Květomil Stach

Die algebraische Struktur der allgemeinen Kummerschen Transformationen

Archivum Mathematicum, Vol. 11 (1975), No. 2, 115--121

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104848

ARCH. MATH. 2, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS
XI: 115—122 1975

DIE ALGEBRAISCHE STRUKTUR DER ALLGEMEINEN KUMMERSCHEN TRANSFORMATIONEN

KVĚTOMIL STACH, Ostrava

(Eingegangen am 3. Juni 1974)

In dieser Arbeit will ich einige algebraische Eigenschaften der Kummerschen Transformationen zeigen. Diese Studien knüpfen fest an meine vorhergehenden Arbeiten an (siehe Literaturverzeichnis 3–7). Ich benutze Begriffe und Bezeichnungen aus diesen Arbeiten. An die wichtigsten will ich an dieser Stelle errinern.

Eine Phasenfunktion $\alpha = \alpha(t)$ ist eine Funktion, die auf dem Intervall $D(\alpha)$ definiert und stetig ist, und für die für jedes $x \in E_1$ die Menge der Lösungen der Gleichung $\alpha(t) = x$ keine Häufungspunkte in $D(\alpha)$ besitzt. Die Menge aller Phasenfunktionen bezeichnen wir mit P, die Menge aller Phasenfunktionen, die auf dem Intervall i definiert sind, mit P_i.

Wenn i ein beliebiges Intervall ist, bezeichnen wir mit ε_i die Funktion $\varepsilon_i(t) = t$ für jedes $t \in i$. Wenn wir zu jeder Phasenfunktion α die rechte Einheitsfunktion $r(\alpha) = \varepsilon_{D(\alpha)}$ und die linke Einheitsfunktion $l(\alpha) = \varepsilon_{\alpha(D(\alpha))}$ und zu je zwei Phasenfunktionen α, β, für die die Beziehung $\beta(D(\beta)) = D(\alpha)$ gilt, die Funktion $\gamma = \varphi(\alpha,\beta)$, wobei $\gamma(t) = \alpha(\beta(t))$ für jedes $t \in D(\beta)$, zuordnen, dann können wir zeigen, daß die Algebra $\mathbf{P} = (P; r, l, \varphi)$ eine Kategorie ist. Anstatt $\varphi(\alpha, \beta)$ schreiben wir auch kurz $\alpha\beta$. Die Menge aller Einheitsfunktionen bezeichnet man E.

In der Kategorie $\mathbf{P}$ habe ich eine Relation $\sim$ eingeführt. Wir sagen, daß $\alpha \sim \beta$, wenn $D(\alpha) = D(\beta)$ ist und eine von Null verschiedene Determinante 2. Ordnung $| c_{i,k} |$ existiert so, daß

$$\operatorname{tg} \beta(t) = \frac{c_{11} \operatorname{tg} \alpha(t) + c_{12}}{c_{21} \operatorname{tg} \alpha(t) + c_{22}}, \tag{1}$$

für jedes $t \in D(\alpha)$, für welches (1) einen Sinn hat, gilt. Man kann zeigen, daß $\sim$ eine Äquivalenzrelation in P ist. Zwei Phasenfunktionen α, β sind gerade dann äquivalent, wenn ein solcher zweidimensionaler Raum von stetigen Funktionen existiert, der α und β als seine Phasen hat.

Dabei verstehen wir hier und im wieteren unter einem zweidimensionalen Raum von stetigen Funktionen oder kurz unter einem Raum $\mathfrak{S}$ die Menge aller Funktionen der Form $y = c_1 u + c_2 v$, wobei c_1, c_2 beliebige Konstanten und u, v zwei gegebene stetige unabhängige Funktionen auf einem Intervall i sind. Weiter setzen wir voraus, daß jede Funktion $y \in \mathfrak{S}$ auf jedem abgeschlossenen Intervall $j \subset i$ nur endlich viele Nullstellen hat und daß für jedes $x \in i$ $u(x) + v(x) \neq 0$ ist.

