Archivum Mathematicum

Drumi Dimitrov Bajnov; Svetla Dimitrova Milusheva

Об одном варианте метода усреднения для систем интегро-дифференциальных уравнений стандартного типа

Archivum Mathematicum, Vol. 11 (1975), No. 3, 169--173

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104854`

ARCH. MATH. 3, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS,
XI: 169—174, 1975

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СТАНДАРТНОГО ТИПА

Д. Д. БАЙНОВ, С. Д. МИЛУШЕВА

(Поступило в редакцию 25-ого июля 1974 г.)

Метод усреднения для задачи Коши для нелинейных систем интегро-дифференциальных уравнений был обоснован А. Н. Филатовым [1].

В настоящей работе обоснован вариант метода усреднения для систем интегро-дифференциальных уравнений стандартного типа на конечном промежутке длины порядка ε^{-k}, $k \geqq 1$ ($\varepsilon > 0$ – малый параметр).

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра

$$\dot{x} = \varepsilon X\left(t, x, \int_0^t \varphi(t, s, x(s))\,\mathrm{d}s\right) \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

где

$$x, X \in R_n, \quad \varphi \in R_m.$$

Вычислим интеграл

$$\int_0^t \varphi(t, s, x)\,\mathrm{d}s = \psi(t, x)$$

и предположим, что существует предел

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x, \psi(t, x))\,\mathrm{d}t = \overline{X}(x). \tag{3}$$

Тогда усредненной системой первого приближения для системы (1) назовем систему [1]

$$\dot{\xi} = \varepsilon \overline{X}(\xi) \tag{4}$$

с начальным условием

$$\xi(0) = x_0. \tag{5}$$

Отметим, что если $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$ и $A = (a_{ij})_{k,l}$, то по определению

$$\| x \| = [\sum_{i=1}^{n} (x^{(i)})^2]^{\frac{1}{2}}, \qquad \| A \| = [\sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{k} a_{ij}^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Докажем теорему о близости решения $x(t)$ задачи Коши (1), (2) и решения $\xi(t)$ задачи Коши (4), (5).

Теорема 1. *Пусть:*

1. *Функция* $X(t, x, u)$ *определена и непрерывна для всех* $t \geqq 0$ *и* $(x, u) \in \Omega = \Omega(x) \times \Omega(u)$, *где* $\Omega(x)$ *некоторая открытая область пространства* R_n, *а* $\Omega(u) = R_m$.

2. *В области* $\{t \geqq 0, \Omega\}$ *выполняются неравенства*

$$\| X(t, x, u) - X(t, x', u') \| \leqq \lambda(t) \| x - x' \| + \mu(t) \| y - y' \|,$$

$$\| \varphi(t, s, x) - \varphi(t, s, x') \| \leqq \sigma(t, s) \| x - x' \|,$$

где функции $\lambda(t)$, $\mu(t)$ *и* $\sigma(t, s)$ *удовлетворяют условиям*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t^{\tau}} \int_0^t \lambda(\tau)\, d\tau = C_1 = \text{const.},$$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t^{\tau}} \int_0^t \mu(\tau)\, d\tau \int_0^{\tau} \sigma(\tau, s)\, ds = C_2 = \text{const.},$$

а число τ *— неравенству* $0 < \tau < 1$.

3. *Задача Коши* (1), (2), *при предположении что* x_0 *принадлежит области* $\Omega(x)$, *имеет единственное непрерывное и ограниченное решение* $x(t) [\| x(t) \| \leqq b$, $b = \text{const.}]$.

4. *Для всех* $x \in \Omega(x)$ *существует конечный предел*

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T^{\tau}} \int_0^T X[t, x, \psi(t, x)]\, dt = \bar{X}_{\tau}(x), \tag{6}$$

причем предельный переход в (6) *происходит равномерно относительно* $x \in \Omega(x)$.

