Archivum Mathematicum

Josef Niederle

Injektive Objekte in gewissen Kategorien der Verbände

Archivum Mathematicum, Vol. 10 (1974), No. 1, 63--65

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104817`

ARCH. MATH. 1, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS,
X: 63—66, 1974

INJEKTIVE OBJEKTE IN GEWISSEN KATEGORIEN DER VERBÄNDE

JOSEF NIEDERLE, Brno

(Eingegangen am 29. Mai 1973)

Das Ziel dieser Note ist einen elementären Beweis des Satzes 1 anzugeben, aus welchem die in [1] enthaltene Behauptung folgt.

Lemma 1. *Es sei $\mathscr{K}$ eine Kategorie der Verbände, unter deren Objekten sich ein Verband A befindet, der eine vierelementige Kette $o < p < q < r$ als seinen Teilverband umfaßt. Morphismen dieser Kategorie seien gewisse Verbandshomomorphismen, unter denen:*

a) *injektiver Homomorphismus f von A in ein Objekt M derart, daß es ein Element $z \in M$ gibt, das ein relatives Komplement der Elemente $f(p)$, $f(q)$ im Intervall $\langle f(o), f(r) \rangle$ ist*

b) *für jedes nontriviale Objekt $L \in \mathscr{K}$ ein Homomorphismus $h_L : A \to L$ so, daß $h_L(0) = h_L(p) < h_L(q) = h_L(r)$. Dann gibt es in $\mathscr{K}$ kein nontriviales injektives Objekt.*

Beweis. Es sei $L \in \mathscr{K}$ nontrivial. Setzen wir voraus, daβ es einen Homomorphismus $g : M \to L$ gibt, so daβ $g . f = h_L$. Dann offenbar $h_L(o) \leqq g(z) \leqq h_L(r)$, also $h_L(o) = g(z \cap f(q)) = g(z) \cap h_L(q) = g(z) = g(z) \cup h_L(p) = g(z \cup f(p)) = h_L(r)$. Das ist jedoch ein Widerspruch, solcher Homomorphismus g gibt es nicht. Dann können in $\mathscr{K}$ keine nontrivialen injektiven Objekte existieren.

Lemma 2. *Es sei $\mathscr{K}$ eine Kategorie der Verbände, unter deren Objekten es einen Verband A gibt, der eine dreielementige Kette $o < p < q$ als seinen Teilverband umfaßt. Morphismen dieser Kategorie seinen gewisse Verbandshomomorphismen, unter denen:*

a) *injektiver Homomorphismus f von A in ein Objekt M derart, daß es Elemente $z, w \in M$ gibt, welche relative Komplemente des Elementes $f(p)$ im Intervall $\langle f(o), f(r) \rangle$ sind, und dabei $z \cap w = f(o)$, $z \cup w = f(r)$*

b) *für jedes nontriviale Objekt $L \in \mathscr{K}$ ein Homomorphismus $h_L : A \to L$ so, daß $h_L(o) = h_L(p) < h_L(r)$ bzw. $h_L(o) < h_L(p) = h_L(r)$.*

Dann besitzt $\mathscr{K}$ höchstens triviale injektive Objekte.

Beweis. Es sei $h_L(o) = h_L(p) < h_L(r)$ und $L \in \mathscr{K}$ nontrivial. Setzen wir voraus, daß es einen Homomorphismus $g : M \to L$ gibt, so daß $g . f = h_L$. Dann jedoch

$$\begin{aligned} h_L(r) &= g(f(r)) = g\big((z \cup f(p)) \cap (w \cup f(p))\big) = \\ &= \big(g(z) \cup h_L(p)\big) \cap \big(g(w) \cup h_L(p)\big) = \\ &= \big(g(z) \cup h_L(o)\big) \cap \big(g(w) \cup h_L(o)\big) = \\ &= g\big((z \cup f(o)) \cap (w \cup f(o))\big) = h_L(o), \text{ was ein Widerspruch ist.} \end{aligned}$$

So einen Homomorphismus g gibt es also nicht. Dann hat man jedoch in $\mathscr{K}$ keine nontrivialen injektiven Objekte.

