Archivum Mathematicum

Pavel Galajda

Канонические представления и номограммы элементарных (преимущественно) номографируемых функции Клиффордова комплексного аргумента

Archivum Mathematicum, Vol. 9 (1973), No. 3, 119--134

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104802

ARCH. MATH. 3, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS,
IX: 119—134, 1973

КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И НОМОГРАММЫ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ (ПРЕИМУЩЕСТВЕННО) НОМОГРАФИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ КЛИФФОРДОВА КОМПЛЕКСНОГО АРГУМЕНТА[1]

Павел Галайда, Кошице

(Поступило в редакцию 17. 4. 1972)

§ 0. Сделаем несколько предварительных замечаний.

В силу суждения 1 стр. 200 работы [4] каноническими представлениями аналитической зависимости

$$F(\omega; z) = O, \tag{0.0}$$

где $z = a + bi$,[2] $\omega = p + qi$, $i = \sqrt{-1}$ (гауссов случай) первого номографического класса, называется пара совместных вещественных уравнений Коши

$$\begin{cases} S(p)\,X(a) + Y(b) + H(p) = O, \\ T(q)\,X(a) + Y(b) + R(q) = O, \end{cases} \tag{0.1}$$

где $X(a)$ а $Y(b)$ — прямолинейные, а $S(p)$, $H(p)$, $T(q)$, $R(q)$ — криволинейные, вообще говоря, характеристики (см. там же определение 2).

Если

$$F(X, Y) = O, \tag{0.2}$$

уравнение общего канонического носителя p и q, а $Y = O$ и $X = O$ — уравнения шкал a и b, то, поскольку из предыдущих параграфов видно, что в результате преобразования принципа перенесения

$$\begin{cases} a \to \tilde{a}, \\ b \to \varepsilon i\tilde{b}, \\ p \to \tilde{p}, \\ q \to -\varepsilon i\tilde{q} \\ X(a) \to \tilde{X}(\tilde{a}) = X(\tilde{a}), \\ Y(a) = O \to \tilde{Y}(\tilde{a}) = O, \end{cases} \tag{0.3}$$

[1]) Эта статья является второй частью работы. Первая часть вместе с литературой была опубликована в Arch. Math. 4, VII: 167 — 188, 1971.

[2]) Отметим, что вместо $z = a + bi$ автор в следующих параграфах настоящей работы пишет $z = x + yi$.

$$
(0.3)\qquad \begin{cases} Y(b) & \to \quad \mathring{Y}(\tilde{b}) = Y(-\varepsilon i\tilde{b}), \\ X(b)=O & \to \quad \mathring{X}(\tilde{b}) = O, \\ S(p) & \to \quad \mathring{S}(\tilde{p}) = S(\tilde{p}), \\ H(p) & \to \quad \mathring{H}(\tilde{p}) = H(\tilde{p}), \\ T(q) & \to \quad \mathring{T}(\tilde{q}) = T(-\varepsilon i\tilde{q}), \\ R(q) & \to \quad \mathring{R}(\tilde{q}) = R(-\varepsilon i\tilde{q}), \end{cases}
$$

все функции $\mathring{X}(\tilde{a})$, $\mathring{Y}(\tilde{b})$, $\mathring{S}(\tilde{p})$, $\mathring{H}(\tilde{p})$, $\mathring{T}(\tilde{q})$, $\mathring{R}(\tilde{q})$ для всевозможных вещественных $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{p}$, $\tilde{q}$ имеют вещественные значения, то и номограмма для уравнения

$$
(0.4)\qquad \mathring{F}(w;\, \tilde{z}) = O,
$$

соответствующего по принципу перенесения уравнению (0.0) (а мы только такие уравнения (0.0) и (0.4) рассматривали) определяется каноническими представлениями

$$
(0.5)\qquad \begin{aligned} \mathring{S}(\tilde{p})\, \mathring{X}(\tilde{a}) + \mathring{Y}(\tilde{b}) + \mathring{H}(\tilde{p}) = O, \\ \mathring{T}(\tilde{q})\, \mathring{X}(\tilde{a}) + \mathring{Y}(\tilde{b}) + \mathring{R}(\tilde{q}) = O, \end{aligned}
$$

получаемыми из (0.1) нормальным применением преобразования (0.3) и, следовательно, эта номограмма имеет своим носителем *то же самое каноническое сечение* (0.2), несущее шкалы $\tilde{p}$ и $\tilde{q}$, *и те же самые прямые* (оси координат в данном проективном преобразовании)

$$
(0.6)\qquad Y = O,\ X = O,
$$

на которых расположены соответственно $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$.

Тем не менее, как это не трудно усмотреть из сопоставления формул всех параграфов предыдущей работы с формулами соответствующих, т. е. одинаково занумерованных параграфов настоящей работы совпадения градуировок номограмм соответствующих по принципу перенесения уравнений

$$
(0.7)\qquad F(w;\, z) = O,\ \mathring{F}(\tilde{w};\, \tilde{z}) = O,
$$

для соответствующих аргументов b и $\tilde{b}$, q и $\tilde{q}$ не происходит, а эти градуировки дополняют одна другую до полного покрытия несущей их линии. Градуировки же a и $\tilde{a}$, p и $\tilde{p}$ — совпадают. Возникает естественный вопрос возникает ли то, что носитель (скелет, т. е. носители всех шкал без градуировок) номограмм, соответствующих между собой по принципу перенесения уравнений (0.7) — общий. Или же это обстоятельство должно в каждом отдельном случае отдельно доказываться фактической проверкой того, что получается в каждой паре соответствующих между собой по принципу перенесения случаев (0.7) одно и то же вещественное уравнение (0.2) для общего конического носителя шкал p, q, $\tilde{p} = p$, $\tilde{q}$ и пара прямолинейных шкал, из которых одна шкала несет инцидентные градуировки для $a = \tilde{a}$, а другая — неинцидентные градуировки b и $\tilde{b}$.

Общее доказательство кажется на первый взгляд излишним, поскольку в силу (0.1) за координаты точек шкал ($\mathring{X}$ и $\mathring{Y}$) номограммы уравнения (0.0) принимаются (см. § 1, начало стр. 201 работы [4] надо исправить ошибку, поменяв местами X_b и Y_b)

$$(0.8)\quad \begin{aligned} &X_a = \frac{1}{X(a)}, \quad Y_a = O; \quad X_b = O, \quad Y_b = \frac{1}{Y(b)};\\ &X_p = -\frac{S(p)}{H(p)}, \quad Y_p = -\frac{1}{H(p)}; \quad X_q = -\frac{T(q)}{R(q)}, \quad Y_q = -\frac{1}{R(q)} \end{aligned}$$

а за координаты точек шкал номограмм соответствующего по принципу перенесения уравнения (0.4) принимаются аналогичные выражения, составленные при помощи канонических представлений (0.5). Но тогда в силу (0.3) инцидентивность носителей шкал a и $\tilde{a}$, p и $\tilde{p}$, b и $\tilde{b}$, q и $\tilde{q}$ представляется, на первый взгляд, очевидной, т. к. вместо того, чтобы трактовать переход от (0.0) и (0.1) к (0.4) и (0.5), как преобразование (0.3), т. е. (выписываем главную часть преобразования (0.3)):

$$(0.9)\quad \begin{cases} a \to \tilde{a},\\ b \to -\varepsilon i\tilde{b},\\ p \to \tilde{p},\\ q \to -\varepsilon i\tilde{q}, \end{cases}$$

мы можем, казалось бы, говорить просто о замене

$$(0.10)\quad \begin{cases} a = \tilde{a},\\ b = -\varepsilon i\tilde{b},\\ p = \tilde{p},\\ q = -\varepsilon i\tilde{q}, \end{cases}$$

а тогда вместо (0.3) имеем ли мы просто равенства

$$(0.11)\quad \begin{cases} X(a) = \tilde{X}(\tilde{a}),\\ Y(a) = O = Y(\tilde{a}),\\ X(b) = O = \tilde{X}(\tilde{b}),\\ Y(b) = \tilde{Y}(\tilde{b}),\\ S(p) = \tilde{S}(\tilde{p}),\\ H(p) = \tilde{H}(\tilde{p}),\\ T(q) = \tilde{T}(\tilde{q}),\\ R(q) = \tilde{R}(\tilde{q}), \end{cases}$$

в силу которых уравнение (0.2), связывающее X и Y, немедленно превращается в точно такое же уравнение

$$(0.12)\quad F(\tilde{X};\ \tilde{Y}) = O,$$

связывающее X и Y.

