Ivo Res

Asymptotische Eigenschaften der Lösungen des Systems $\{A_{n-1}^{-1}(x)\dots[A_1^{-1}(x)y']\dots\}' = A_n(x)y$

Archivum Mathematicum, Vol. 9 (1973), No. 3, 105--114

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104800

ARCH. MATH. 3, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS,
IX: 105—114, 1973

ASYMPTOTISCHE EIGENSCHAFTEN DER LÖSUNGEN DES SYSTEMS $\{\mathbf{A}_{n-1}^{-1}(x)\ldots[\mathbf{A}_1^{-1}(x)\mathbf{y}']'\ldots\}' = \mathbf{A}_n(x)\mathbf{y}$

Ivo Res, Brno

(Eingegangen am 5. Februar 1973)

1. EINLEITUNG

Es seien $\mathbf{A}_i(x) = (a^i_{j,k}(x))$, $i = 1, 2, \ldots, n$ Quadratmatrizen der Ordnung m, $a^i_{j,k}(x) \in C_{n-1}(I)$, $I = \langle x_0, \infty)$. Wir werden voraussetzen, daß die Matrizen $\mathbf{A}_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ in I regulär sind und bezeichnen $A_i^{-1}(x)$ inverse Matrizen, $\mathbf{y}$ einen Spaltenvektor der Dimension m.

Wir werden uns mit den asymptotischen Eigenschaften der Lösungen des Systems

$$\{\mathbf{A}_{n-1}^{-1}(x)\ldots[\mathbf{A}_1^{-1}(x)\,y']'\ldots\} = \mathbf{A}_n(x)\,\mathbf{y} \tag{1,1}$$

beschäftigen.

Um die Lösung $\mathbf{y}$ des Systems (1,1) und seine Ableitungen zu finden, werden wir Reihen konstruieren, die in I oder in $I_1 \subset I$ zu $\mathbf{y}$ gleichmäßig konvergieren. Diese Methode wurde von U. Richard für die Gleichung zweiter Ordnung in der Arbeit [1] veröffentlicht. Sie ermöglicht approximative Lösungen von (1,1) zu suchen, welche besonders für große Werte von x passend sind.

Mit der Untersuchung der asymptotischen Eigenschaften des Systems (1,1) für $n = 2$ beschäftigten sich viele Autoren — A. Wintner [3], M. Ráb [4], [5], R. Bellman [2]. Dabei zeigte es sich vorteilhaft, das sogenannte Peano-Baker Verfahren zu benutzen. Dieses Verfahren ermöglicht, die Lösung des Systems in der Form von unendlichen Reihen auszudrücken, die im ganzen Intervall I gleichmäßig konvergieren. Es ist besonders vorteilhaft darum, daß es eine sehr einfache und dabei genügend genaue Abschätzung des Fehlers ermöglicht, s. M. Ráb [6].

Gleichzeitig mit dem System (1,1) betrachten wir das Matrizensystem

$$\{\mathbf{A}_{n-1}^{-1}(x)\ldots[\mathbf{A}_1^{-1}(x)\mathbf{Y}']'\ldots\}' = \mathbf{A}_n(x)\mathbf{Y}, \tag{1,2}$$

wobei $\mathbf{Y}$ eine $m \times m$ Matrix bezeichnet.

Wir machen jetzt folgende Verabredungen:

1. Wenn $\mathbf{A}$ eine Quadratmetrix der Ordnung m mit stetigen Elementen $a_{j,k}$ im Intervall I ist, dann verstehen wir unter der Norm $||\mathbf{A}||$ der Matrix $\mathbf{A}$ den Ausdruck

$$||\mathrm{A}|| = \frac{1}{m}\sum_{j,k}^{m} |a_{j,k}|.$$

2. Wenn a eine reelle Zahl ist, dann bedeutet das Symbol $\int_{a_j}^{x} \mathrm{A}_j(t)\,\mathrm{d}t$:

a) das Riemansche Integral, für $a_j = a$,

b) $\lim\limits_{\tau\to\infty} \int_{\tau}^{x} A_j(t)\,\mathrm{d}t$, für $a_j = \infty$.