Тогда, если $x(t)$ *— решение задачи Коши* (1), (2), *а* $\xi(t)$ *— решение задачи Коши* (4), (5), *то для любых* $\varrho > 0$, $\omega > 0$, $L > 0$ *и любого* $\tau_1 \in (\tau, 1)$, *можно указать такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что при* $0 < \varepsilon \leqq \varepsilon_0$, *на отрезке* $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-\frac{1}{\tau_1}}$, *для любой точки* x_0, *принадлежащей области* $\Omega(x)$ *вместе со своей* ϱ *— окрестностью, будет выполняться неравенство*

$$\| x(t) - \xi(t) \| < \omega.$$

Доказательство. Введем функцию

$$v(t, x) = \int\limits_{\Omega(x)} \Delta_a(x - x') \left\{ \int\limits_0^t X[\tau, x', \psi(\tau, x')] \, d\tau \right\} dx', \tag{7}$$

где

$$\Delta_a(x) = \begin{cases} A_a & \text{для} \quad \| x \| \leqq a^{1+\omega} \\ 0 & \text{для} \quad \| x \| > a^{1+\omega} \end{cases} \quad (\omega \geqq 0),$$

а положительная постоянная A_a определяется из условия

$$\int\limits_{R_n} \Delta_a(x) \, dx = 1.$$

В силу условий теоремы существует такая монотонно убывающая функция $\alpha(t) \left[\alpha(t) \to 0 \text{ при } t \to \infty\right]$, что для всех $x \in \Omega(x)$, при $t \geqq 0$, выполняется неравенство

$$\left\| \int\limits_0^t X[\tau, x, \psi(\tau, x)] \, d\tau \right\| \leqq t^{\tau_1} \alpha(t).$$

Следовательно для всех точек x, a — окрестность которых принадлежит области $\Omega(x)$ и для всех $t \geqq 0$ выполняется неравенство

$$\| v(t, x) \| \leqq t^{\tau_1} \alpha(t). \tag{8}$$

Рассмотрим выражение

$$P(t, x) = \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} - X(t, x, \psi(t, x)).$$

Для всех x, a — окрестность которых принадлежит области $\Omega(x)$, при $t \geqq 0$ получаем

$$\| P(t, x) \| \leqq [\lambda(t) + \mu(t) \, \sigma_0(t)] \, a, \tag{9}$$

где

$$\sigma_0(t) = \int\limits_0^t \sigma(t, s) \, ds.$$

Положим

$$\tilde{x}(t) = x_0 + \varepsilon v(t, x_0).$$

Так как $x_0 \in \Omega(x)$ вместе со некоторой своей ϱ — окрестностью, то при $a < \varrho$ для функции $v(t, x_0)$ выполняется неравенство (8). Следовательно на отрезке $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-\frac{1}{\tau_1}}$, если ε достаточно мало ($\varepsilon \leqq \varepsilon_0^{(1)}$), справедливы соотношения

$$(10) \qquad \| \varepsilon v(t, x_0) \| \leqq \varepsilon t^{\tau_1} \alpha(t) \leqq \sup_{0 \leqq \tau \leqq L^{\tau_1}} \tau \alpha \left(\tau^{\frac{1}{\tau_1}} \cdot \varepsilon^{-\frac{1}{\tau_1}} \right) < \delta = \min \left\{ \frac{\varrho}{2}, \frac{\omega}{2} \right\}.$$

Из (10) видно, что на отрезке $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-\frac{1}{\tau_1}}$ ($\varepsilon \leqq \varepsilon_0^{(1)}$) $\tilde{x}(t)$ принадлежит области $\Omega(x)$ вместе с некоторой своей ϱ_1 — окрестностью ($0 < \varrho_1 < \varrho$) и $\| \tilde{x}(t) \| \leqq d$, $d = \text{const}$.

Оценим выражение

$$(11) \qquad Q(t) = \frac{d\tilde{x}}{dt} - \varepsilon X \left\{ t, \tilde{x}, \int_0^t \varphi[t, s, \tilde{x}(s)] \, ds \right\},$$

где $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$.

При $t \geqq 0$ и $\varepsilon \leqq \varepsilon_0^{(1)}$ имеем

$$(12) \qquad \| Q(t) \| \leqq \varepsilon[\lambda(t) + \mu(t) \sigma_0(t)] (a + \delta).$$

Предположим, что на отрезке $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-\frac{1}{\tau_1}}$ $x(t)$ не покидает области $\Omega(x)$. Тогда на этом отрезке из (1) и (11) получаем

$$\left\| \frac{d(x - \tilde{x})}{dt} \right\| \leqq \varepsilon \lambda(t) \| x - \tilde{x} \| + \varepsilon(b + d) \mu(t) \sigma_0(t) + \| Q(t) \| .$$