Wenn man mit F die Menge aller Phasenfunktionen, die mit irgendeiner Einhaitsfunktion ε äquivalent sind, bezeichnet, dann kann man zeigen, daß die Algebra **F**, die in F durch **P** induziert ist, ein Gruppoid (im Sinn: eine Kategorie mit inversen Elementen) ist. Dieses Gruppoid nennt man das Fundamentalgruppoid der Kategorie **P**. Weiter haben wir gezeigt: Wenn wir mit S die Menge aller Phasen eines Raums $\mathfrak{S}$ bezeichnen und wenn $\alpha \in S$ ist, so gilt: $S = F \,.\, \alpha$.

Es seien $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ zwei Räume, die auf den Intervallen i_1 und i_2 definiert sind. Es sollen die Funktionen $z(t)$ und $x(t)$ existieren, die die folgenden Eigenschaften haben:

1. z und x sind im i_2 definiert und stetig und x ist monoton.
2. der Wertevorrat der Funktion x ist i_1.
3. zu jeder Funktion $y_1 \in \mathfrak{S}_1$ existiert eine Funktion $y_2 \in \mathfrak{S}_2$ so, daß $y_2(t) = z(t)\, y_1(x(t))$ für jedes $t \in i_2$. Dann sagen wir, der Raum $\mathfrak{S}_1$ ist auf $\mathfrak{S}_2$ vollständig transformierbar und die Funktion x ist die Amplitude dieser Transformation.

Mit M bezeichnen wir in dieser Arbeit die Menge aller monotonen Phasenfunktionen und mit **M** das Gruppoid, das in M durch **P** induziert ist.

1. DIE TRANSFORMATIONEN DES RAUMS $\mathfrak{S}$ AUF SICH SELBST

Satz 1.1: *Es sei* $\alpha_1 \sim \alpha_2$ *und* $\zeta \in M$, *so daß* $(\alpha_1, \zeta) \in \mathrm{D}(\varphi)$ *und* $\alpha_1\zeta = \alpha_2$. *Es sei* $\alpha_3 \sim \alpha_1$. *Dann ist* $(\alpha_3, \zeta) \in \mathrm{D}(\varphi)$ *und es gilt*: $\alpha_1 \sim \alpha_3\zeta$.

Beweis: $(\alpha, \zeta) \in \mathrm{D}(\varphi) \Rightarrow r(\alpha_1) = l(\zeta)$; $\alpha_1\zeta = \alpha_2 \Rightarrow r(\zeta) = r(\alpha_2)$; $\alpha_1 \sim \alpha_2 \Rightarrow$ nach [4] S. 4.2 $r(\alpha_1) = r(\alpha_2)$. Folglich $r(\zeta) = l(\zeta)$. Nach [4] S.4.3 existieren die Funktionen $\beta_1, \beta_2 \in F$, so daß $\alpha_2 = \beta_1\alpha_1$, $\alpha_3 = \beta_2\alpha_1$. Aus $\alpha_3 \sim \alpha_1$ folgt: $r(\alpha_3) = r(\alpha_1) = l(\zeta)$, wovon $(\alpha_3, \zeta) \in \mathrm{D}(\varphi)$. Ferner $\alpha_3\zeta = (\beta_2\alpha_1)\,\zeta = \beta_2(\alpha_1\zeta) = \beta_2\alpha_2 \in \mathbf{F} \,.\, \alpha_2$. Deshalb $\alpha_3\zeta \sim \alpha_2 \sim \alpha_1$ nach [4] S. 4.3.

Definition 1.1: α_1, α_2 seien zwei Phasen des Raums $\mathfrak{S}$. Jede Funktion $\zeta \in M$, für die $\alpha_1\zeta = \alpha_2$ gilt, heißt die Dispersion des Raums $\mathfrak{S}$.

Satz 1.2: *Jede Dispersion* ζ *des Raums* $\mathfrak{S}$ *ist ein Gruppenelement* [2-*Seite* 83_6] *des Gruppoids* **M** *und es gilt* $1(\zeta) = r(\zeta) = r(S)$.