Тем не менее это не верно, т. к. мы имеем не замены (0.10) и их следствия (0.11), а именно преобразования (0.9) и их следствия (0.3), т. к. a, b, p, q —

с одной стороны и $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{p}$, $\tilde{q}$ — с другой стороны, имеют строго вещественные значения и поэтому трактование преобразования (0.9) как замену переменных по формулам (0.10), ввиду явного *несовпадения областей значений правых и левых частей последних равенств, является незаконным*, во всяком случае, не является законным без привлечения дополнительных обоснований, связанных с принципом аналитического продолжения для аналитических функций гиперкомплексного переменного $a + bi + c\varepsilon + d\varepsilon i$. Ведь вопрос приводится к следующему.

Имеется соотношение (0.2), в котором X и Y являются в силу (0.8) вещественными функциями вещественных параметров либо p либо q, причем как в первом, так и во втором случае вещественная функция двух вещественных переменных $F(u; v)$ одна и та же. Спрашивается можно ли считать соотношение (0.2) сохранившимся, если в X и Y в (0.2) вещественные аргументы p и q заменяются аргументами $\tilde{p}$ и $-\varepsilon i\tilde{q}$, где $\tilde{p}$ вещественно и $\tilde{q}$ вещественно и X, $X(p)$ и Y и $Y(p)$, $X(q)$, $Y(q)$ остаются вещественными? Иначе говоря, речь идет о сохранении соотношения (0.2) при аналитическом продолжении X и Y на всю плоскость гиперкомплексного аргумента $a + bi + c\varepsilon + d\varepsilon i$?

Это действительно имеет место, поскольку функции $X(p)$, $Y(p)$, $X(q)$, $Y(q)$ — аналитические функции гиперкомплексного аргумента $a + bi + c\varepsilon + d\varepsilon i$, что и имеет место, т. к. эллиптические функции, как степенные ряды, являются аналитическими функциями.

Другой подход заключается в том, что выражают $\tilde{X}(\tilde{q})$ и $\tilde{Y}(\tilde{q})$ через $X(p)$ и $Y(p)$ или $X(q)$ и $Y(q)$, удовлетворяющие соотношению (0.2), установив соответствующее вещественное соотношение между вещественными аргументами $\tilde{q}$ и p или $\tilde{q}$ и q. Заменив затем в (0.2) $X(p)$ и $Y(p)$ или $X(q)$ и $Y(q)$ через установленные их выражения через $\tilde{X}(\tilde{q})$ и $\tilde{Y}(\tilde{q})$ получают уравнение, связывающее $X(q)$ и $Y(q)$, которое оказывается таким же уравнением (0.2), иначе говоря, неградуированные скелеты номограмм соответствующих в силу принципа перенесения функции гауссова и клиффордова аргументов совпадают.

Это заключение позволяет утверждать, что и соответствующие пучки конических номограмм соответствующих гауссовых и клиффордовых зависимостей (0.7) также совпадают между собой.

Поэтому характеристику пучков конических номограмм пар зависимостей (0.7) мы можем дать на основе пучков номограмм гауссовых уравнений (0.7_1), описанных И. А. Вильнером в соответствующих параграфах главы IV основной работы [4].

§ 1. Мы будем считать ниже γ и N вещественными или чисто мнимыми числами. Тогда, выполняя прямое преобразование перенесения над формулами (1.1), (1.2), (1.4), (1.5) предыдущей работы, получим

$$\tilde{A} + \tilde{B}\varepsilon = \ln \sin (\tilde{P} + \tilde{Q}\varepsilon), \tag{1.1}$$

где

$$\tilde{A} = \operatorname{Re} [\tilde{\gamma}(\tilde{z} - \tilde{z}_0)],\ \tilde{B} = \operatorname{Jm} [\tilde{\gamma}(\tilde{z} - \tilde{z}_0)],\ \tilde{P} = \operatorname{Re} [\tilde{N}(\tilde{w} - \tilde{w}_0)],$$
$$\tilde{Q} = \operatorname{Jm} (\tilde{N}(\tilde{w} - \tilde{w}_0)], \tag{1.2}$$

Пусть $\tilde{U}$ — прямоугольная матрица 3×4 из векторов-столбцов, определяющих 4 шкалы номограммы. Найдем $\tilde{U}$, мы, прежде всего, отметим, что принимая принцип перенесения (см. [1]), мы, наряду с прямым преобразованием перенесения

$$(1.2') \qquad \begin{cases} \gamma \to \tilde{\gamma}, \\ z \to \tilde{z}, \\ w \to \tilde{w}, \\ \gamma^2 \to \tilde{\gamma}^2, \\ \gamma_z \to \tilde{\gamma}_{\tilde{z}}, \\ A \to \tilde{A}, \\ B \to \tilde{B}, \end{cases}$$

получаем таблицу, полезную для практических преобразований при помощи принципа перенесения

$$(1.2'') \qquad \begin{cases} \cos 2P \to \cos 2\tilde{P}, \\ \sin 2P \to \sin 2\tilde{P}, \\ \sin^2 2P \to \sin^2 2\tilde{P}, \\ \cos^2 2P \to \cos^2 2\tilde{P}, \\ \operatorname{sh} 2P \to \operatorname{sh} 2\tilde{P}, \\ \operatorname{ch} 2P \to \operatorname{ch} 2\tilde{P}, \\ \sin 2Q \to -\varepsilon i \operatorname{sh} 2\tilde{Q}, \\ \sin^2 2Q \to -\operatorname{sh}^2 2\tilde{Q}, \\ \cos 2Q \to \operatorname{ch} 2\tilde{Q}, \\ \cos^2 2Q \to \operatorname{ch}^2 2\tilde{Q}, \\ \operatorname{tg}^2 2Q \to -\operatorname{th}^2 2\tilde{Q}, \\ \operatorname{ctg}^2 2Q \to -\operatorname{cth}^2 2\tilde{Q}, \\ \operatorname{sh} 2Q \to -\varepsilon i \sin 2\tilde{Q}, \\ \operatorname{sh}^2 2Q \to -\sin^2 2\tilde{Q}, \\ \operatorname{ch} 2Q \to \cos 2\tilde{Q}, \\ \operatorname{ch}^2 2Q \to \cos^2 2\tilde{Q}, \\ \operatorname{th}^2 2Q \to -\operatorname{tg}^2 2\tilde{Q}. \end{cases}$$

Само собой разумеется, что в таблице (1.2″) можно коэффициент „2“ заменить 1 или любым другим числом. Мы взяли коэффицент, равный 2 только потому, что этот случай нужен для наших формул.