3. Ist kein Mißverständnis zu befürchten, so wollen wir das Argument x weglassen.

2. DEFINITIONEN UND BEZEICHNUNGEN

Definition 2,1. *Wir bezeichnen* $\mathrm{D} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ *und definieren die Differentialoperatoren*

$$L_s = \mathbf{A}_s^{-1}\,\mathrm{D}\ldots\mathrm{D}\mathbf{A}_1^{-1}\,\mathrm{D}, \text{ für } s = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{2,1}$$

$$L_n = \mathrm{D}L_{n-1}. \tag{2,2}$$

Definition 2,2. *Es sei* $\mathbf{F}$ *die Menge aller Quadratmatrizen* $\mathbf{F} = (f_{j,k}(x))$ *der Ordnung* m, $f_{j,k} \in C_0(I)$. *Wir bezeichnen mit* Q_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ *den Integraloperator, der die Menge* $\mathbf{F}$ *in sich selbst abbildet nach der Regel*

$$Q_j(\mathbf{F}) = \int_{a_j}^{x} \mathbf{A}_j(t)\,\mathbf{F}(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2,3}$$

Unter einem Produkt Q_jQ_k *der Operatoren* Q_j, Q_k *für* j, $k = 1, 2, \ldots, n$ *verstehen wir den durch die Beziehung*

$$Q_jQ_k(\mathbf{F}) = \int_{a_j}^{x} \mathbf{A}_j(t) \int_{a_k}^{t} \mathbf{A}_k(s)\,\mathbf{F}(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \tag{2,4}$$

definierten Operator.

Das durch die Formel (2,4) definierte Produkt der Operatoren ist eine Superposition dieser Operatoren. Auch die Superposition anderer Operatoren, die in der Arbeit vorkommen, werden wir in der Gestalt eines Produktes schreiben, zum Beispiel

$$\mathrm{D}Q_j(\mathbf{F}) = \mathbf{A}_j\mathbf{F}.$$

Definition 2,3. *Es sei* $a \in I$ *eine reelle Zahl und es bezeichne* a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ *entweder* a *oder* ∞. *Wir definieren die Operatoren* U_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ *durch die Beziehung*

$$U_j(\mathbf{F}) = Q_jQ_{j+1}\ldots Q_nQ_{n+1}\ldots Q_{n+j-1}(\mathbf{F}), \tag{2,5}$$

wobei wir $Q_{n+i} = Q_i$ *setzen. Weiter setzen wir*

$$U_j^0(\mathbf{F}) = \mathbf{F},\ U_j^i(\mathbf{F}) = U_jU_j^{i-1}(\mathbf{F}),\ i = 1, 2, \ldots \tag{2,6}$$

Definition 2,4. *Es seien* j, k *natürliche Zahlen* $1 \leqq j, k \leq n$. *Wir definieren* $\mathbf{H}_{j,j}(x) = \mathbf{E}$, $\mathbf{E} =$ *Einheitsmatrix,*

$$\mathbf{H}_{j,k}(x) = Q_jQ_{j+1}\ldots Q_{k-1}(\mathbf{E}), \text{ für } j < k, \tag{2,7}$$

$$\mathbf{H}_{j,k}(x) = Q_jQ_{j+1}\ldots Q_nQ_{n+1}\ldots Q_{n+k-1}(\mathbf{E}), \text{ für } j > k,$$

wo bei $Q_{n+i} = Q_i$ *gesetzt ist.*

Definition 2,5. *Es sei* $f(x)$ *eine stetige positive Funktion. Wir bezeichnen mit* q_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ *den Integraloperator, der durch die Beziehung*

$$q_j(f) = \int_{a_j}^{x} ||\,\mathbf{A}_j(t)\,||\,f(t)\,\mathrm{d}t \tag{2,8}$$

definiert ist.

Unter einem Produkt der Operatoren q_jq_k, j, $k = 1, 2, \ldots, n$ *verstehen wir den Operator*

$$q_jq_k(f) = \int_{a_j}^{x} ||\,\mathbf{A}_j(t)\,|| \int_{a_k}^{t} ||\mathbf{A}_k(s)\,||\,f(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t. \tag{2,9}$$

Definition 2,6. *Es sei j eine natürliche Zahl, $1 \leqq j \leqq n$. Definieren wir die Funktionen*

$$\gamma_j(x) = | q_j q_{j+1} \dots q_n q_{n+1} \dots q_{n+j-1}(1) |, \tag{2,10}$$

mit $q_{n+i} = q_i$.