Beweis: Wenn ζ eine Dispersion des Raums $\mathfrak{S}$ ist, existieren die Funktionen $\alpha, \beta \in S$ so, daß $\beta = \alpha\zeta$. Deshalb $r(\beta) = r(\zeta)$, $r(\alpha) = 1(\zeta)$. Nach [4] S. 4.2 ist $r(\alpha) = r(\beta) = r(S)$. Folglich $r(\zeta) = l(\zeta) = r(S)$.

Satz 1.3: *Es sei ζ eine Dispersion im Raum $\mathfrak{S}$. Dann existiert eine vollständige Transformation T des Raums $\mathfrak{S}$ auf sich selbst, so daß ζ die Amplitude dieser Transformation ist* (siehe [6] D. 3.1).

Beweis: ζ ist eine monotone Funktion und nach S. 1.2 ist $D(\zeta) = D(S)$, $\zeta[D(\zeta)] = D(S)$ (in Hinsicht dazu, daß $l(\zeta) = r(S)$ ist) und es existieren die Phasen $\alpha_1, \alpha_2 \in S$, so daß

$$\alpha_2 = \alpha_1\zeta,$$

d. h. für $t \in D(S)$ ist

$$\alpha_2(t) = \alpha_1[\zeta(t)].$$

Wenn $D(S)$ ein offenes Intervall ist, ist unser Satz eine Folgerung des Satzes S. 3.2 aus [6]. Aber den Beweis dieses Satzes können wir ohne Änderung auch für abgeschlossene oder halbabgeschlossene Intervalle benützen.

Satz 1.4: *Alle Dispersionen eines Raums $\mathfrak{S}$ bilden eine als Gruppoid aufgefasste Gruppe $\mathbf{G}(S)$ in der Kategorie $\mathbf{P}$. Das Einheitselement dieser Gruppe ist die Rechtseinheit $r(S)$ des Raums $\mathfrak{S}$.*

Beweis: 1. Wählen wir $\alpha \in S$. Nach [4] S.4.2 ist $r(\alpha) = r(S)$ und deshalb ist $\alpha \,.\, r(S) = \alpha$. Folglich $r(S) \in \mathbf{G}(S) \cap \mathbf{E}$.

2. Es sei $\zeta \in \mathbf{G}(S)$. Da $\zeta \in M$ ist, existiert $\zeta^{-1} \in M$, wobei ζ^{-1} die inverse Funktion zu ζ ist. Nach S.1.2 ist

$$r(\zeta) = l(\zeta) = r(S) \tag{1}$$

und deshalb auch

$$r(\zeta^{-1}) = l(\zeta^{-1}) = r(S). \tag{2}$$

Da $\zeta \in \mathbf{G}(S)$ ist, existieren $\alpha, \beta \in S$, so daß

$$\beta = \alpha\zeta. \tag{3}$$

Aus (1), (2) und (3) erhalten wir:

$$\beta\zeta^{-1} = \alpha$$

und deshalb ist $\zeta^{-1} \in \mathbf{G}(S)$.

3. Es sei $\zeta, \eta \in \mathbf{G}(S)$. Nach S. 1.3 ist $r(S) = r(\zeta) = l(\eta)$, wovon $(\zeta, \eta) \in D(\varphi)$. Die Funktion $\zeta\eta$ ist monoton. Es existieren $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in S$, so daß

$$\beta_1 = \alpha_1\zeta, \beta_2 = \alpha_2\eta. \tag{4}$$

Nach S.1.1 ist auch $\beta_3 = \beta_1\eta \in S$. Aus (4) erhalten wir: $\beta_3 = (\alpha_1\zeta)\,\eta = \alpha_1(\zeta\eta)$ und davon: $\zeta\eta \in \mathbf{G}(S)$.

In Hinsicht auf 1., 2. und 3. ist $\mathbf{G}(S)$ eine Gruppe und nach 1. ist $r(S)$ ihr Einheitselement.