Соотношение (1.4) предыдущей работы примет вид матрицы, определяя номограмму уравнения (1.1).

Подвергая прямому преобразованию перенесения

$$(1.3)\qquad \begin{cases} A & \to & \tilde{A}, \\ B & \to & -\varepsilon i\tilde{B}, \\ P & \to & \tilde{P}, \\ Q & \to & -\varepsilon i\tilde{Q}, \end{cases}$$

получим на основании (1.16) предыдущей работы

$$(1.4)\qquad \left\| \begin{matrix} e^{2A} & 0 & \dfrac{\sin^2 2\tilde{P}}{2\cos 2\tilde{P}} & -\dfrac{\sin^2 2\tilde{Q}}{2\cos 2\tilde{Q}} \\ 0 & \dfrac{1}{\operatorname{ch} 2\tilde{B}} & -\dfrac{1}{\cos 2\tilde{P}} & \dfrac{1}{\cos 2\tilde{Q}} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Если заменить в (1.4) согласно (1.2)

$$(1.5)\qquad \tilde{A} = \operatorname{Re}[\tilde{\gamma}(\tilde{z} - \tilde{z}_0)] = \operatorname{Re}[\tilde{\gamma}(\tilde{z})] - \operatorname{Re}[\tilde{\gamma}\tilde{z}_0],$$

и затем умножить первую строку матрицы (1.4) на $e^{2\operatorname{Re}[\tilde{\gamma}\tilde{z}_0]}$ то и придем к матрице U, фигурирующей вторым множителем в левой части матричного равенства

$$(1.6)\qquad A\tilde{U} = \tilde{U}',$$

или более подробно

После упрощений, при которых номограмма (1.6) претерпевает коллинеарные преобразования (умножение и деление рядов матрицы на отличные от нуля множители), получим, опуская эти множители, следующее выражение матрицы $\tilde{U}'$ следующую номограмму уравнения (1.1) настоящей работы:

$$(1.7)\qquad \tilde{U}' = \left\| \begin{matrix} \tilde{\gamma}^2 & -1 + \operatorname{ch} 2\tilde{B} & \dfrac{\tilde{\gamma}^2}{\sin^2 \tilde{P}} & \dfrac{\tilde{\gamma}^2}{\cos^2 \tilde{Q}} \\ \tilde{\gamma}^2 & 1 + \operatorname{ch} 2\tilde{B} & -\dfrac{\tilde{\gamma}^2}{\cos^2 2\tilde{P}} & -\dfrac{\tilde{\gamma}^2}{\sin^2 \tilde{Q}} \\ e^{2\operatorname{Re}[\tilde{\gamma}(\tilde{z} - \tilde{z}_0)]} & 0 & 1 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Заметим, что непосредственно отсюда или применяя преобразование принципа перенесения к равенствам (1.14) (1.15) предыдущей работы, получим следующие канонические представления и уравнения шкал и носителя номограммы зависимости (1.1) настоящей работы

$$(1.8)\qquad \begin{cases} \left(-\dfrac{\sin^2 2\tilde{P}}{2} e^{2\operatorname{Re}[\tilde{\gamma}\tilde{z}_0]}\right)(e^{-2\operatorname{Re}[\tilde{\gamma}\tilde{z}]}) + (\operatorname{ch} 2\tilde{B}) + (\cos 2\tilde{P}) = 0, \\ \left(-\dfrac{\sin^2 2\tilde{Q}}{2} e^{2\operatorname{Re}[\tilde{\gamma}\tilde{z}_0]}\right)(e^{-2\operatorname{Re}[\tilde{\gamma}\tilde{z}]}) + (\operatorname{ch} 2\tilde{B}) + (-\cos 2\tilde{Q}) = 0, \end{cases}$$

что соответствует (1.14) предыдущей работы

$$(1.9)\quad \begin{cases} X_{\tilde{A}} = e^{2\mathrm{Re}[\tilde{\gamma}\tilde{z}]}; \quad Y_{\tilde{A}} = O; \quad X_{\tilde{B}} = O, \quad Y_{\tilde{B}} = -\dfrac{1}{\mathrm{ch}\, 2\tilde{B}}, \\ X_{\tilde{P}} = \dfrac{\sin^2 2\tilde{P}}{2\cos 2\tilde{P}} e^{2\mathrm{Re}[\tilde{\gamma}\tilde{z}_0]}, \quad Y_{\tilde{P}} = -\dfrac{1}{\mathrm{ch}\, 2\tilde{P}}, \\ X_{\tilde{Q}} = -\dfrac{\sin^2 2\tilde{Q}}{2\cos 2\tilde{Q}} e^{2\mathrm{Re}[\tilde{\gamma}\tilde{z}_0]}, \quad Y_{\tilde{Q}} = \dfrac{1}{\cos 2\tilde{Q}}; \end{cases}$$

$$Y^2_{(\tilde{P};\tilde{Q})} + 2e^{-\mathrm{Re}[\tilde{\gamma}\tilde{z}_0]} X_{(\tilde{P};\tilde{Q})} Y_{(\tilde{P};\tilde{Q})} - 1 = 0,$$

что соответствует (1.15) предыдущей работы.

§ 2. Применяя прямой принцип перенесения (см. работу [1]) к формулам § 2 предыдущей работы, получим зависимость

$$(2.1)\quad \tilde{z} - \tilde{z}_0 = \frac{1}{\tilde{\gamma}} \sin(\tilde{P} + \tilde{Q}\varepsilon),$$

и ее канонические представления

$$(2.2)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\tilde{\gamma}^2}{\sin^2 \tilde{P}}\right) \left[\dfrac{\mathrm{Re}[\tilde{\gamma}(\tilde{z}-\tilde{z}_0)]}{\tilde{\gamma}}\right]^2 + \left(\dfrac{\tilde{\gamma}^2}{\cos^2 \tilde{P}}\right) \left[\dfrac{\mathrm{Jm}\tilde{\gamma}(\tilde{z}-\tilde{z}_0)}{\tilde{\gamma}}\right]^2 = 1, \\ \left(\dfrac{\tilde{\gamma}^2}{\cos^2 \tilde{Q}}\right) \left[\dfrac{\mathrm{Re}[\tilde{\gamma}(\tilde{z}-\tilde{z}_0]}{\tilde{\gamma}}\right]^2 + \left(\dfrac{\tilde{\gamma}}{\sin^2 \tilde{Q}}\right) \left[\dfrac{\mathrm{Jm}\tilde{\gamma}(\tilde{z}-\tilde{z}_0)}{\tilde{\gamma}}\right]^2 = 1. \end{cases}$$