Definition 2.7. *Es seien j, k natürliche Zahlen, $1 \leqq j, k \leqq n$. Wir definieren Funktionen $\varkappa_{j,k}(x)$ durch die Beziehungen*

$$\begin{aligned} \varkappa_{j,j}(x) &= 1 \\ \varkappa_{j,k}(x) &= | q_j q_{j+1} \dots q_{k-1}(1) |, \text{ für } j < k, \\ \varkappa_{j,k}(x) &= | q_j q_{j+1} \dots q_n q_{n+1} \dots q_{n+k-1}(1) |, \text{ für } j > k. \end{aligned} \tag{2,11}$$

Bemerkung 2,8. Wenn wir

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1' &= \mathbf{A}_1 \mathbf{u}_2 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \mathbf{u}_{n-1}' &= \mathbf{A}_{n-1} u_n \\ \mathbf{u}_n' &= \mathbf{A}_n u_1 \end{aligned}$$

setzen, können wir das System (1,1) in der Gestalt

$$\mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u}$$

schreiben, wobei die Matrix $\mathbf{A}$ von Blöcken $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n$ und von Nullmatrizen der Ordnung m gebildet wird,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} O, \mathbf{A}_1, O, \dots, O \\ O, O, \mathbf{A}_2, \dots, O \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{A}_n, O, O, \dots, O \end{pmatrix}$$

Offenbar sind die ersten m Komponenten des Vektors $\mathbf{u}$ die Komponenten der Lösung $\mathbf{y}$. Daraus sieht man, daß folgender Existenzsatz für das System (1,1) gilt.

Satz 2,9, *Es seien $\mathbf{A}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ eine Matrix mit stetigen Elementen im Intervall I, $\mathbf{A}_i$ regulär für $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Es seien weiter $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{n-1}$, beliebige konstante Vektoren. Dann existiert genau eine im ganzen Intervall I definierte Lösung $\mathbf{y}$ des Systems* (1, 1) *und es gilt*

$$\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0^0,\ L_s \mathbf{y}(x) \mid_{x = x_0} = \mathbf{y}_s^0,\ s = 1, 2, \dots, n - 1$$

wobei der Differentialoperator L_s durch die Formel (2,1) *definiert ist.*

Bemerkung 2,10. Mit den Bezeichnungen (2,1), (2,2) können wir das System (1,2) in der Form

$$L_n \mathbf{Y} = \mathbf{A}_n \mathbf{Y} \tag{2,12}$$

schreiben.

3. BEZIEHUNGEN ZWISCHEN OPERATOREN

Hilfssatz 3,1. *Es seien U_j^i und $\mathbf{H}_{j,k}$, j, $k = 1, 2, \dots, n$ durch die Formeln* (2,5), (2,6), (2,7) *definiert. Dann gilt*

(3,1) $$U_j^i(\mathbf{H}_{j,k}) = Q_j U_{j+1}^i(\mathbf{H}_{j+1,k}), \text{ für } j \neq k,\ i = 0, 1, \ldots$$

(3,2) $$U_j^i(\mathbf{H}_{j,j}) = Q_j U_{j+1}^{i-1}(\mathbf{H}_{j+1,j}), \text{ für } i = 1, 2, \ldots$$

Diese Beziehungen werden durch die vollständige Induktion bewiesen. Da die Beweise analog sind, werden wir nur die Beziehung (3,1) beweisen.

Es gilt

$$U_j^1(\mathbf{H}_{j,k}) = U_j(\mathbf{H}_{j,k}) = Q_j Q_{j+1} \ldots Q_n \ldots Q_{n+j-1} Q_{n+j}(\mathbf{H}_{j+1,k}) = Q_j U_{j+1}(\mathbf{H}_{j+1,k}),$$

so daß Beziehung (3,1) für $i = 1$ erfüllt ist. Es sei jetzt (3,1) gültig. Dann ist nach (2,6)

$$U_j^{i+1}(\mathbf{H}_{j,k}) = U_j U_j^i(\mathbf{H}_{j,k}) = Q_j Q_{j+1} \ldots Q_n \ldots Q_{n+j} U_{j+1}^i(\mathbf{H}_{j+1,k}) =$$
$$= Q_j U_{j+1} U_{j+1}^i(\mathbf{H}_{j+1,k}) = Q_j U_{j+1}^{i+1}(\mathbf{H}_{j+1,k}),$$

und die Behauptung ist bewiesen.