Definition 1.2: Die Gruppe $\mathbf{G}(S)$ aus S.1.4 ist die Gruppe der Dispersionen des Raums $\mathfrak{S}$.

Satz 1.6: *Der Raum $\mathfrak{S}$ habe mindestens eine monotone Phase und es sei $\beta \in S$. Dann ist* $\mathbf{G}(S) = \beta^{-1}\mathbf{F}\beta$.

Beweis: Nach [5] S.3.1 und S.2.6 ist β monoton und deshalb existiert die inverse Funktion β^{-1}.

a) Es sei $\zeta \in \mathbf{G}(S)$. Dann existieren die Funktionen $\alpha_1, \alpha_2 \in S$, so daß

$$\alpha_2 = \alpha_1\zeta,\ 1(\zeta) = r(\alpha_1),\ 1(\alpha_1) = 1(\alpha_2). \tag{5}$$

Nach [4] S.4.1 existieren die Funktionen $\gamma_1, \gamma_2 \in F$, so daß

$$\begin{gathered}\alpha_1 = \gamma_1\beta,\ \alpha_2 = \gamma_2\beta,\ r(\gamma_1) = 1(\beta) = r(\gamma_2),\\ 1(\gamma) = 1(\alpha_1) = 1(\alpha_2) = 1(\gamma_2).\end{gathered} \tag{6}$$

Aus (6) und (5) erhalten wir:

$$\gamma_2\beta = \alpha_2 = \alpha_1\zeta = (\gamma_1\beta)\,\zeta = \gamma_1(\beta\zeta). \tag{7}$$

Da $\gamma_1 \in F$ ist, existiert eine inverse Funktion $\gamma^{-1} \in F$ und wegen (7) ist:

$$(\gamma_1^{-1}\gamma_2)\,\beta = \beta\zeta$$

und

$$\beta^{-1}(\gamma_1^{-1}\gamma_2)\,\beta = \zeta.$$

Nach [4] S.3.4 ist $\gamma^{-1}\gamma_2 \in F$ und $\zeta \in \beta^{-1}\mathbf{F}\beta$.

b) Es sei $\zeta \in \beta^{-1}\mathbf{F}\beta$. Dann existiert eine Funktion $\gamma \in F$, so daß

$$\zeta = \beta^{-1}\gamma\beta.$$

Wegen $\beta, \gamma \in M$ ist auch $\zeta \in M$. Folglich

$$\beta\zeta = \gamma\beta.$$

Nach [4] S.4.3 ist $\gamma\beta \in S$ und nach D.1.1 ist $\zeta \in \mathbf{G}(S)$.

Aus a) und b) folgt: $\beta^{-1}\mathbf{F}\beta = \mathbf{G}(S)$.

2. DIE TRANSFORMATIONEN EINES RAUMS AUF EINEN ANDEREN

Satz 2.1: *Es seien α_1 eine Phase des Raums $\mathfrak{S}_1$ und α_2 eine Phase des Raums $\mathfrak{S}_2$ und es existiere eine Funktion $\zeta \in M$, so daß $(\alpha_1, \zeta) \in D(\varphi)$ und $\alpha_2 = \alpha_1\zeta$. Es sei β_1 eine beliebige Phase des Raums $\mathfrak{S}_1$. Dann ist $(\beta, \zeta) \in D(\varphi)$ und $\beta_2 = \beta_1\zeta \in S_2$.*

Beweis: Nach [4]. S.4.2 und [4] D.4.2 ist

$$r(\alpha_1) = r(\beta_1) = r(S_1). \tag{1}$$

Aus $(\alpha_1, \zeta) \in D(\varphi)$ folgt: $r(\alpha_1) = l(\zeta) = (\beta_1)$. Deshalb $(\beta_1, \zeta) \in D(\varphi)$. Da $\beta_1 \in S_1$, existiert nach [4] S.4.3 eine
Funktion $\gamma \in F$, so daß

