Vladimír Horák

Projektive Deformation der Segreschen W-Kongruenzen

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 1 (1960), No. 2, 5–13

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104865

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
1, 2 (1960)

PROJEKTIVE DEFORMATION DER SEGRESCHEN W-KONGRUENZEN

Vladimír HORÁK, Brno

Dieser Artikel enthält eine Zusammenfassung der Artikeln [4] und [5] des Autors.

C. Segre hat in der Arbeit [7] durch die synthetische Metode bewiesen, dass jede W-Kongruenz (der dreidimensionalen Raumen) mit geradlienigen Fokalflächen (wir werden diese W-Kongruenzen als Segresche W-Kongruenzen benennen - die fleknodalen W-Kongruenzen sind ausgeschlossen) in Kleinschen fünfdimensionalem Raume $\overline{P}_5$ eine gewisse Torse bestimmt. Diese Torse bekommen wir folgendenmassen : die asymptotische Transformation, welche durch die Segresche W-Kongruenz zwischen den Fokalflächen realisiert wird, bestimmt auf diesen Fokalflächen eindeutig Paare einander entsprechender Erzeugenden ; die Verbindungslinien der Kleinschen Bilder (K-Bilder) dieser Erzeugenden sind dann die Erzeugenden der erwähnten Torse.

Jede Segresche W-Kongruenz ist in eine Schicht (ein einparametriges System) von Regelscharen zerlegbar. Die komplementaren Regelscharen bilden wieder eine Segresche W-Kongruenz - die sogenannte assoziierte W-Kongruenz.

Wenn die Fokalflächen einer Segreschen W-Kongruenz einem linearen Komplex, bzw. einer linearen Kongruenz angehören, so gehört die assoziierte W-Kongruenz demselben Komplex, bzw. derselben Kongruenz an. W-Kongruenzen, welche keinem linearen Komplex angehören, benennen wir als allgemeine Segresche W-Kongruenzen.

Im Folgenden werden wir 6 Typen von Segreschen W-Kongruenzen unterscheiden :

Typ I. Allgemeine Segresche W-Kongruenz, deren assoziierte W-Kongruenz auch eine allgemeine Kongruenz ist.

Typ II. W-Kongruenz, die einem nicht ausgearteten linearen Komplex angehört, deren assoziierte W-Kongruenz eine allge -

meine W-Kongruenz ist.

Typ III. W-Kongruenz, die einem ausgearteten linearen Komplex angehört - die assoziierte Kongruenz ist eine allgemeine W-Kongruenz.

Typ IV. Allgemeine W-Kongruenz, deren assoziierte Kongruenz einem nicht ausgearteten linearen Komplex angehört.

Typ V. Allgemeine W-Kongruenz, deren assoziierte Kongruenz einem ausgearteten Komplex angehört.

Typ VI. Allgemeine W-Kongruenz, deren assoziierte Kongruenz in eine lineare (nicht parabolische -) Kongruenz ausartet.

Betrachtet man die Segreschen W-Kongruenzen als Paare zweier assoziierten W-Kongruenzen, bestimmen die Kongruenzen der Typen II und IV. bzw. III und V ein Paar assoziierten W-Kongruenzen, das dieselbe Eingenschaft besitzt.

Der W-Kongruenzen der Typen 1) I, 2) IV, 3) VI, 4) V entspricht in Raume $\overline{P}_5$ eine Torse, die Tangentenfläche einer Raumkurve ist, deren Einbettungsraum der Raum 1) $\overline{P}_5$, 2), ein $\overline{P}_4$, 3) ein $\overline{P}_3$ ($\overline{P}_4$ und $\overline{P}_3$ ist kein Tangentialraum der Kleinschen Hyperquadrik Γ - K -Quadrik) 4) ein Tangentialraum $\overline{P}_4$ der K -Quadrik Γ, ist. Der W-Kongruenz des Types II, bzw. III entspricht in $\overline{P}_5$ ein Kegel, dessen Scheitel kein K -Punkt (d. i. ein Punkt der K -Quadrik), bzw. ein K -Punkt ist.

Von der Torse, die eine W-Kongruenz in $\overline{P}_5$ darstellt, bekommen wir die Torse, welche der assoziierten W-Kongruenz entspricht mittels Polarität in Bezug auf die K -Quadrik Γ.

In der Arbeit [4] des Autors werden alle Typen der Torsen untersucht. Beschränken wir uns jetzt nur auf den Typ I.