4. FORMALLÖSUNG DES SYSTEMS (1,2)

In diesem Absatz werden wir oft folgende Voraussetzungen machen: (*) *Es seien* $\mathbf{A}_i = (a_{j,k}^i)$, $a_{j,k}^i \in C_{n-i}(I)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *Quadratmatrizen der Ordnung* m *und* $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots \mathbf{A}_{n-1}$ *seien regulär.*

Hilfssatz 4,1. *Es gelte* (*). *Werden* $\mathbf{H}_{1,k}$ *durch* (2,7) *und* L_n *durch Definition* 2,1 *gegeben, so ist*

(4,1) $$L_n \mathbf{H}_{1,k} = 0,\ 0 = \textit{Nullmatrix}.$$

Beweis. Für $k = 1$ ist die Behauptung offenbar. Durch die Induktion beweist man leicht, daß für $s = 1, 2, \ldots, k - 1$, $k = 2, 3, \ldots, n$

$$\mathrm{L}_s \mathbf{H}_{1,k}(x) = \mathbf{H}_{s+1,k}(x),$$

gilt. Es ist bessonders für $s = k - 1$

$$L_{k-1} \mathbf{H}_{1,k}(x) = \mathbf{E}.$$

Hieraus erhalten wir die Behauptung auf Grund der Relation

$$L_n = \mathrm{D}\mathbf{A}_{n-1}^{-1} D \ldots \mathbf{A}_k^{-1} \mathrm{D} \mathrm{L}_{k-1}.$$

Sazt 4,2. *Es gelte* (*). *Dann ist die Formallösung des Systems* (1,2) *durch die Reihe*

(4,2) $$\mathbf{Y}_k(x) = \sum_{i=0}^{\infty} U_1^i(\mathbf{H}_{1,k}),\ k = 1, 2, \ldots, n$$

gegeben, wobei U_1^i *durch* (2,5), (2,6) *und* $\mathbf{H}_{1,k}$ *durch* (2,7) *gegeben sind.*

Beweis. Es gilt offenbar

$$L_n U_1(\mathbf{F}) = \mathbf{A}_n \mathbf{F}$$

und

$$L_n \mathbf{Y}_k = L_n \mathbf{H}_{1,k} + L_n \sum_{i=1}^{\infty} U_1^i(\mathbf{H}_{1,k}) = L_n \mathbf{H}_{1,k} + \sum_{i=1}^{\infty} L_n U_1 U_1^{i-1}(\mathbf{H}_{1,k}) =$$
$$= L_n \mathbf{H}_{1,k} + \mathbf{A}_n \sum_{i=1}^{\infty} U_1^{i-1}(\mathbf{H}_{1,k}) = L_n \mathbf{H}_{1,k} + \mathbf{A}_n \sum_{i=0}^{\infty} U_1^i(\mathbf{H}_{1,k}) =$$
$$= L_n \mathbf{H}_{1,k} + \mathbf{A}_n \mathbf{Y}_k.$$

Nach Hilfssatz 4,1 gilt aber (4,1). Es ist also

$$L_n \boldsymbol{Y}_k = \boldsymbol{A}_n \boldsymbol{Y}_k,$$

was ein mit (1,2) äquivalentes System ist. Damit ist der Beweis durchgeführt.

Satz 4,3. *Es gelte* (*) *und es sei die Lösung des Systems* (1, 2) *durch die Reihen* (4, 2) *gegeben. Dann kann man formal*

$$L_s \boldsymbol{Y}_k(x) = \sum_{i=0}^{\infty} U_{s+1}^i(\boldsymbol{H}_{s+1,k}),\ s = 0, 1, \ldots, n-1 \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{4,3}$$

schreiben, wobei $L_0\ \boldsymbol{Y}_k(x) = \boldsymbol{Y}_k(x)$ *ist und die Formeln* (2,1), (2,5), (2,6) (2,7) *gelten.*

Bemerkung 4,4. Im folgenden Absatz wird gleichmäßige Konvergenz der Reihen (4,3) untersucht. Wir machen aufmerksam darauf, daß $\boldsymbol{Y}_k$ Lösung des Systems (1,2) im Intervall I oder $I_1 \subset I$ ist, wenn die Reihen (4,3) in diesem Intervall für $s = 0, 1, \ldots, n-1$ gleichmäßig konvergieren.