(2) $$\alpha_1 = \gamma\beta_1$$

und es gilt: $r(\gamma) = l(\beta_1)$, $l(\gamma) = l(\alpha_1)$. Aus (1), (2) und aus $\alpha_2 = \alpha_1\zeta$ folgt

$$\alpha_2 = (\gamma\beta_1)\,\zeta = \gamma(\beta_1\zeta).$$

Da $\gamma \in F$ ist, existiert die inverse Funktion $\gamma^{-1} \in F$ und es gilt: $r(\gamma_1) = l(\gamma) = l(\alpha_1) = l(\alpha_2)$. Deshalb $(\gamma^{-1}, \alpha_2) \in D(\varphi)$ und

(3) $$\gamma^{-1}\,\alpha_2 = \beta_1\zeta.$$

Da $\gamma^{-1} \in F$ ist, ist nach [4] S.4.3 die Funktion $\beta_2 = \gamma^{-1}\alpha_2 \in S_2$. Aus (3) folgt also unsere Behauptung.

Definition 2.1: Jede Funktion $\zeta \in M$ aus S.2.1 ist eine Dispersion vom Raum $\mathfrak{S}_1$ nach dem Raum $\mathfrak{S}_2$. Die Menge aller Dispersionen von $\mathfrak{S}_1$ nach $\mathfrak{S}_2$ werden wir mit $\mathbf{G}(S_1, S_2)$ bezeichnen.

Satz 2.2: *Es sei ζ eine Dispersion von $\mathfrak{S}_1$ nach $\mathfrak{S}_2$. Dann existiert eine vollständige Transformation des Raums $\mathfrak{S}_1$ auf $\mathfrak{S}_2$ (siehe* [6] D.3.1), *die die Funktion ζ als ihre Amplitude hat.*

Beweis: Es existieren die Funktionen $\alpha_1 \in S_1$ und $\alpha_2 \in S_2$, so daß

(4) $$\alpha_2 = \alpha_1\zeta$$

ist. Deshalb ist $r(\alpha_1) = l(\xi), r(\zeta) = r(\alpha_2)$. Nach [3] S.1.3 ist $D(\zeta) = D[r(\zeta)] = D[r(\alpha_2)] = D(\alpha_2) = D(S_2)$, $\zeta[D(\zeta)] = D[1(\zeta)] = D[r(\alpha_1)] = D(\alpha_1) = D(S_1)$ und da $\zeta \in M$ ist, ist ζ monoton und stetig in $D(S_2)$ und bildet $D(S_2)$ auf $D(S_1)$ ab. Ferner aus (4) folgt für $t \in D(\zeta) = D(S_2)$:

$$\alpha_2(t) = \alpha_1[\zeta(t)].$$

Wenn $D(S_1)$ und $D(S_2)$ offene Intervalle sind, folgt unser Satz aus [6] S.3.2. In anderen Fällen können wir ähnlicherweise fortfahren.

Satz 2.3: $\mathbf{G}(S_1, S_2) \subset \boldsymbol{H}(r(S_1), r(S_2))$ [2-*D*.2.3].

Beweis: Es sei $\zeta \in \mathbf{G}(S_1, S_2)$. Dann existieren die Funktionen $\alpha_1 \in S_1$, $\alpha_2 \in S_2$, so daß $\alpha_2 = \alpha_1\zeta$ und deshalb $r(S_1) = r(\alpha_1) = l(\zeta)$, $r(S_2) = r(\alpha_2) = r(\zeta)$. Also $\zeta \in \boldsymbol{H}(r(S_1), r(S_2))$.

Satz 2.4: *Es sei $\zeta \in \mathbf{G}(S_1, S_2)$. Dann ist $\mathbf{G}(S_1, S_2) = \mathbf{G}(S_1)\,.\,\zeta = \zeta\,.\,\mathbf{G}(S_2)$.*

Beweis: Da $\zeta \in \mathbf{G}(S_1, S_2)$ ist, existieren die Phasen $\alpha_1 \in S_1$ und $\alpha_2 \in S_2$, so daß

(5) $$\alpha_2 = \alpha_1\zeta$$

ist. Nach S.2.3 ist $1(\zeta) = r(S_1)$, $r(\zeta) = r(S_2)$.