Es sei $x.x = 2(x_1 x_4 + x_2 x_5 + x_3 x_6) = 0$ die Gleichung der positiv orientierten K -Quadrik (Γ^+); ein beliebiger arithmetischer Punkt $y \in \overline{P}_5$ $(y.y \neq 0)$ ist positiv (negativ) bezüglich Γ^+, wenn $y.y > 0$ $(y.y < 0)$.

Es sei in projektivem Raume $\overline{P}_5$ ein Bogen der geometrischen Kurve $\overline{C} = \{x(t)\}$ gegeben, der keinen Unterraum des $\overline{P}_5$ zum Einbettungsraum besitzt. Wir setzen voraus dass in jedem Punkte $x \in \overline{C}$ eindeutig lineare Schmiegräume $\overline{P}_i$ existieren ($i = 1, 2, 3, 4$, berührt gerade in i-ter Ordnung), die keine Tangentialräume der K-Quadrik sind. Für die arithmetische Kurve $x_i = x_i(t)$ $\left(i = 1, \dots, 6;\ x.x = \varepsilon_1, \frac{dx}{dt}.\frac{dx}{dt} = \varepsilon_2, \varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 1\right.$, der wachsende Parametr t bestimmt den positiven Durchlaufsinn) gilt : In jedem Punkt x dieser Kurve existiert ein Schmiegsechseck mit den Ecken $^1\overline{N}, {}^2\overline{N}, {}^3\overline{N}, {}^4\overline{N}, {}^5\overline{N}, {}^6\overline{N}$, der gleichzeitig ein polares Sechseck der K-Quadrik Γ^+ ist. Die Ecken $^1N, {}^2N, {}^3N, {}^4N, {}^5N, {}^6N$ sind arithmetische Punkte, welche bis auf Vorzeichen π_i $(i = 1, 2, \dots, 6)$ durch die Relationen $^iN . {}^iN = \varepsilon_i$ $(\varepsilon_i^2 = 1)$ bestimmt sind $\left({}^1N = \pi_1 x \right.$, $\left. {}^2N = \pi_2 \frac{dx}{dt} \right)$. Es gelten die Frenetschen Formeln

$$\frac{d\,{}^1N}{dt} = \pi_2\,{}^2N, \quad \frac{d\,{}^2N}{dt} = -\varepsilon_1\varepsilon_2\pi_2\,{}^1N + \varepsilon_1\pi_3 K_1\,{}^3N,$$

$$\text{(1)}_{1-6} \qquad \frac{d\,{}^3N}{dt} = -\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\pi_3 K_1\,{}^2N + \varepsilon_2\pi_4 K_2\,{}^4N,$$

$$\frac{d\,{}^4N}{dt} = -\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4\pi_4 K_2\,{}^3N + \varepsilon_3\pi_5 K_3\,{}^5N, \quad \frac{d\,{}^5N}{dt} = -\varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_5 K_3\,{}^4N + \varepsilon_4\pi_6 K_4\,{}^6N,$$

$$\frac{d\,{}^6N}{dt} = -\varepsilon_4\varepsilon_5\varepsilon_6\pi_6 K_4\,{}^5N$$

wobei $K_i = \sqrt{\left| \frac{d\,{}^{i+1}N}{dt} . \frac{d\,{}^{i+1}N}{dt} - \varepsilon_i K_{i-1}^2 \right|}$ $\quad (i = 1, 2, 3, 4;\ K_0 = 1)$

ist. Die Funktionen $K_i > 0$ und die Vorzeichen ε_j ($j = 1, 2, \dots, 6$, gerade drei von diesen Vorzeichen sind positiv) bilden ein vollständiges System der Differentialinvarianten der orientierten Kurve $x_i = x_i(t)$ bezüglich der Gruppe der Transformationen des Raumes P_5 , welche der Gruppe der unimodularen Kollineationen des Raumes P_3 isomorph ist (die vorliegenden Invarianten werden wir K-Invarianten nennen). Dieser orientierten Kurve entspricht im Raume $\overline{P}_5$ eine Segresche W-Kongruenz (des Types I), die als orientierte Schicht der Regelscharen bis auf unimodulare projektive Transformationen bestimmt ist.

Die Rückkehrkante $\tilde{c}$ der Torse, welche die assoziierte W-Kongruenz darstellt, beschreibt der Punkt ^6N , dessen Parameter u - durch die Differentialgleichung

$du = K_4(t)dt$ bestimmt ist ; es gelten die Relationen

$$\tilde{\varepsilon}_i = \varepsilon_{7-i} \quad , \quad \tilde{K}_j = K_{4-j} : K_4 \quad ,$$

wobei $\tilde{\varepsilon}_i$ und $\tilde{K}_j$ K-Invarianten der durch den Punkt ${}^6N(u)$ beschriebenen Kurve sind.