Отсюда, учитывая, что $x(0) = \tilde{x}(0)$, находим

$$(13) \qquad \| x - \tilde{x} \| \leqq \left(1 + \varepsilon \int_0^t \lambda(\tau) \exp \left\{ \varepsilon \int_0^\tau \lambda(s) \, ds \right\} d\tau \right) \int_0^t [\varepsilon(b + d) \mu(\tau) \cdot \sigma_0(\tau) + \| Q(\tau) \|] \, d\tau.$$

Введем функции

$$\gamma_1(t) = \frac{1}{t^{\tau_1}} \int_0^t \lambda(\tau) \, d\tau,$$

$$\gamma_2(t) = \frac{1}{t^{\tau_1}} \int_0^t \mu(\tau) \sigma_0(\tau) \, d\tau,$$

$\gamma_i(t) \to 0$ $(i = 1, 2)$ *при* $t \to \infty$.

Для правой стороны неравенства (13), на отрезке $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-\frac{1}{\tau_1}}$ при условии, что $\varepsilon \leqq \varepsilon_0^{(1)}$, получаем оценку

$$\left(1 + \varepsilon \int_0^t \lambda(\tau) \exp \left\{ \varepsilon \int_0^\tau \lambda(s) \, ds \right\} d\tau \right) \int_0^t [\varepsilon(b + d) \mu(\tau) \sigma_0(\tau) + \| Q(\tau) \|] \, d\tau \leqq$$

$$\leqq (1 + C)\left\{(a + \delta)\gamma_1\left(L\varepsilon^{-\frac{1}{\tau_1}}\right) + (a + \delta + b + d)\gamma_2\left(L\varepsilon^{-\frac{1}{\tau_1}}\right)\right\} L^{\tau_1},$$

где

$$C = L^{\tau_1}\gamma_1\left(L(\varepsilon_0^{(1)})^{-\frac{1}{\tau_1}}\right) \exp\left\{L^{\tau_1}\gamma_1\left(L(\varepsilon_0^{(1)})^{-\frac{1}{\tau_1}}\right)\right\}.$$

Из (10), (13) и (14) видно, что если ε достаточно мало ($\varepsilon \leqq \varepsilon_0 \leqq \varepsilon_0^{(1)}$), то на отрезке $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-\frac{1}{\tau_1}}$ будет выполняться неравенство

$$\| x - \xi \| = \| x - x_0 \| \leqq \| x - \tilde{x} \| + \| \tilde{x} - x_0 \| < \min\{\varrho, \omega\}. \tag{15}$$

Покажем теперь, что $x(t) \in \Omega(x)$ на всем отрезке $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-\frac{1}{\tau_1}}$.

Действительно, так как начальная точка x_0 принадлежит области $\Omega(x)$ вместе со своей ϱ окрестностью, то на некотором отрезке $0 \leqq t \leqq t^*$ $\left(t^* \leqq L\varepsilon^{-\frac{1}{\tau_1}}\right)$ решение $x(t)$ будет находиться внутри области $\Omega(x)$. Тогда, если выберем ε достаточно мало ($\varepsilon \leqq \varepsilon_0^{(2)} < \varepsilon_0$), то на всем отрезке $0 \leqq t \leqq t^*$, на котором $x(t) \in \Omega(x)$ будем иметь

$$\| x(t) - x_0 \| < \frac{1}{2}\varrho.$$

Если предположить, что $t^* < L\varepsilon^{-\frac{1}{\tau_1}}$, то тогда на отрезке $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-\frac{1}{\tau_1}}$ в силу непрерывности решения $x(t)$ системы (1) найдется такая точка t^{**}, в которой будет выполняться неравенство

$$\varrho > \| x(t^{**}) - x_0 \| > \frac{1}{2}\varrho.$$

Но из этого неравенства видно, что при $t = t^{**}$ решение $x(t)$ еще не покинуло области $\Omega(x)$. Поэтому $t^{**} \in [0, t^*]$ и следовательно

$$\| x(t^{**}) - x_0 \| < \frac{1}{2}\varrho.$$

Полученное противоречие показывает, что $t^* \geqq L\varepsilon^{-\frac{1}{\tau_1}}$.

Этим теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Филатов А. Н. *Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях.* Изд-во „ФАН", Ташкент, 1971.

Д. Байнов
София-, 4 Оборище 23
Болгария

С. Милушева
София-8, Деде агач № 11
Болгария