I. Es sei $\eta \in \mathbf{G}(S_1, S_2)$. Dann existieren $\beta_1 \in S_1, \beta_2 \in S_2$, für die

$$\beta_2 = \beta_1 \eta \tag{6}$$

und $l(\eta) = r(S_1)$, $r(\eta) = r(S_2)$ ist. Nach [4] S.4.3 existieren die Phasenfunktionen $\varkappa_1, \varkappa_2 \in F$, do daß

$$\beta_1 = \varkappa_1 \alpha_1, \qquad \beta_2 = \varkappa_2 \alpha_2 \tag{7}$$

ist. Aus (7) und (6) folgt:

$$\varkappa_2 \alpha_2 = \varkappa_1 \alpha_1 \eta$$

und da $\varkappa_2 \in F$, ist, existiert $\varkappa_2^{-1} \in F$ und es ist:

$$\alpha_2 = (\varkappa_2^{-1} \varkappa_1)\, \alpha_1 \eta.$$

Aus (5) folgt weiter:

$$\alpha_1 \zeta = (\varkappa_2^{-1} \varkappa_1)\, \alpha_1 \eta.$$

Da ζ monoton ist, existiert $\zeta^{-1} \in P$ und es ist $l(\zeta^{-1}) = r(\zeta) = r(\eta)$ und deshalb:

$$\alpha_1 = (\varkappa_2^{-1} \varkappa_1)\, \alpha_1 (\eta \zeta^{-1}). \tag{4}$$

Da **F** ein Gruppoid ist, ist $\varkappa_2^{-1} \varkappa_1 \in F$ und deshalb nach [4] S.4.3 $(\varkappa_2^{-1} \varkappa_1)\, \alpha_1 \in S_1$. Nach D.1.1 ist wegen (4) $\eta \zeta^{-1} \in \mathbf{G}(S_1)$.
Ferner ist

$$\eta = \eta(\zeta^{-1} \zeta) = (\eta \zeta^{-1})\, \zeta \in \mathbf{G}(S_1)\, \zeta.$$

II. Es sei $\eta \in \mathbf{G}(S_1)\, \zeta$. Dann existiert eine solche Funktion $\varkappa \in \mathbf{G}(S_1)$, daß $\eta = \varkappa \zeta$. Da $\varkappa, \zeta \in M$ sind, ist auch $\eta \in M$. Nach D.1.2, D.1.1 und S.1.1 ist $\beta_1 = \alpha_1 \varkappa \in S_1$. Ferner ist nach [4] S.4.2 $r(\beta_1) = r(\varkappa) = r(S_1)$. Nach S.2.3 ist $r(_1) = l(\zeta)$. Deshalb $(\beta_1, \zeta) \in D(\varphi)$ und es gilt

$$\beta_1 \zeta = \alpha_1 (\varkappa \zeta) = \alpha_1 \eta.$$

Nach S.2.1 ist $\beta_1 \zeta \in S_2$ und deshalb $\alpha_1 \eta \in S_2$ und $\eta \in \mathbf{G}(S_1, S_2)$.

Aus I. und II. folgt $\mathbf{G}(S_1, S_2) = \mathbf{G}(S_1)\, .\, \zeta$.

Die Gleichheit $\mathbf{G}(S_1, S_2) = \zeta \mathbf{G}(S_2)$ kann ähnlicherweise bewiesen sein.

Satz 2.5: *Die Menge* $\mathbf{G}(S_1, S_2)$ *ist ein gemeinsames Element der linksseitigen resp. der rechtsseitigen Zerlegung der Menge* $\boldsymbol{H}(r(S_1), r(S_2))$ *in bezug auf* $\mathbf{G}(S_2)$ *resp.* $\mathbf{G}(S_1)$.