Ganz analoge Ergebnisse gelten für die W-Kongruenzen der Typen II, IV, VI, da dieselben durch Torsen, die in keinem Tangentialraume der K-Quadrik liegen, oder durch Kegeln deren Scheitel nicht auf der K-Quadrik liegen dargestellt sind. Bei den Typen III und V muss man bei der Untersuchung teilweise anders verfahren, da die entsprechende Torse z.B. des Types III in einem Tangentialraume der K-Quadrik liegt.

Erwähnen wir noch, dass die K-Invarianten der Torse, die eine W-Kongruenz darstellt, den K-Invarianten der Torse, die die Dualisation derselben W-Kongruenz darstellt, gleich sind.

Weitere Untersuchungen knüpfen an die Theorie der Segreschen W-Kongruenzen von J. Klapka an (vgl. [6]). Diese Theorie ist eine Verallgemeinerung der Theorie der Regelflächen von E. Čech.

Das System der Differentialgleichungen

$$
\begin{aligned}
y' &= \left(Q+S-\tfrac{1}{2}\tfrac{\alpha'}{\alpha}\right)y - Pz + \alpha\bar{y},\\
z' &= Ry + \left(S-Q-\tfrac{1}{2}\tfrac{\alpha'}{\alpha}\right)z + \alpha\bar{z},\\
\bar{y}' &= -\left(Q+S+\tfrac{1}{2}\tfrac{\alpha'}{\alpha}\right)\bar{y} + P\bar{z} + \Pi\alpha y,\\
\bar{z}' &= -R\bar{y} + \left(Q-S-\tfrac{1}{2}\tfrac{\alpha'}{\alpha}\right)\bar{z} + \Pi\alpha z,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

$(\Pi^2=1;\ P,Q,R,S,\alpha\neq 0$ sind Funktionen von v / bestimmt in P_3 zwei Paare der Leitkurven zweier Regelflächen, die Fokalflächen einer W-Kongruenz sind; die Striche bedeuten Ableitungen nach den Parameter v, der die Relationen

$$/3/\qquad (y,z,y',z')=(\bar{y},\bar{z},\bar{y}',\bar{z}')=\omega \qquad (\omega^2=1)$$

erfüllt. Die Kongruenzstrahlen sind Verbindungsgeraden der Punkte $A_1=t_1y+t_2z$, $A_2=t_1\bar{y}+t_2\bar{z}$.

Wir werden nurdas Hauptergebnis für die W-Kongruenzen des Types I formulieren und da wieder nur unter der Voraussetzung, dass der Parameter v so gewählt ist, dass $Q^2-PR=$ $=\varepsilon\ (\varepsilon^2=1)$ und /3/ gilt / s.g.normaler Parameter /.

Die, durch das System /2/ bestimmte W-Kongruenz wird im Raume $\bar{P}_5$ durch eine Torse, deren K-Invarianten die Formeln

$$K_1=\left|\frac{\alpha}{S}\right|,\ K_2=\frac{1}{|S|},\ K_3=\frac{\sqrt{|H|}}{2|S|},\ K_4=\frac{|K|}{4|HS|},$$

$$/4/$$

$$\varepsilon_1=-\Pi\omega,\ \varepsilon_2=\Pi\omega,\ \varepsilon_3=-\omega,\ \varepsilon_4=\omega\varepsilon,\ \varepsilon_5=\omega\,\mathrm{sgn}\,H,\ \varepsilon_6=-\omega\varepsilon\,\mathrm{sgn}\,H$$

bestimmen, dargestellt. K_i sind Funktionen des Parameters t, der die Differentialgleichung

$$/5/\qquad \frac{dv}{dt}=\frac{1}{2|S|}$$

erfüllt. Die Vorzeichen ω,Π,ε und die Funktionen $H=Q'^2-P'R'\neq 0$, $\alpha\neq 0$, $S\neq 0$,

$$K=\begin{vmatrix}P & Q & R\\ P' & Q' & R'\\ P'' & Q'' & R''\end{vmatrix}\neq 0$$

als Funktionen des normalen Parameters sind projektive Differentialinvarianten der untersuchten W-Kongruenz.

Bevor wir die projektive Deformation der Segreschen W-Kongruenzen untersuchen werden, führen wir folgende Orientierung derselben ein : Es sei für die W-Kongruenz, die durch das System /2/ mit Gleichungen der vorstehender Reihe nach, der Punkt

A_1 (A_2) der erste (zweite) Brennpunkt, der die erste (zweite) Brennfläche beschreibt ; die Kurven (y) und $(\bar{y})$ ((z) und $(\bar{z})$) seien die ersten (zweiten) Leitkurven der Brennflächen. Der wachsende Parameter v bestimme den positiven Durchlaufsinn der Schicht der Regelscharen. Ändert man die Orientierung, so ändert sich auch in (2) die Reihenfolge der Gleichungen. Die durch das System (2) bestimmte W-Kongruenz bezeichen wir L .