Ähnlicherweise für den anderen Fall.

Satz 1. *Volle Unterkategorie $\mathscr{K}$ der Kategorie aller Verbände $\mathscr{L}$, deren Objektenklasse $Ob\mathscr{K}$ in bezug auf die Teilverbände erblich ist, besitzt nontriviale injektive Objekte genau dann, wenn sie eine Unterkategorie der Kategorie aller distributiven Verbände $\mathscr{D}$ ist und wenigstens ein nontriviales Objekt besitzt.*

Beweis. Es sei $\mathscr{K} \nsubseteq \mathscr{D}$. Dann besitzt $\mathscr{K}$ einen nondistributiven Verband, und da sie in bezug auf die Teilverbände erblich ist, besitzt sie entweder einen Verband des Typs I und eine vierelementige Kette, oder einen Verband des Typs II und eine dreielementige Kette.

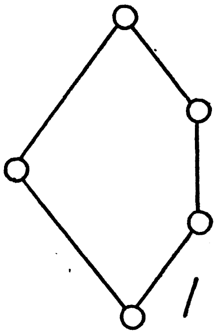

Fig 1

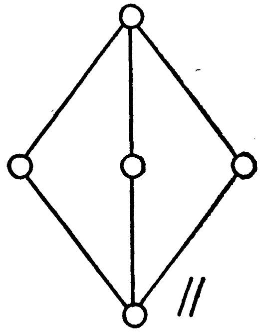

Fig 2

Im ersten Fall sind die Bedingungen von L. 1. erfüllt, wobei A die Kette ist, M der Verband des Typs I, f die entsprechende Einbettung, im zweiten Fall die Bedingungen von L. 2., A ist die Kette, M der Verband des Typs II, f die entsprechende Einbettung. Also besitzt $\mathscr{K}$ keine nontrivialen injektiven Objekte.

Es sei nun umgekehrt $\emptyset \neq \mathscr{K} \subseteq \mathscr{D}$. Es läßt sich leicht zeigen, daß Monomorphismen in $\mathscr{K}$ genau alle injektiven Homomorphismen sind. $\mathscr{K}$ ist erblich, sie besitzt also die zweielementige Kette als ihr Objekt, und diese ist injektiv in $\mathscr{D}$ und daher auch in $\mathscr{K}$.

Folgerung. *$\mathcal{K}$ sei eine volle Unterkategorie der Kategorie aller Verbände $\mathcal{L}$, wobei Ob $\mathcal{K}$ eine äquationale Klasse ist.*

$\mathcal{K}$ besitzt nontriviale injektive Objekte genau dann, wenn $\mathcal{K} = \mathcal{D}$.

Beweis. $\mathcal{K} \neq \mathcal{O} \Rightarrow \mathcal{D} \subseteq \mathcal{K}$, denn jeder distributive Verband ist zu einem Teilverband von einer direkten Potenz der zweielementigen Kette isomorph. Der Rest folgt direkt aus dem Satz 1.

(Diese Behauptung gilt, wenn auch nur *Ob $\mathcal{K}$* in bezug auf die Teilverbände und direkte Produkte erblich ist.)

Satz 2. *Es sei $\mathcal{K}$ eine Kategorie derart, daß Ob $\mathcal{K}$ die Klasse aller komplementären Verbände ist und die Morphismen genau alle möglichen* (0,1)-*Verbandshomomorphismen sind. Dann besitzt $\mathcal{K}$ keine nontrivialen injektiven Objekte.*

Beweis. Folgt aus dem L. 2. A ist der zweidimensionale Boolesche Verband, M ein Verband des Typs II, f Einbettung A in M, h_L bildet ein Atom in A auf O_L, anderes auf 1_L ab.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] A. Day, *Injectives in Equational Classes of Lattices.* Arch. Math. 21, 113—115 (1970)

[2] R. Balbes, *Projective and injective distributive lattices.* Pacific J. Math. 21, 405—420 (1967)

J. Niederle

603 00 Brno, Kamenomlýnská 581

Tschechoslowakei