Уравнения шкал номограммы зависимости (2.1) будут, очевидно,

$$(2.3)\quad \begin{cases} X_{\tilde{a}} = \left\{\dfrac{\tilde{\gamma}}{\mathrm{Re}[\tilde{\gamma}(\tilde{z}-\tilde{z}_0)]}\right\}^2, \quad Y_{\tilde{a}} = 0; \quad X_{\tilde{b}} = 0; \quad Y_{\tilde{b}} = \left\{\dfrac{\tilde{\gamma}}{\mathrm{Jm}[\tilde{\gamma}(\tilde{z}-\tilde{z}_0)]}\right\}^2, \\ X_{\tilde{P}} = \dfrac{\tilde{\gamma}^2}{\sin^2 \tilde{P}}, \quad Y_{\tilde{P}} = \dfrac{\tilde{\gamma}^2}{\cos^2 \tilde{P}}; \quad X_{\tilde{Q}} = \dfrac{\tilde{\gamma}^2}{\cos^2 \tilde{Q}}, \quad Y_{\tilde{Q}} = \dfrac{\tilde{\gamma}^2}{\sin^2 \tilde{Q}}. \end{cases}$$

$$\frac{1}{X_{(\tilde{P};\tilde{Q})}} + \frac{1}{Y_{(\tilde{P};\tilde{Q})}} = \frac{1}{\tilde{\gamma}^2}.$$

Обозначая через $\tilde{V}$ матрицу номограммы (2.3), получим

$$(2.4)\quad \tilde{V} \equiv \begin{Vmatrix} \left\{\dfrac{\tilde{\gamma}}{\mathrm{Re}[\tilde{\gamma}(\tilde{z}-\tilde{z}_0)]}\right\}^2 & 0 & \dfrac{\tilde{\gamma}^2}{\sin^2 \tilde{P}} & \dfrac{\tilde{\gamma}^2}{\cos^2 \tilde{Q}} \\ 0 & \left\{\dfrac{\tilde{\gamma}}{\mathrm{Jm}[\tilde{\gamma}(\tilde{z}-\tilde{z}_0)]}\right\}^2 & \dfrac{\tilde{\gamma}^2}{\cos^2 \tilde{P}} & \dfrac{\tilde{\gamma}^2}{\sin^2 \tilde{Q}} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Теперь мы поставили перед собой задачу *найти* очевидного совмещения номограмм (1.7) и (2.4) зависимостей (1.1) и (2.1) настоящей работы, номографически совместных по $\tilde{W}$, поскольку [см. (1.19) и (2.4) предудыщей работы] номографически совместных по W соответствующие им по принципу перенесения зависимостей (1.1) и (2.1) предыдущей работы.

Мы можем матрицы (1.7) и (2.4) настоящей работы переписать в результате допустимых преобразований (коллиниаций) следующим образом: В матрице (1.7) делим элементы 3 и 4 столбцов на $\tilde{\gamma}^2$, затем умножаем 3-ю строку на $\tilde{\gamma}^2$, потом делим элементы первого столбца на $\tilde{\gamma}^2 e^{2\mathrm{Re}[\tilde{\gamma}(\tilde{z}-\tilde{z}_0)]}$ потом вычитаем от элементов первой строки и прибавляем к элементам второй строки соответствующие элементы, т. е. 1 0 1 1 третьей строки. Затем умножим 3 и 4 столбцы соответственно на $\mathrm{tg}^2\tilde{P}$ и $\mathrm{ctg}^2\tilde{Q}$.
Тогда получим вместо (1.7)

$$(1.7') \qquad \tilde{U}' = \left\| \begin{matrix} e^{-2\mathrm{Re}[\tilde{\gamma}(\tilde{z}-\tilde{z}_0)]}-1 & -1+\mathrm{ch}2\tilde{B} & 1 & 1 \\ e^{-2\mathrm{Re}[\tilde{\gamma}(\tilde{z}-\tilde{z}_0)]}+1 & 1+\mathrm{ch}2\tilde{B} & -\mathrm{tg}^4\tilde{P} & -\mathrm{ctg}^4 Q \\ 1 & 0 & \mathrm{tg}^2\tilde{P} & \mathrm{ctg}^2\tilde{Q} \end{matrix} \right\|.$$

Но легко видеть, что мы получим в точности этот результат, если подвергнем матрицу (1.19′) предыдущей работы преобразованию принципа перенесения, заменим B на $-\varepsilon i\tilde{B}$, P на $\tilde{P}$, γ на $\tilde{\gamma}$, z и z_0 на $\tilde{z}$ и $\tilde{z}_0$ и, наконец, Q на $-\varepsilon i\tilde{Q}$.
Тогда, как легко видеть

$$(\mathrm{A}) \qquad \begin{cases} e^{-2\mathrm{Re}[\gamma(z-z_0)]} \to e^{-2\mathrm{Re}[\tilde{\gamma}(\tilde{z}-\tilde{z}_0)]} \\ \cos 2B \to \mathrm{ch}\, 2\tilde{B} \\ \mathrm{tg}\, P \to \mathrm{tg}\, \tilde{P}, \\ \mathrm{sh}\, Q \to -\varepsilon i \sin \tilde{Q}, \\ \mathrm{ch}\, Q \to \cos \tilde{Q}, \\ \mathrm{cth}\, Q \to \varepsilon i\, \mathrm{ctg}\, \tilde{Q}, \\ \mathrm{cth}^2 Q \to -\mathrm{ctg}^2 \tilde{Q}, \\ \mathrm{ctg}^4 Q \to \mathrm{ctg}^4 \tilde{Q}, \end{cases}$$

и матрица U (1.19′) предыдущей работы превращается в матрицу $\tilde{U}'$ (1.7′) настоящей работы.

Пользуясь обозначениями (1.2) настоящей работы, мы перепишем (1.7′) настоящей работы в виде

$$(1.7'') \qquad \tilde{U}' = \left\| \begin{matrix} e^{-2\tilde{A}}-1 & -1+\mathrm{ch}\,2\tilde{B} & 1 & 1 \\ e^{-2\tilde{A}}+1 & 1+\mathrm{ch}\,2\tilde{B} & -\mathrm{tg}^4\tilde{P} & -\mathrm{ctg}^4 Q \\ 1 & 0 & \mathrm{tg}^2\tilde{P} & \mathrm{ctg}^2\tilde{Q} \end{matrix} \right\|.$$

Подвергая теперь матрицу $\tilde{V}$ (2.4) аналогично приведенному сейчас преобразованию матрицы $\tilde{U}'$ (1.7) к виду (1.7″), а именно — деля все столбцы на $\tilde{\gamma}^2$, затем умножая последнюю строку на $\tilde{\gamma}^2$, затем вычитая получившуюся последнюю строку единиц из первой и второй строк, умножая затем 3-ий и 4-ый столбцы на соответственно $\mathrm{tg}^2\tilde{P}$ и $\mathrm{ctg}^2\tilde{Q}$, и, наконец, умножая потом вторую строку на (—1), получим

$$(2.4'') \qquad \tilde{V} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\tilde{A}^2} - 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{\tilde{B}^2} + 1 & -\operatorname{tg}^4 \tilde{P} & -\operatorname{ctg}^4 \tilde{Q} \\ 1 & 1 & \operatorname{tg}^2 \tilde{P} & \operatorname{ctg}^2 \tilde{Q} \end{Vmatrix}.$$

Легко видеть, что матрица V (2.4″) предыдущей работы превращается в точности в эту матрицу (2.4″) для $\tilde{V}$, если в матрице V предыдущей работы сделать преобразование принципа перенесения

$$(\text{Б}) \qquad \left| \begin{array}{rcl} A & \to & \tilde{A}, \\ B & \to & -\varepsilon i \tilde{B}, \\ P & \to & \tilde{P}, \\ Q & \to & -\varepsilon i \tilde{Q}, \\ \operatorname{tg} P & \to & \operatorname{tg} \tilde{P}, \\ \operatorname{ch} Q & \to & \cos \tilde{Q}, \\ \operatorname{sh} Q & \to & -\varepsilon i \sin \tilde{Q}, \\ \operatorname{cth} Q & \to & \varepsilon i \operatorname{ctg} \tilde{Q}, \\ \operatorname{cth}^2 Q & \to & -\operatorname{ctg}^2 \tilde{Q}, \\ \operatorname{cth}^4 Q & \to & \operatorname{ctg}^4 \tilde{Q}. \end{array} \right.$$