Das System der Differentialgleichungen, welches wir von (2) durch die Transformation

$$(6) \quad \begin{pmatrix} y, & z, & \bar{y}, & \bar{z}, & P, & Q, & R, & S, & \alpha, & v, & t_1, & t_2, & \pi, & \omega \\ {}^1y, & {}^1z, & {}^1\bar{y}, & {}^1\bar{z}, & {}^1P, & {}^1Q, & {}^1R, & {}^1S, & {}^1\alpha, & {}^1v, & \tau_1, & \tau_2, & {}^1\pi, & {}^1\omega \end{pmatrix}$$

bekommen, bestimme eine andere orientierte W-Kongruenz ${}^1L$.

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass L und ${}^1L$ durch irgendeine abwickelbare Transformation ineinander trasformiert werden können, wollen wir nicht jetzt formulieren. Erwähnen wir nur, dass nur abwickelbare Transformationen T : I <—> I, II <—> II, ..., VI <—> VI, I <—> II, I <—> III, II <—> III existieren. Durch eine passende Wahl der Leitkurven der Fokalflächen kann man erreichen, dass die Transformation T die Gleichungen

$$(7) \qquad t_1 = \tau_1, \quad t_2 = \tau_2, \quad v = {}^1v$$

besitzt ; dann ist $P = {}^1P$, $Q = {}^1Q$, $R = {}^1R$ und die Funktionen und Vorzeichen $\pi, \omega, {}^1\pi, {}^1\omega, \alpha, {}^1\alpha, S, {}^1S$ sind beliebige. (Ändert man die Orientierung einer von den Kongruenzen L und ${}^1L$, so ändern sich auch die Relationen $P = {}^1P$, $Q = {}^1Q$, $R = {}^1R$).

Jede abwickelbare Transformation T ist eine projektive Deformation der ersten Ordnung. Zu jeder W-Kongruenz L des Types I, bzw. II, bzw. III existieren drei Klassen von Kongruenzen, welche mir L abwickelbar Transformiert werden können, und zwar : eine Klasse der Kongruenzen des Types I, welche von zwei Funktionen einer Veränderlichen abhängt, eine Klasse der Kongruenzen des Types II und eine weitere Klasse der Kongruenzen des Types III - jede von den zwei letzten Klassen hängt von einer Funktion einer Veränderlichen ab. Zu jeder Kongruenz des Types IV, bzw. V, VI existiert eine Klasse abwickelbar transformierten Kongruenzen ^1L derselben Types ; diese Klasse ist von 2 Funktionen einer Veräanderlichen abhängig.

Die abwickelbaren Transformationen I $\longleftrightarrow$ III , II $\longleftrightarrow$ III können keine projektive Deformationen (2.Ordnung) sein.

Ist L des Types I, bzw. II, so existiert gerade eine Kongruenz ^1L des Types II und eine Klasse, die von einer Funktion einer Veränderlichen abhängt, der Kongruenzen des Types I, für welche die abwickelbare Transformation eine projektive Deformation (2. Ordnung) ist. Sind L und ^1L beide des Types II, so ist T eine projektive Transformation. (vgl. [2] , [3] , S. 290 - 291).

Zu einer Kongruenz L des Types III (bzw. IV, V, VI) existiert eine Klasse von Kongruenzen desselben Types, für welche, die abwickelbare Transformation eine projektive Deformatica ist ; diese Klasse ist von einer Funktion einer Veränderlichen abhängig.

Ist (7) eine projektive Deformation zweier Kongruenzen L und ^1L des Types I, so gilt

$$(8) \quad \pi = {}^1\pi \,, \quad \varepsilon = {}^1\varepsilon \,, \quad |\alpha| = |{}^1\alpha| \,, \quad H = {}^1H \,, \quad K = {}^1K$$

und die zugehörige Schmiegkollineation ist durch Relationen

$$(9) \quad Hy = \varrho\, {}^1y \,, \quad Hz = \varrho\, {}^1z \,, \quad H\bar{y} = \varrho^{-1}\, {}^1\bar{y} \,, \quad H\bar{z} = \varrho^{-1}\, {}^1\bar{z} \,,$$

ausgedrückt, wobei $\varrho^2 = \mathrm{sgn}({}^1\alpha \cdot \alpha)$ ist. Die Transformation (7) ist eine Projektivität, wenn die Relation (8) und noch $S = {}^1S$ gilt.

