Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Alois Švec

Le calcul tensoriel généralisé

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 1 (1960), No. 2, 17–22

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104867`

Commentationes Mathematicase Universitatis Carolinae

1, 2 /1960/

LE CALCUL TENSORIEL GÉNÉRALISÉ

Alois ŠVEC, Praha

1. Tout d'abord, je vais expliquer ce que j'entends par variété $A^r_{p,n}$ $(0 \leqq p \leqq n;\ 0 < r)$, cette variété étant la généralisation de la variété d'∞^r des sousespaces A_p d'un espace affin A_n :

Soit donné un domaine Ω_r / r -dimensionnel / des paramètres, à chaque point $(\xi) \equiv (\xi^1, \dots, \xi^r)$ je fais correspondre un espace affin $A_n(\xi)$ et dans celui-ci un sous-espace $A_p(\xi)$. Soient maintenant $({}^0\xi)$, $({}^1\xi)$ deux points du domaine Ω_r, alors à chaque arc $\gamma \subset \Omega_r$ qui les joint il correspond une affinité entre les espaces $A_n({}^0\xi)$ et $A_n({}^1\xi)$. D'une façon analytique, je peux procéder comme soit : Je choisis dans chaque espace $A_n(\xi)$ un repère $\{M; J_1, \dots, J_n\}_{(\xi)}$ de sorte que $\{M; J_1, \dots, J_p\}_{(\xi)}$ soit le repère d' $A_p(\xi)$; ensuite soient données les fonctions

$$/1/ \qquad \Gamma^\alpha_a = \Gamma^\alpha_a(\xi), \qquad \Gamma^\beta_{a\alpha} = \Gamma^\beta_{a\alpha}(\xi). \qquad x/$$

Si γ est donné d'une facon paramétrique par

$$/2/ \qquad \xi^a = \xi^a(t), \quad {}^0t \leqq t \leqq {}^1t; \quad \xi^a({}^0t) = {}^0\xi^a, \quad \xi^a({}^1t) = {}^1\xi^a,$$

écrivons le systeme d'équations différentielles

$$/3/ \qquad \frac{dN}{dt} = \Gamma^\alpha_a(\xi(t)) \frac{d\xi^a}{dt} J_\alpha, \quad \frac{dJ_\alpha}{dt} = \Gamma^\beta_{a\alpha}(\xi(t)) \frac{d\xi^a}{dt} J_\beta$$

---

x/ Ici $\alpha, \beta, \gamma, \dots = 1, \dots, n;$ $A, B, C, \dots = 1, \dots, p;$
$a, b, c, \dots = 1, \dots, r;$ $M, N, P, \dots = p+1, \dots, n.$

pour le point $N = N(t)$ et les vecteurs $\mathcal{J}_\alpha = \mathcal{J}_\alpha(t)$ d'espace $A_n({}^\circ\xi)$. Considérons la solution du système précédent déterminée par les conditions initiales $\{N({}^\circ t); \mathcal{J}_1({}^\circ t), \dots, \mathcal{J}_n({}^\circ t)\} = \{M; \mathfrak{I}_1, \dots, \mathfrak{I}_n\}_{({}^\circ\xi)}$. L'affinité $\mathbb{A}_{\gamma_\tau}$:

$A_m(\xi(\tau)) \to A_m({}^\circ\xi)$ donnée par $\mathbb{A}_{\gamma_\tau} M(\xi(\tau)) =$

$= N(t)$, $\mathbb{A}_{\gamma_\tau} \mathfrak{I}_\alpha(\xi(\tau)) = \mathcal{J}_\alpha(\tau)$ est l'affinité

mentionnée dans la définition géométrique, $\mathbb{A}_{\gamma_\tau}$ étant associée à la partie γ_τ $({}^\circ t \leq t \leq \tau)$ de γ.

J'appelle : $A_m(\xi)$ <u>espace local</u>, A_p <u>centre</u> (local), $\{M; \mathfrak{I}_\alpha\}_{(\xi)}$ <u>repère local</u>, l'ensemble des fonctions $\Gamma^\alpha_a(\xi)$, $\Gamma^\beta_{a\alpha}(\xi)$ <u>objet de la connexion</u>.

