{\alpha})(x^{\beta} - \xi^{\beta}) = \frac{u^2 c^4}{P^2},$$

wo - laut (2,17) -

$$(2,22)_b \qquad \xi^{\alpha} = x^{\alpha}(\tau) - \frac{u\, c^2}{P} \dot{i}_2^{\alpha}(\tau),$$

welche eben die betrachtete Weltlinie enthält. Da P positiv ist, erhalten wir weiter aus (2,20) bei der Wahl

$u = v = 0$:

$$a = \frac{\mu c^2}{P} .$$

Daraus und aus $(2{,}22)_b$ ergibt sich dann

$$\frac{c^2}{a^2}(x^\alpha - \xi^\alpha) = \frac{P}{\mu} \dot{i}_2^{\alpha} .$$

Unter Benutzung dieser Relation reduzieren sich die Gleichungen (2,21) auf die Form

$$B_a^\alpha \nabla_\tau \dot{i}_1^a = 0 .$$

Da B_a^α $(a = 1,2,3)$ uanbhängige Vektoren sind, folgt daraus

$$\nabla_\tau \dot{i}_1^a = 0 ,$$

d.h. die betrachtete Weltlinie ist eine geodätische Linie (im Sinne der Minkowskischen Metrik) der H-Hyperfläche $(2{,}22)_a$. Damit ist die Behauptung des Satzes 4 bewiesen.

Bemerkung 3. Die Sätze 3 und 4 geben die Antwort auf das in der Bemerkung 1 (Kap.2) gelegte Problem. Das Resultat, welches in diesen Sätzen auftritt, lässt sich kurz folgendermassen zusammenfassen: Die Weltlinie (1,3) ist eine Weltlinie mit der Eigenschaft (2,1) gerade dann, wenn sie eine geodätische Linie einer H-Hyperfläche ist (d.h. geodätisch im Sinne der in der H-Hyperfläche induzierten Minkowskischen Metrik). Dadurch ist die Klasse aller Weltlinien mit der Eigenschaft (2,1), d.h. die Klasse aller Weltlinien, die der gleichförmig beschleunigten Bewegung entsprechen, geometrisch charakterisiert.

Am Ende des Kapitels 1 wurde ein spezielles Beispiel einer gleichförmig beschleunigten Bewegung angegeben. Aus der

Definition 1 und der Behauptung II, Seite 6 , sieht man ein, dass man zu jeder - (in einem bestimmten Inertialsystem) - gleichförmig beschleunigten Bewegung ein geeignetes Inertialsystem aufstellen kann, in welchem diese Bewegung durch die Gleichungen $(1,32)_a$ beschrieben ist.