Analoge Ergebnisse gelten für die anderen Typen der Kongruenzen. Da die Schmiegkollineation nicht von den Parametern t_1 und t_2 abhängt, so ist die Transformation (7) eine projektive Deformation längs aller Kongruenzenstrahlen der Regelscharen $v = {}^1v =$ konst. gleichzeitig.

Die Dualisation (als abwickelbare Transformation) einer beliebigen W-Kongruenzen ist eine projektive Deformation, welche für Kongruenzen der Typen II und III in eine Projektivität ausartet.

Es werden weiter Punkt und Ebenen-Deformationen der Segreschen W-Kongruenzen untersucht.

Der zweite Teil der Abhandlung [5] knüpft an die Abhandlung [4] des Autors an.

Beschränken wir uns jetzt nur auf die W-Kongruenzen des Types I. Die abwickelbare Transformation (7) der Kongruenzen L und ${}^1L$ bestimmt zwischen den Punkten der Rückkehrkante der entsprechenden Torsen in $\overline{P}_5$ eine Korrespondenz, die durch die Differentialgleichung $K_2\, dt = {}^1K_2\, d{}^1t$ bestimmt ist. Die Relationen

$$(10) \qquad K_2 : K_3 : K_4 = {}^1K_2 : {}^1K_3 : {}^1K_4 , \quad \varepsilon_i = \pm {}^1\varepsilon_i \qquad (i = 3,4,5,6)$$

bzw.

$$(11) \qquad K_1 : K_2 : K_3 : K_4 = {}^1K_1 : {}^1K_2 : {}^1K_3 : {}^1K_4 , \quad \varepsilon_i = \pm {}^1\varepsilon_i \qquad (i = 1,2,\dots,6)$$

drücken die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aus, dass L und ${}^1L$ durch eine abwickelbare Transformation, bzw. projektive Deformation transformiert werden können.

Sind L und ${}^1L$ (Kongruenzen desselben Types) in abwickelbarer Transformation, so gilt : die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass auch ihre assoziierten Kongruenzen abwickelbar transformiert werden können, ist, dass L und ${}^1L$ projektiv äquivalent sind.

Ist T eine projektive Deformation einer W-Kongruenzen L auf ihre assoziierte W-Kongruenz, so muss L des Types I sein, und für die K -Invarianten der Torse, die L in $\overline{P}_5$ darsteles gilt

$$(12) \qquad K_1 = K_3 , \quad K_4 = 1 , \quad \varepsilon_i = -\varepsilon_{7-i} \qquad (i = 1,2,\dots,6)$$

wobei die Korrespondenz T die Differentialgleichung $dt = du$ bestimmt. Die Klasse der vorliegenden W-Kongruenzen hängt von 2 Funktionen einer Veränderlichen und von einem Vorzeichen ab, und die projektive Deformation artet in eine Projektivität aus; diese Klasse fällt also mit der Klasse der W-Kongruenzen, die J. Klapka bestimmt hat, zusammen (vgl. [6]).

Andere Ergebnisse der Abhandlung [5] wollen wir nicht anführen.

Über eine interessante Verallgemeinerung der Darstellung der allgemeinen W-Kongruenzen im $\overline{P}_5$ wird der Autor das nächsten Mal informieren.

Literatur :

[1] E. Čech : Transformations développables des congruences des droites (Čechosl.mat.žurnal, Bd. 6 (81) 1956, S. 260-286).

[2] E. Čech : Deformation projective des congruences W (Čechosl.mat.žurnal, Bd. 6 (81), S. 401-414).

[3] E. Čech : Compléments au mémoire : Deformation projective des congruences W (Čechosl.mat.žurnal, Bd. 9 (84) 1959, S. 289-296).

[4] V. Horák : Theorie der Torsen des Kleinschen fünfdimensionalen Raumes und ihre Aplikation auf die Segreschen W-Kongruenzen des dreidimensionalen projektiven Raumes (Čechosl.mat.žurnal, T. 9 (84) 1959, S. 590-628).

[5] V. Horák : Projektive Deformation der Segreschen W-Kongruenzen und ihre Abbildung im Kleinschen fünfdimensionalen Raum (Ist noch nicht erschienen).

[6] J. Klapka : O W-kongruencích s fokálními plochami přímkovými. (Publ. de la fac. des Sc. de l'université Masaryk, Brno 1926, No 69).

[7] C. Segre : Le congruenze rettilinee W aderenti a due superficie rigate. (Accad. Reale delle sc. di Torino, 42 (1906-1907), S. 539-550).