Beweis: Nach S.2.3 ist $\mathbf{G}(S_1, S_2) \subset \boldsymbol{H}(r(S_1), r(S_2))$. Ferner ist zufolge S.1.4 $\boldsymbol{R}[G(S_2)] = \boldsymbol{R}[r(S_2)]$ und $L[G(S_1)] = L[r(S_1)]$. Aus [7] S.2.4 folgt, daß $\{\zeta\, .\, \mathbf{G}(S_2)\}_{\zeta \in L(r(S_1))}$ eine Zerlegung der Menge $G[r(S_2)]$ ist. Ähnlicherweise $\{\mathbf{G}(S_1)\, .\, \zeta\}_{\zeta \in L(r(S_1))}$ ist eine Zerlegung der Menge $L[r(S_1)]$. Ferner ist $L[r(S_1)] \cap \boldsymbol{R}[r(S_2)] = \boldsymbol{H}(r(S_1), r(S_2))$. Beim festgewählten Element $\zeta \in \boldsymbol{H}(r(S_1), r(S_2)($ sind $\mathbf{G}(S_2)\, .\, \zeta$ und $\zeta\, .\, \mathbf{G}(S_1)$ zwei Elemente dieser Zerlegung. Nach S.2.4 fallen diese Elemente zusammen mit $\mathbf{G}(S_1, S_2)$. Unser Satz ist bewiesen.

Satz 2.6: *$\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ seien Räume mit monotonen Phasen. α_1 resp. α_2 seien beliebige Phasen dieser Räume. Dann ist:*

$$\mathbf{G}(S_1, S_2) = \alpha_1^{-1}\mathbf{F}\alpha_2.$$

Beweis: 1. Zuerst zeigen wir, daß $\mathbf{G}(S_1, S_2) = \alpha_1^{-1}S_2$ ist.

a) Es sei $\zeta \in \mathbf{G}(S_1, S_2)$. Dann ist nach S.2.1 $\alpha_2 = \alpha_1\zeta \in S_2$. Da $\alpha_1 \in M$ ist, existiert $\alpha_1^{-1} \in M$ und es gilt: $\alpha_1^{-1}\alpha_2 = \zeta$ und deshalb $\zeta \in \alpha_1^{-1}S_2$.

b) Es sei $\zeta \in \alpha_1^{-1}\alpha_2$. Da α_1^{-1}, $\alpha_2 \in M$ sind, ist $\zeta \in M$ und es gilt: $\alpha_2 = \alpha_1\zeta$, wovon $\zeta \in \mathbf{G}(S_1, S_2)$.

Aus a) und b) folgt $\mathbf{G}(S_1, S_2) = \alpha_1^{-1}S_2$. Nach [4] S.4.3 ist $S_2 = F . \alpha_2$. Folglich $\mathbf{G}(S_1, S_2) = \alpha_1^{-1}\mathbf{F}\alpha_2$.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Borůvka O.: *Differentialtransformationen 2. Ordnung.* VEB Deutsch. Verlag der Wissenschaften — Berlin 1967.

[2] Haase M. und Michler L.: *Theorie der Kategorien.* VEB Deutsch. Verlag der Wissenschaften — Berlin 1966.

[3] Stach K.: *Die Kategorie der Phasenfunktionen* — Spisy přír. fak. UJEP Brno Č. 508 1969, 379—386.

[4] Stach K.: *Eine Äquivalenzrelation in der Kategorie der Phasenfunktionen.* Archivum math. 4, VII: 159—166, 1971.

[5] Stach K.: *Die allgemeinen Eigenschaften der Kummerschen Transformationen* — Spisy přír. fak. UJEP Brno, Č. 478, 1966, 389—410.

[6] Stach K.: *Die vollständigen Kummerschen Transformationen.* Archivum math. Brno, T.3, 1967 — 117—138.

[7] Stach K.: *Über einige Zerlegungen in einer Kategorie.* Archivum math. Brno, T.6 — 1970 — 203—212.

K. Stach
708 00 Ostrava, Kubánská 1506
Tschechoslovakei