Матрица (2.4″) предыдущей работы в результате преобразования (Б) примет вид

$$V \to \begin{Vmatrix} \frac{1}{\tilde{A}^2} - 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{\tilde{B}^2} + 1 & -\operatorname{tg}^4 \tilde{P} & -\operatorname{ctg}^4 \tilde{Q} \\ 1 & 1 & \operatorname{tg}^2 \tilde{P} & \operatorname{ctg}^2 \tilde{Q} \end{Vmatrix},$$

что в точности совпадает с матрицей (2.4″). Вернемся к формулам (2.3). Сопоставление их с формулами (2.3) предыдущей работы обнаруживаем несовпадение уравнений носителей шкал P и Q, $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$. Это кажущееся противоречие нашим общим выводам в вводном параграфе этой работы получилось только потому, что при преобразовании перенесения канонических представлений (2.2) зависимости (2.1) предыдущей работ в канонические представления (2.2) зависимости (2.1) настоящей работы мы переносили множитель минус единицу из множителя $\left[\frac{\operatorname{Jm}\tilde{\gamma}(\tilde{z} - \tilde{z}_0)}{\tilde{\gamma}}\right]^2$ в множитель $\frac{\tilde{\gamma}^2}{\cos^2 \tilde{P}}$ и в $\frac{\tilde{\gamma}^2}{\sin^2 \tilde{Q}}$.

Итак, вместо (2.2) должны из (2.2) предыдущей работы получить

$$(2.5)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\tilde{\gamma}^2}{\sin^2 \tilde{P}}\right)\left[\dfrac{\mathrm{Re}[\tilde{\gamma}(\tilde{z}-\tilde{z}_0)]}{\tilde{\gamma}}\right]^2+\left(-\dfrac{\tilde{\gamma}^2}{\cos^2 \tilde{P}}\right)\left\{-\left[\dfrac{\mathrm{Jm}[\tilde{\gamma}(\tilde{z}-\tilde{z}_0)]}{\tilde{\gamma}}\right]^2\right\}=1, \\ \left(\dfrac{\tilde{\gamma}^2}{\cos^2 \tilde{Q}}\right)\left[\dfrac{\mathrm{Re}[\tilde{\gamma}(\tilde{z}-\tilde{z}_0)]}{\tilde{\gamma}}\right]^2+\left(-\dfrac{\tilde{\gamma}^2}{\sin^2 \tilde{Q}}\right)\left\{-\left[\dfrac{\mathrm{Jm}\tilde{\gamma}(\tilde{z}-\tilde{z}_0)}{\tilde{\gamma}}\right]^2\right\}=1, \end{cases}$$

откуда

$$(2.6)\quad \begin{cases} X_{\tilde{a}}=\left\{\dfrac{\tilde{\gamma}}{\mathrm{Re}[\tilde{\gamma}(\tilde{z}-\tilde{z}_0)]}\right\}^2, \qquad Y_{\tilde{a}}=0; \qquad X_{\tilde{b}}=0; \\ Y_{\tilde{b}}=-\left\{\dfrac{\tilde{\gamma}}{\mathrm{Jm}[\tilde{\gamma}(\tilde{z}-\tilde{z}_0)]}\right\}^2 \\ X_{\tilde{P}}=\dfrac{\tilde{\gamma}^2}{\sin^2 \tilde{P}}; \qquad Y_{\tilde{P}}=-\dfrac{\tilde{\gamma}^2}{\cos^2 \tilde{P}}; \\ X_{\tilde{Q}}=\dfrac{\tilde{\gamma}^2}{\cos^2 \tilde{Q}}; \qquad Y_{\tilde{Q}}=-\dfrac{\tilde{\gamma}^2}{\sin^2 \tilde{Q}}; \\ \dfrac{1}{X_{(\tilde{P};\,\tilde{Q})}}-\dfrac{1}{Y_{(\tilde{P};\,\tilde{Q})}}=\dfrac{1}{\tilde{\gamma}^2}. \end{cases}$$

Матрица номограммы (2.6) есть

$$(2.7)\quad \begin{Vmatrix} \left\{\dfrac{\tilde{\gamma}}{\mathrm{Re}[\gamma(z-z_0)]}\right\}^2 & 0 & \dfrac{\tilde{\gamma}^2}{\sin^2 \tilde{P}} & \dfrac{\tilde{\gamma}^2}{\cos^2 \tilde{Q}} \\ 0 & -\left\{\dfrac{\tilde{\gamma}}{\mathrm{Jm}[\tilde{\gamma}(\tilde{z}-\tilde{z}_0)]}\right\}^2 & -\dfrac{\tilde{\gamma}^2}{\cos^2 \tilde{P}} & -\dfrac{\tilde{\gamma}^2}{\sin^2 \tilde{Q}} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Совместность номограмм (1.7) и (2.7) по переменным $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$ теперь усматривается непосредственно, не требуя даже проективного преобразования.

Однако полученная при этом номограмма — матрица 3×6 порядка имеет бесконечно удаленную шкалу

$$(2.8)\quad \begin{Vmatrix} \tilde{\gamma}^2 & -1+\mathrm{ch}\,2\tilde{B} & \dfrac{\tilde{\gamma}^2}{\sin^2 \tilde{P}} & \dfrac{\tilde{\gamma}^2}{\cos^2 \tilde{Q}} & \left\{\dfrac{\tilde{\gamma}}{\mathrm{Re}[\tilde{\gamma}(\tilde{z}-\tilde{z}_0)]}\right\}^2 & 0 \\ \tilde{\gamma}^2 & 1+\mathrm{ch}\,2\tilde{B} & -\dfrac{\tilde{\gamma}^2}{\cos^2 \tilde{P}} & -\dfrac{\tilde{\gamma}^2}{\sin^2 \tilde{Q}} & 0 & -\left\{\dfrac{\tilde{\gamma}}{\mathrm{Jm}[\tilde{\gamma}(\tilde{z}-\tilde{z}_0)]}\right\}^2 \\ e^{2\tilde{A}} & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

С большой степенью произвола можно это устранить, помножив матрицу (2.8) слева на невырождающуюся числовую, вообще говоря, матрицу 3-го порядка.

Произвол выбора числовой матрицы ограничен априори лишь требованиями получить в матрице произведение, хотя бы одну из трех строк, не содержит ни одного равного нулю элемента. Разумеется, практически важное требование получить в какомто смысле хорошую номограмму внесет дополнительные ограничения на произвол выбора матричного множителя третьего порядка, определяющего проективное преобразование шестишкальной конической номограммы (2.8), второго жанра (коническое сечение, несущее шкалы $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$, 2 прямолинейные шкалы $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ и две прямолинейные шкалы cos Re$[\tilde{\gamma}\tilde{z}]$ и для Jm$[\tilde{\gamma}\tilde{z}]$, т. е. шкалы номограммы системы

$$(2.9)\qquad \tilde{A} + \tilde{B}\varepsilon = e^{\tilde{\gamma}\tilde{z}} = \sin(\tilde{P} + \tilde{Q}\varepsilon).$$

По поводу ошибочной записи этого равенства в виде аналогичном (2.8) предыдущей работы см. замечание по поводу равенств (2.7) и (2.8).