Satz 4,3 wird durch vollständige Induktion bewiesen. Für $s = 1$ gilt nach (2,1)

$$L_1 \boldsymbol{Y}_k = \boldsymbol{A}_1^{-1} \mathrm{D} \boldsymbol{Y}_k.$$

Es sei $k \neq 1$. Dann ist nach (3,1)

$$\boldsymbol{A}_1^{-1}\mathrm{D}\mathrm{Y}_k = \boldsymbol{A}_1^{-1}\mathrm{D} \sum_{i=0}^{\infty} U_1^i(\boldsymbol{H}_{1,k}) = \boldsymbol{A}_1^{-1}\mathrm{D} \sum_{i=0}^{\infty} Q_1 U_2^i(\boldsymbol{H}_{2,k}) = \sum_{i=0}^{\infty} U_2^i(\boldsymbol{H}_{2,k}).$$

Wenn $k = 1$, dann ist wegen (3,2)

$$\boldsymbol{A}_1^{-1}\mathrm{D}\boldsymbol{Y}_1 = \boldsymbol{A}_1^{-1}\mathrm{D}\left[\boldsymbol{E} + \sum_{i=1}^{\infty} U_1^i(\boldsymbol{H}_{1,1})\right] = \boldsymbol{A}_1^{-1}\mathrm{D}\left[\boldsymbol{E} + \sum_{i=1}^{\infty} Q_1 U_2^{i-1}(\boldsymbol{H}_{2,1})\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} U_2^{i-1}(\boldsymbol{H}_{2,1}) = \sum_{i=0}^{\infty} U_2^i(\boldsymbol{H}_{2,1}).$$

Für $s = 1$ gilt also (4,3). Es gelte jetzt (4,3) für $s = j-1$. Nach (2,1) ist

$$L_j \boldsymbol{Y}_k = \boldsymbol{A}_j^{-1}\mathrm{D} L_{j-1} \boldsymbol{Y}_k = \boldsymbol{A}_j^{-1}\mathrm{D} \sum_{i=0}^{\infty} U_j^i(\boldsymbol{H}_{j,k}).$$

Wenn $j \neq k$ ist, dann gilt nach (3,1)

$$\boldsymbol{A}_j^{-1}\mathrm{D} \sum_{i=0}^{\infty} U_j^i(\boldsymbol{H}_{j,k}) = \boldsymbol{A}_j^{-1}\mathrm{D} \sum_{i=0}^{\infty} Q_j U_{j+1}^i(\boldsymbol{H}_{j+1,k}) = \sum_{i=0}^{\infty} U_{j+1}^i(\boldsymbol{H}_{j+1,k}).$$

Für $j = k$ bekommen wir mit Hilfe (3,2)

$$\boldsymbol{A}_j^{-1}\mathrm{D} \sum_{i=0}^{\infty} U_j^i(\boldsymbol{H}_{j,j}) = \boldsymbol{A}_j^{-1}\mathrm{D}\left[\boldsymbol{E} + \sum_{i=1}^{\infty} U_j^i(\boldsymbol{H}_{j,j})\right] = \boldsymbol{A}_j^{-1}\mathrm{D}\left[\boldsymbol{E} + \sum_{i=1}^{\infty} Q_j U_{j+1}^{i-1}(\boldsymbol{H}_{j+1,j})\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} U_{j+1}^{i-1}(\boldsymbol{H}_{j+1,j}) = \sum_{i=0}^{\infty} U_{j+1}^i(\boldsymbol{H}_{j+1,j}).$$

Damit sind die Beziehungen (4,3) bewiesen.

Bemerkung 4,5. Wenn $\boldsymbol{Y}_k$ eine Lösung des Systems (1,2) ist, dann kann die Lösung $\boldsymbol{y}_k$ des Systems (1,1) in der Gestalt

$$\boldsymbol{y}_{k,i}(x) = \boldsymbol{Y}_k(x)\, \boldsymbol{y}_{k,i}^0,\ i = 1, 2, \ldots, m \tag{4,4}$$

geschrieben werden, wobei $\boldsymbol{y}_{k,i}^0$ ein beliebiger konstanter Vektor ist.