Dans chaque espace local $A_p(\xi(t))$ – $\xi(t)$ étant la courbe (2) – soit choisi un espace $\mathcal{B}_q(t)$. La variété des sous-espaces $\widetilde{\mathcal{B}}_q(t) = \mathbb{A}_{\gamma_t} \mathcal{B}_q(t)$ $({}^\circ t \leq t \leq {}^1 t)$

de l'espace $A_m({}^\circ\xi)$ est appellée <u>développement</u> des espaces $\mathcal{B}_q(t)$ (donnés le long de γ) dans $A_m({}^\circ\xi)$.

Je dois résoudre la question fondamentale : Soit donnée une variété $A^\kappa_{p,n}$ et soient

(4) $\xi^a = \xi^a({}^*\xi^b)$ ou ${}^*\xi^a = {}^*\xi^a(\xi^b)$, $\det|A^a_{a'}| \neq 0$, x)

(5) $M = M' + \varrho^{A'} \mathfrak{I}_{A'}$. $\mathfrak{I}_\alpha = \sigma^{\alpha'}_\alpha \mathfrak{I}_{\alpha'}$ $(\sigma^{M'}_A = 0)$

les transformations des paramètres et des repères locaux, de quelle manière se transforme l'objet de la connexion ?
A l'aide des équations (3) et des équations analogues pour les repères et les paramètres nouveaux on trouve facilement

(6) $\Gamma^{\alpha'}_{a'\beta'} = \sigma^{\alpha'}_\alpha \sigma^\beta_{\beta'} A^a_{a'} \Gamma^\alpha_{a\beta} - \sigma^\alpha_{\beta'} \partial_{a'} \sigma^{\alpha'}_\alpha$,

---

x) Je définis : $\partial_a = \partial/\partial\xi^a$, $A^a_{a'} = \partial_{a'}\xi^a$, $A^{a'}_a = \partial_a \xi^{a'}$.

$$(7) \quad \Gamma^{\alpha'}_{a'} = \sigma^{\alpha'}_{\alpha} A^{a}_{a'} \Gamma^{\alpha}_{a} - \partial_{a'} \varrho^{\alpha'} - \varrho^{A} \sigma^{\alpha'}_{\alpha} \sigma^{\beta}_{A} A^{a}_{a'} \Gamma^{\alpha}_{a\beta} + \varrho^{A} \sigma^{\alpha}_{A} \partial_{a'} \sigma^{\alpha'}_{\alpha}$$

où $\sigma^{\alpha}_{\alpha'}$ sont donnés par

$$(8) \quad \sigma^{\alpha'}_{\alpha} \sigma^{\alpha}_{\beta'} = \delta^{\alpha'}_{\beta'} \text{ d'où on a}$$

$$\partial_a \sigma^{\beta'}_{\alpha} = -\sigma^{\beta'}_{\gamma} \sigma^{\varepsilon'}_{\alpha} \partial_a \sigma^{\gamma}_{\varepsilon'}, \quad \partial_a \sigma^{\gamma}_{\beta'} = -\sigma^{\alpha}_{\beta'} \sigma^{\gamma}_{\varepsilon'} \partial_a \sigma^{\varepsilon'}_{\alpha}.$$

2. Les équations (6), (7) étant compliquées, on peut penser qu'il n'est pas possible de définir les objets qui soient généralisations des tenseurs de torsion et de courbure connus en cas d'espace $A^{n}_{0,n}$ à connexion affine, mais ce n'est pas vrai. Considérons les ensembles de fonctions

$$(9) \quad \tfrac{1}{2} S^{\alpha}_{ab} = \partial_{[b} \Gamma^{\alpha}_{a]} - \Gamma^{\beta}_{[b} \Gamma^{\alpha}_{a]\beta}, \quad \tfrac{1}{2} R^{\alpha}_{ab\beta} = \partial_{[a} \Gamma^{\alpha}_{b]\beta} + \Gamma^{\alpha}_{[a|\gamma|} \Gamma^{\gamma}_{b]\beta};$$

j'appelle le système des fonctions S^{α}_{ab} ou $R^{\alpha}_{ab\beta}$ resp. <u>objet de torsion</u> ou <u>tenseur de courbure</u> resp. On trouve (par un calcul direct que les expressions (9) se transforment selon

$$(10) \quad S^{\alpha'}_{a'b'} = \sigma^{\alpha'}_{\alpha} A^{a}_{a'} A^{b}_{b'} S^{\alpha}_{ab} + \varrho^{A'} \sigma^{\alpha'}_{\alpha} \sigma^{\beta}_{A'} A^{a}_{a'} A^{b}_{b'} R^{\alpha}_{ab\beta},$$

$$(11) \quad R^{\alpha'}_{a'b'\beta'} = \sigma^{\alpha'}_{\alpha} \sigma^{\beta}_{\beta'} A^{a}_{a'} A^{b}_{b'} R^{\alpha}_{ab\beta}.$$