Номограмма (2.8), это пучок ∞^1 конических номограмм (параметр $\tilde{\gamma}$), т. к. с изменением $\tilde{\gamma}$ конические сечения будут изменяться.

Если же разделить элементы 1,3 и 4 столбцов на $\tilde{\gamma}^2$, умножив затем элементы 3-ей строки на $\tilde{\gamma}^2$, то пучка номограмм не будет: все ∞^1 номограмм расположатся на четырех прямых и коническом сечении. Практически это вряд ли целесообразно. Эта шестишкальная номограмма но в гауссовом случае, была получена И. А. Вильнером на стр. 218в § 18, п. 1 работы [4]. Там же (на стр. 218), § 18, п. 2 И. А. Вильнером были указаны номограммы с бесконечно удаленными шкалами.

Сравнивая матрицу (2.8) с соответствующей матрицей (2.6) предыдущей работы, а также сравнивая соответствующие этим матрицам системы уравнений (2.9) этой работы и (2.7) предыдущей работы, видим, что если положить

$$(2.10)\qquad \begin{cases} A \equiv \tilde{A}, \quad P \equiv \tilde{P}, \\ \mathrm{Re}[\gamma(z - z_0)] \equiv \mathrm{Re}[\tilde{\gamma}(\tilde{z} - \tilde{z}_0)], \end{cases}$$

то шкалы A и $\tilde{A}$, Re$[\gamma(z-z_0)]$ и Re$[\tilde{\gamma}(\tilde{z}-\tilde{z}_0)]$, P и $\tilde{P}$ совмещаются равнозначными значениями этих аргументов, тогда как остальные пары шкал не совмещаются. Шкалы B и $\tilde{B}$ лежат на одной прямой, но их градуировки не инциденты. Шкалы Jm$[\gamma(z - z_0)]$ и Jm$[\tilde{\gamma}(\tilde{z} - \tilde{z}_0)]$ лежат на одной прямой, но их равнозначные пометки не инцидентны. Шкалы Q и $\tilde{Q}$ лежат, как P и $\tilde{P}$, на том же коническом сечении, на котором расположены и инцидентные шкалы P и $\tilde{P}$, но шкалы Q и $\tilde{Q}$ не перекрывают одна другую (как и шкалы Jm$[\gamma(z - z_0)]$ и Jm$[\tilde{\gamma}(\tilde{z} - \tilde{z}_0)]$ и шкалы B и $\tilde{B}$.

Это означает, что если все же соединить номограмму (2.8) этой работы с номограммой (2.6) предыдущей работы так, чтобы совпали шкалы $A \equiv \tilde{A}$, Re$[\gamma[z - z_0)] \equiv$ Re$[\tilde{\gamma}(\tilde{z} - \tilde{z}_0)]$, $P \equiv \tilde{P}$, то получим опять-таки коническую номограмму на двух прямых и коническом сечении.

На одной прямой будет общая шкала $A \equiv \tilde{A}$, на другой прямой — общая шкала Re$[\gamma(z - z_0)] \equiv$ Re$[\tilde{\gamma}(\tilde{z} - \tilde{z}_0)]$; на коническом сечении общая шкала $P \equiv \tilde{P}$.

Кроме того, в этой номограмме будет еще одна прямая с непрекрывающимися шкалами B и $\tilde{B}$ и еще одна прямая с непрекрывающимися шкалами Jm$[\gamma(z - z_0)]$ и Jm$[\tilde{\gamma}(\tilde{z} - \tilde{z}_0)]$ и на коническом сечении на участке его, дополняющем шкалу P, будут расположены шкалы Q и $\tilde{Q}$. Эта номограмма, состоящая, таким образом, из одного конического сечения и четырех прямых будет 4-го жанра (4 шкалы на коническом сечении).

Эту номограмму можно также представить одной матрицей 3×12 порядка, на 3 пары столбцов в ней отождествляются поскольку имеют место соотношения (2.10).

§ 3. Соответственно зависимостям нулевого жанра (3.1), (3.2), (3.3) предыдущей работы, делая в них и в соответствующих им каконических представлениях (3.1_1), (3.1_2), (3.2_1), (3.2_2), (3.3_1), (3.3_2) прямое преобразование перенесения (2.5) главы 1 работы [1], получим (см. также (.1.2′), (.1.2″)) следующие результаты. Для зависимостей

$$\underline{\tilde z = \ln \operatorname{th} \omega}, \qquad e^{\tilde z} = \operatorname{th} \tilde\omega, \qquad \operatorname{sh} 2\tilde w = -\frac{1}{\operatorname{sh}\tilde z},$$

$$(3.1) \qquad \operatorname{th} \tilde z = -\frac{1}{\operatorname{ch} 2\tilde w},$$

$$\operatorname{th} 2\tilde w = \frac{1}{\operatorname{ch} \tilde z}, \qquad \underline{-2\tilde w = \ln \operatorname{th}\left(-\frac{\tilde z}{2}\right)},$$

получим канонические представления

$$(3.1_1) \qquad \begin{cases} (\operatorname{ch}^2 2\tilde p)(\operatorname{ch} 2\tilde y) + (-\operatorname{sh}^2 2\tilde p)(\operatorname{ch} 2\tilde x) + (+1) = 0, \\ (\operatorname{ch}^2 2\tilde q)(\operatorname{ch} 2\tilde y) + (-\operatorname{sh}^2 2\tilde q)(\operatorname{ch} 2\tilde x) + (-1) = 0, \end{cases}$$

или

$$(3.1_2) \qquad \begin{cases} (-\operatorname{sh}^2 \tilde x)(\operatorname{ch} 4\tilde p) + (\operatorname{ch}^2 \tilde x)(\operatorname{ch} 4\tilde q) + (+1) = 0, \\ (-\operatorname{sh}^2 \tilde y)(\operatorname{ch} 4\tilde p) + (\operatorname{ch}^2 \tilde y)(\operatorname{ch} 4\tilde q) + (-1) = 0, \end{cases}$$

что равносильно (3.1).

Для равносильных между собой зависимостей нулевого жанра

$$\tilde z = 2\operatorname{arctg} e^{\tilde w} - \frac{\pi}{2}, \qquad \frac{\tilde z}{2} + \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} e^{\tilde w},$$

$$\tilde w = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\tilde z}{2} + \frac{\pi}{4}\right), \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\tilde z}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = e^{\tilde w},$$

$$(3.2) \qquad \underline{\operatorname{tg}\frac{\tilde z}{2} = \operatorname{th}\frac{\tilde w}{2}}, \qquad \sin \tilde z = \operatorname{th} \tilde w, \qquad \cos \tilde z = \pm \frac{1}{\operatorname{ch} \tilde w},$$

$$\operatorname{tg} \tilde z = \pm \operatorname{ch} \tilde w, \qquad \underline{\operatorname{th}\frac{i\tilde z}{2} = \operatorname{tg}\frac{i\tilde w}{2}},$$

получим канонические представления

$$(3.2_1) \qquad \begin{cases} (\cos 2\tilde x) + (\cos 2\tilde y)(\operatorname{th}^2 \tilde p) + \left(-\frac{1}{\operatorname{ch}^2 \tilde p}\right) = 0, \\ (\cos 2\tilde x) + (\cos 2\tilde y)(\operatorname{cth}^2 \tilde q) + \left(-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 \tilde q}\right) = 0, \end{cases}$$