Si $R^{\alpha}_{ab\beta} = 0$ (pour tous a, b, α, β), alors les équations $dJ_{\alpha} = \Gamma^{\beta}_{a\alpha} d\xi^{a} J_{\beta}$ sont complètement intégrables. Si $R^{\alpha}_{ab\beta} = S^{\alpha}_{ab} = 0$, alors les équations

$$(12) \quad dM = \Gamma^{\alpha}_{a} d\xi^{a} J_{\alpha}, \quad dJ_{\alpha} = \Gamma^{\beta}_{a\alpha} d\xi^{a} J_{\beta}$$

sont complètement intégrables et la variété $A^{r}_{p,n}$ considérée est de fait une variété d' ∞^{r} d'espaces A_{p} plongés dans un espace affine A_{n} .

3. De ce qui précède on voit qu'il est naturel d'introduire la définition suivante : L'ensemble des fonctions

$T^{\alpha_1\dots\alpha_p;\,a_1\dots a_u}_{\beta_1\dots\beta_q;\,b_1\dots b_v}$ (en nombre $) n^{p+q} r^{u+v}$

s'appelle $(p/q, u/v)$ -tenseur si les transformations (4) + (5) nous donnent

$$(13)\quad T^{\alpha'_1\dots\alpha'_p,\,a'_1\dots a'_u}_{\beta'_1\dots\beta'_q,\,b'_1\dots b'_v} = \sigma^{\alpha'_1}_{d_1}\dots\sigma^{\alpha'_p}_{d_p}\,\sigma^{\beta_1}_{\beta'_1}\dots\sigma^{\beta_q}_{\beta'_q}\,.$$

$$A^{a'_1}_{a_1}\dots A^{a'_u}_{a_u}A^{b_1}_{b'_1}\dots A^{b_v}_{b'_v}\,T^{\alpha_1\dots\alpha_p,\,a_1\dots a_u}_{\beta_1\dots\beta_q,\,b_1\dots b_v}$$

On voit de (11) que $R^{\alpha}_{ab\beta}$ est un (1/1 ; 0/2)- tenseur. J'écris tout simplément -tenseur au lieu de $(p/q\,;\,0/0)$ -tenseur; le $(1/0)$ -tenseur ou $(0/1)$ -tenseur resp. s'appelle vecteur contravariant ou covariant resp. Il est facile de généraliser l'algèbre tensorielle connueau cas des $(p/q\,;\,u/v)$ - tenseurs.

La dérivation covariante d'un -tenseur peut être définie par les formules

$$(14)\quad \nabla_a T^{\alpha_1\dots\alpha_p}_{\beta_1\dots\beta_q} = \partial_a T^{\alpha_1\dots\alpha_p}_{\beta_1\dots\beta_q} + \sum_{i=1}^{p}\Gamma^{\alpha_i}_{a\alpha}\,T^{\alpha_1\dots\alpha_{i-1}\alpha\,\alpha_{i+1}\dots\alpha_p}_{\beta_1\dots\beta_q} -$$

$$- \sum_{i=1}^{q}\Gamma^{\beta}_{a\beta_i}\,T^{\alpha_1\dots\alpha_p}_{\beta_1\dots\beta_{i-1}\beta\,\beta_{i+1}\dots\beta_q}\,;$$

$\nabla_a T^{\alpha_1\dots\alpha_p}_{\beta_1\dots\beta_q}$ étant un $(p/q\,;\,0/1)$ -tenseur.

4. Supposons une variété $A^{r}_{p,n}$ douée d'un $(0/2)$ -tenseur $g_{\alpha\beta}$ symétrique défini positif. Alors chaque espace local peut être considéré comme une espace euclidien, le produit scalaire de deux vecteurs $\mathcal{J} = u^{\alpha}\mathcal{J}_{\alpha}$, $\mathcal{J}' = v^{\alpha}\mathcal{J}_{\alpha}$ étant défini par $(\mathcal{J},\mathcal{J}') = g_{\alpha\beta}\,u^{\alpha}v^{\beta}$. Je dirai que la variété $A^{r}_{p,n}$ est à connexion euclidienne (et je la désignerai par $E^{r}_{p,n}$) si

$$(15)\quad \nabla_a g_{\alpha\beta} \equiv \partial_a g_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\Gamma^{\gamma}_{a(\alpha}\,g_{\beta)\gamma} = 0.$$