или

$$(3.2_2) \qquad \begin{cases} (-\operatorname{ctg}^2 \tilde x)(\operatorname{ch} 2\tilde p) + (\operatorname{ch} 2\tilde q) + \left(\frac{1}{\sin^2 \tilde x}\right) = 0, \\ (-\operatorname{tg}^2 \tilde y)(\operatorname{ch} 2\tilde p) + (\operatorname{ch} 2\tilde q) + \left(-\frac{1}{\cos^2 \tilde y}\right) = 0. \end{cases}$$

Для равносильных между собой зависимостей нулевого жанра (см. (3.3) предыдущей работы)

$$\tilde{w} = \ln \operatorname{th} \tilde{z}, \qquad e^{\tilde{w}} = \operatorname{th} \tilde{z}, \qquad \operatorname{sh} 2\tilde{z} = -\frac{1}{\operatorname{sh} \tilde{w}},$$

$$(3.3) \qquad \tilde{w} + \frac{\pi i}{2} = \ln \operatorname{tg}(i\tilde{z}), \qquad \operatorname{th} 2\tilde{z} = \frac{1}{\operatorname{ch} \tilde{w}},$$

$$-2\tilde{z} = \ln \operatorname{th}\left(-\frac{\tilde{w}}{2}\right),$$

получим канонические представления

$$(3.3_1) \qquad \begin{cases} (-\operatorname{th}^2 \tilde{p})(\operatorname{ch} 4\tilde{x}) + (\operatorname{ch} 4\tilde{y}) + \left(\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 \tilde{p}}\right) = 0, \\ (-\operatorname{th}^2 \tilde{q})(\operatorname{ch} 4\tilde{x}) + (\operatorname{ch} 4\tilde{y}) + \left(-\dfrac{1}{ch^2 \tilde{q}}\right) = 0, \end{cases}$$

или

$$(3.3_2) \qquad \begin{cases} (-\operatorname{th}^2 2\tilde{x})(\operatorname{ch} 2\tilde{p}) + (\operatorname{ch} 2\tilde{q}) + \left(\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 2\tilde{x}}\right) = 0, \\ (-\operatorname{tg}^2 2\tilde{y})(\operatorname{ch} 2\tilde{p}) + (\operatorname{ch} 2\tilde{q}) + \left(-\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 2\tilde{y}}\right) = 0. \end{cases}$$

Во всех трех случаях теперь легко, следуя $(3.1_1')$, $(3.1_2')$, $(3.2_1')$, $(3.2_2')$, $(3.3_1')$, $(3.3_2')$ предыдущей работы, написать матрицы номограммы и прямо убедиться в проектной совместности по $\tilde{w}$ номограмм зависимостей (3.2) и (3.3) совершенно аналогично тому как это имело место для гауссовых зависимостей (3.2) и (3.3).

При помощи канонических ли представлений (3.1), (3.2) (3.3) или же применяя принцип перенесения к номограммам-матрицам (3.1′), (3.2′), (3.3′) предыдущей работы, мы получим следующие номограммы-матрицы соответствующих соотношениям (3.1), (3.2), (3.3) настоящей работы:

$$(3.1_1') \qquad \begin{Vmatrix} \dfrac{1}{\operatorname{ch} 2\tilde{x}} & 0 & \operatorname{sh}^2 2\tilde{p} & -\operatorname{sh}^2 2\tilde{q} \\ 0 & \dfrac{1}{\operatorname{ch} 2\tilde{y}} & -\operatorname{ch}^2 2\tilde{p} & \operatorname{ch}^2 2\tilde{q} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$(3.1_2') \qquad \begin{Vmatrix} \dfrac{1}{\operatorname{ch} 4\tilde{p}} & 0 & \operatorname{sh}^2 \tilde{x} & -\operatorname{sh}^2 \tilde{y} \\ 0 & \dfrac{1}{\operatorname{ch} 4\tilde{q}} & -\operatorname{ch}^2 \tilde{x} & \operatorname{ch}^2 \tilde{y} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Таковы номограммы-матрицы (3.1), т. е. для соотношений равносильных $\tilde{z} = \ln \operatorname{th} \tilde{w}$; (3.1)

$$(3.2_1') \qquad \left\| \begin{matrix} \dfrac{1}{\cos 2\tilde{x}} & 0 & \operatorname{ch}^2\tilde{p} & \operatorname{sh}^2\tilde{q} \\ 0 & \dfrac{1}{\cos 2\tilde{y}} & \operatorname{sh}^2\tilde{p} & \operatorname{ch}^2\tilde{q} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\|,$$

$$(3.2_2') \qquad \left\| \begin{matrix} \dfrac{1}{\operatorname{ch} 2\tilde{p}} & 0 & \cos^2\tilde{x} & -\sin^2\tilde{y} \\ 0 & \dfrac{1}{\operatorname{ch} 2\tilde{q}} & -\sin^2\tilde{x} & \cos^2\tilde{y} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Для зависимостей равносильных зависимостям

$$(3.2) \qquad \tilde{w} = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\tilde{z}}{2} + \frac{\pi}{4}\right), \qquad \operatorname{tg}\frac{\tilde{z}}{2} = \operatorname{th}\frac{\tilde{w}}{2};$$

$$(3.3_1') \qquad \left\| \begin{matrix} \dfrac{1}{\operatorname{ch} 4\tilde{x}} & 0 & \operatorname{sh}^2\tilde{p} & -\operatorname{sh}^2\tilde{q} \\ 0 & \dfrac{1}{\operatorname{ch} 4\tilde{y}} & -\operatorname{ch}^2\tilde{p} & \operatorname{ch}^2\tilde{q} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\|,$$

$$(3.3_2') \qquad \left\| \begin{matrix} \dfrac{1}{\operatorname{ch} 2\tilde{p}} & 0 & \operatorname{sh}^2 2\tilde{x} & -\operatorname{sh}^2 2\tilde{y} \\ 0 & \dfrac{1}{\operatorname{ch} 2\tilde{q}} & -\operatorname{ch}^2 2\tilde{x} & \operatorname{ch}^2 2\tilde{y}, \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

для зависимостей равносильных соотношению

$$(3.3) \qquad \tilde{w} = \ln \operatorname{th} \tilde{z}.$$

Этим же способом, исходя из номограмм-матриц предыдущей работы, без труда получаются номограммы-матрицы для всех остальных зависимостей этой работы.