Pour une $E^{r}_{p,n}$ on peut démontrer

(16) $$R_{(ab)\beta\gamma} = R_{ab(\beta\gamma)} = 0 \quad \text{où} \quad R_{ab\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma} R^{\alpha}_{ab\beta}.$$

5. Enfin, je vais montrer que la théorie précedente est une généralisation véritable de la théorie bien connue des espaces à connexion affine. Soit donnée une variété Ω_n (à n dimensions) des paramètres, à chaque point $(\xi) \in \Omega_n$ soit associé un espace centro-affin $A_n(\xi)$ (au centre $M = M(\xi)$) contenant un repère local $\{M; \mathfrak{I}_1, \dots, \mathfrak{I}_n\}$ choisi d'une manière quelconque. Soit (2) un arc paramétrisé d' Ω_n, alors j'appelle le vecteur

(17) $$\mathfrak{I} = \frac{d\xi^{\alpha}}{dt} \mathfrak{I}_{\alpha}$$

son vecteur tangent au point $\xi^{\alpha} = \xi^{\alpha}(t)$; le vecteur (17) étant situé dans $A_n(\xi(t))$. Faisons la convention suivante : Chaque transformation des paramètres (4) doit produire une transformation des repères locaux

(18) $$\mathfrak{I}_{\alpha} = A^{\alpha'}_{\alpha} \mathfrak{I}_{\alpha'}, \quad \text{c'est à dire} \quad \mathfrak{I}_{\alpha'} = A^{\alpha}_{\alpha'} \mathfrak{I}_{\alpha}.$$

Alors on a

$$\mathfrak{I} = \frac{d\xi^{\alpha}}{dt} \mathfrak{I}_{\alpha} = A^{\alpha}_{\alpha'} \frac{d\xi^{\alpha'}}{dt} \mathfrak{I}_{\alpha} = \frac{d\xi^{\alpha'}}{dt} \mathfrak{I}_{\alpha'} = \mathfrak{I}',$$

de sorte que la notion de vecteur tangent est géométrique.

Considérons un espace $\mathfrak{U}_n \equiv A^{n}_{0,n}$ et faisons les suppositions suivantes :

A°) chaque transformation (4) des paramètres induit la transformation (5) des repères locaux où l'on a

(19) $$\rho^{A} = 0, \quad \sigma^{\alpha'}_{\alpha} = A^{\alpha'}_{\alpha}, \quad \sigma^{\alpha}_{\alpha'} = A^{\alpha}_{\alpha'};$$

B°) soit γ' la courbe développée de la courbe γ (2) (soit $\gamma' \subset A_n(^{\circ}\xi)$), alors les vecteurs tangents aux courbes γ et γ' (situés dans $A_n(^{\circ}\xi)$) coïncident.

Parce que le vecteur tangent à la courbe γ' ou γ resp. est $\mathfrak{I}' = \Gamma^{\alpha}_{\beta} \frac{d\xi^{\beta}}{dt} \mathfrak{I}_{\alpha}$ ou $\mathfrak{I} = \delta^{\alpha}_{\beta} \frac{d\xi^{\beta}}{dt} \mathfrak{I}_{\alpha}$

resp., la supposition B^0) est équivalente à la relation

(20) $$\Gamma^{\alpha}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} .$$

Alors on a de (6)

(21) $$\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} = A^{\alpha'}_{\alpha} A^{\beta}_{\beta'} A^{\gamma}_{\gamma'} \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} + A^{\alpha'}_{\omega} \partial_{\beta'} A^{\omega}_{\gamma'} ,$$

l'équation usuelle. L'équation (7) nous donne $\delta^{\alpha'}_{\beta'} = \delta^{\alpha}_{\beta}$, le tenseur $R^{\alpha}_{ab\beta}$ est le tenseur de courbure bien connu et l'objet S^{α}_{ab} se réduit au tenseur de torsion $S^{\alpha}_{\beta\gamma} = 2\,\Gamma^{\alpha}_{[\beta\gamma]}$.

Pour les détails voir mon travail " L'application des variétés à connexion à certains problèmes de la géométrie différentielle " qui paraîtra dans Czech.Math.Journal 1960 (vol. 4) ou 1961 (vol. 1).