§ 4. Рассмотрим теперь соотношение нулевого жанра

$$(4.1) \qquad \tilde{w} = \ln \operatorname{tg} \tilde{z}.$$

При помощи прямого принципа перенесения (2.5) работы [1] получим из (4.3_1), (4.3_2) предыдущей работы, пользуясь таблицей (1.2″) настоящей работы, канонические представления

$$(4.1_1) \qquad \begin{cases} (\cos 4\tilde{x}) + (\cos 4\tilde{y})(-\operatorname{th}^2\tilde{p}) + \left(\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2\tilde{p}}\right) = 0, \\ (\cos 4\tilde{x}) + (\cos 4\tilde{y})(-\operatorname{cth}^2\tilde{q}) + \left(\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2\tilde{q}}\right) = 0, \end{cases}$$

или

$$(4.1_2)\qquad \begin{cases} (-\mathrm{tg}^2\, 2\tilde{x})\,(\mathrm{ch}\, 2\tilde{p}) + (\mathrm{ch}\, 2\tilde{q}) + \left(\dfrac{1}{\cos^2 2\tilde{x}}\right) = 0, \\ (-\mathrm{tg}^2\, 2\tilde{y})\,(\mathrm{ch}\, 2\tilde{p}) + (\mathrm{ch}\, 2\tilde{q}) + \left(-\dfrac{1}{\cos^2 2\tilde{y}}\right) = 0. \end{cases}$$

§ 5. Аналогично соображению § 5 предыдущей работы рассмотрим теперь зависимость нулевого жанра

$$(5.1)\qquad \mathrm{cth}\,\tilde{w} = \mathrm{tg}\,\tilde{z}.$$

Применяя прямой принцип перенесения к представлениям (5.4_1), (5.4_2) предыдущей работы, получим

$$(5.1_1)\qquad \begin{cases} (\cos 4\tilde{x}) + (\cos 4\tilde{y})\,(\mathrm{th}^2\, 2\tilde{p}) + \left(-\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2\, 2\tilde{p}}\right) = 0, \\ (\cos 4\tilde{x}) + (\cos 4\tilde{y})\,(\mathrm{cth}^2\, 2\tilde{q}) + \left(-\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2\, 2\tilde{q}}\right) = 0, \end{cases}$$

или

$$(5.1_2)\qquad \begin{cases} (-\,\mathrm{ctg}^2\, 2\tilde{x})\,(\mathrm{ch}\, 4\tilde{p}) + (\mathrm{ch}\, 4\tilde{q}) + \left(\dfrac{1}{\sin^2 2\tilde{x}}\right) = 0, \\ (-\mathrm{tg}^2\, 2\tilde{y})\,(\mathrm{ch}\, 4\tilde{p}) + (\mathrm{ch}\, 4\tilde{q}) + \left(-\dfrac{1}{\cos^2 2\tilde{y}}\right) = 0. \end{cases}$$

§ 6. Для зависимости второго жанра

$$(6.1)\qquad \tilde{z} = \mathrm{sh}\,\tilde{w},$$

канонические представления имеют вид (сравнить с § 6 предыдущей работы)

$$(6.1_1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\tilde{x}^2}{\sin^2\tilde{p}} + \dfrac{\tilde{y}^2}{\cos^2\tilde{p}} - 1 = 0, \\ \dfrac{\tilde{x}^2}{\cos^2\tilde{q}} + \dfrac{\tilde{y}^2}{\sin^2\tilde{q}} - 1 = 0. \end{cases}$$

§ 7. Для зависимости второго жанра (см. § 7 предыдущей работы)

$$(7.1)\qquad \tilde{z} = \mathrm{sh}\,\tilde{w},$$

применяя принцип перенесения к соответствующим гауссовым представлениям (7.3), найдем представления

$$(7.1_1)\qquad \begin{cases} \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2\,(\mathrm{th}^2\,\tilde{p}) + (-\mathrm{sh}^2\,\tilde{p}) = 0, \\ \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2\,(\mathrm{cth}^2\,\tilde{p}) + (\mathrm{ch}^2\,\tilde{q}) = 0. \end{cases}$$

§ 8. Для зависимости

$$(8.1)\qquad \tilde{z} = \ln\sin\tilde{w},$$

применяя принцип перенесения к представлениям (8.2) предыдущей работы, найдем

$$(8.1_1)\qquad \begin{cases} \left(-\dfrac{\sin^2 2\tilde{p}}{2}\right)(e^{-\widetilde{2x}}) + (\mathrm{ch}\, 2\tilde{y}) + (\cos 2\tilde{p}) = 0, \\ \left(-\dfrac{\sin^2 2\tilde{q}}{2}\right)(e^{-\widetilde{2x}}) + (\mathrm{ch}\, 2\tilde{y}) + (-\cos 2\tilde{q}) = 0. \end{cases}$$

§ 9. Для зависимости второго жанра

$$\tilde{z} = \ln \operatorname{sh} \tilde{w}, \tag{9.1}$$

применяя прямой принцип перенесения к представлениям (9.3) предыдущей работы, найдем

$$\begin{cases} \left(-\dfrac{\operatorname{sh}^2 2\tilde{p}}{2}\right)(e^{-2\tilde{x}}) + (\operatorname{ch} 2\tilde{y}) + (\operatorname{ch} 2\tilde{p}) = 0, \\ \left(-\dfrac{\operatorname{sh}^2 2\tilde{q}}{2}\right)(e^{-2\tilde{x}}) + (\operatorname{ch} 2\tilde{y}) + (-\operatorname{ch} 2\tilde{q}) = 0. \end{cases} \tag{9.1$_1$}$$

§ 10. Для зависимости второго жанра

$$\tilde{z} = \tilde{w}^2, \tag{10.1}$$

с помощью принципа перенесения найдем согласно (10.2) предыдущей работы канонические представления

$$\begin{cases} (\tilde{x})(4\tilde{p}^2) + (-\tilde{y}^2) + (-4\tilde{p}^4) = 0, \\ (\tilde{x})(-4\tilde{q}^2) + (-1)(-\tilde{y}^2) + (4\tilde{q}^4) = 0. \end{cases} \tag{10.1$_1$}$$

§ 11. Для зависимости нулевого жанра

$$\tilde{w} = e^{\tilde{z}}, \tag{11.1}$$

с помощью принципа перенесения (прямого) и (11.2), (11.3) предыдущей работы найдем канонические представления

$$\begin{cases} \tilde{p}^2 - \tilde{q}^2 + (e^{2\tilde{x}}) = 0, \\ \tilde{p}^2(-\operatorname{th}^2 \tilde{y}) + (-1)(-\tilde{q}^2) = 0, \end{cases} \tag{11.1$_1$}$$

или

$$\begin{cases} (2\tilde{p}^2)(e^{-2\tilde{x}}) - (\operatorname{ch} 2\tilde{y}) + (-1) = 0, \\ (-2\tilde{q}^2)(e^{-2\tilde{x}}) + (\operatorname{ch} 2\tilde{y}) + (-1) = 0. \end{cases} \tag{11.1$_2$}$$

§ 12. Для линейной зависимости (нулевой жанр)

$$\tilde{w} = (\tilde{m} + \tilde{n}\varepsilon)(\tilde{z} - \tilde{z}_0) + \tilde{w}_0, \tag{12.1}$$

при помощи принципа перенесения найдем [см. (12.2$_1$) и (12.2$_2$) предыдущей работы]

$$\begin{cases} \tilde{m}(\tilde{x} - \tilde{x}_0) + \tilde{n}(\tilde{y} - \tilde{y}_0) - (\tilde{p} - \tilde{p}_0) = 0, \\ \tilde{n}(\tilde{x} - \tilde{x}_0) + \tilde{m}(\tilde{y} - \tilde{y}_0) - (\tilde{q} - \tilde{q}_0) = 0, \end{cases} \tag{12.1$_1$}$$

или

$$\begin{cases} \tilde{m}(\tilde{p} - \tilde{p}_0) - \tilde{n}(\tilde{q} - \tilde{q}_0) - (\tilde{m}^2 - \tilde{n}^2)(\tilde{x} - \tilde{x}_0) = 0, \\ \tilde{n}(\tilde{p} - \tilde{p}_0) - \tilde{m}(\tilde{q} - \tilde{q}_0) + (\tilde{m}^2 - \tilde{n}^2)(\tilde{y} - \tilde{y}_0) = 0. \end{cases} \tag{12.1$_2$}$$

П. Галайда
Кафедра математической, информации ВТУЗ
Кошице
Чехословакия