5. GLEICHMÄßIGE KONVERGENZ DER REIHEN (4,3).

Hilfssatz 5,1. *Die Matrizenfunktionen $\mathbf{H}_{j,k}$ seien durch Definition 2,4 gegeben. Dann gilt*

$$\| \mathbf{H}_{j,k}(x) \| \leqq \varkappa_{j,k}(x), \text{ für } j \neq k,$$

$$\| \mathbf{H}_{j,j}(x) \| = \| \mathbf{E} \| = 1,$$

wobei die Funktionen $\varkappa_{j,k}$ durch (2,11) *festgelegt sind.*

Beweis. Es ist für $j < k$

$$\| \mathbf{H}_{j,k}(x) \| = \| Q_j Q_{j+1} \ldots Q_{k-1}(\mathbf{E}) \| \leqq | q_j q_{j+1} \ldots q_{k-1}(1) | = \varkappa_{j,k}(x)$$

und für j > k

$$\| \mathbf{H}_{j,k}(x) \| = \| Q_j Q_{j+1} \ldots Q_n Q_{n+1} \ldots Q_{n+k-1}(\mathbf{E}) \| \leqq$$

$$\leqq | q_j q_{j+1} \ldots q_n q_{n+1} \ldots q_{n+k-1}(1) | = \varkappa_{j,k}(x).$$

Nach der Verabredung 1., Absatz 1. ist $\| \mathbf{E} \| = 1$.

Satz 5,2. *Es gelte* (*) *und es sei $a_i = \infty$ für $i = 1, 2, \ldots, n$. Ist für irgendein Paar s, k, $0 \leqq s \leqq n - 1$, $1 \leqq k \leqq n$*

$$\gamma_{s+1}(x) < \infty, \tag{5,1}$$

$$\varkappa_{s+1}(x) < \infty, \tag{5,2}$$

so konvergiert die Reihe (4,3), *wobei $\mathbf{H}_{j,k}$ und U_j^i durch* (2,5), (2,6), (2,7) *gebegen sind, im Intervall I gleichmäßig.*

Beweis. Die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (4,3) in I wird so bewiesen, daß man zu ihr eine konvergente Majorante konstruiert. Mit der vollständigen Induktion beweisen wir, daß

$$\| U_{s+1}^i(\mathbf{H}_{s+1,k}) \| \leqq \varkappa_{s+1,k}(x) \frac{\gamma_{s+1}^i(x)}{i!}, \; x \in I \tag{5,3}$$

gilt.

Tatsächlich erhalten wir für $i = 1$

$$\| U_{s+1}^1(\mathbf{H}_{s+1,k}) \| = \| U_{s+1}(\mathbf{H}_{s+1,k}) \| = \| Q_{s+1} Q_{s+2} \ldots Q_{n+s}(\mathbf{H}_{s+1,k}) \| \leqq$$

$$\leqq | q_{s+1} q_{s+2} \ldots q_{n+s}(\| \mathbf{H}_{s+1,k} \|) |.$$

Nach Hilfssatz 5,1 und (2,10) kann man

$$\| U_{s+1}^1(\mathbf{H}_{s+1,k}) \| \leqq \varkappa_{s+1,k}(x) \, \gamma_{s+1}(x),$$

schreiben und das ist die Ungleichung (5,3) für $i = 1$.

Es gelte jetzt (5,3). Dann ist wegen (2,5)

$$\| U_{s+1}^{i+1}(\mathbf{H}_{s+1,k}) \| = \| U_{s+1} U_{s+1}^i(\mathbf{H}_{s+1,k}) \| = \| Q_{s+1} Q_{s+2} \ldots Q_{n+s} U_{s+1}^i(\mathbf{H}_{s+1,k}) \| \leqq$$

$$\leqq | q_{s+1} q_{s+2} \ldots q_{n+s} [\; \| U_{s+1}^i(\mathbf{H}_{s+1,k}) \| \;] \; | \leqq \varkappa_{s+1,k}(x) \left| q_{s+1} q_{s+2} \ldots q_{n+s} \frac{\gamma_{s+1}^i}{i!} \right| \leqq$$

$$\leqq \varkappa_{s+1,k}(x) \left| \int_{\infty}^{x} \gamma_{s+1}'(t) \frac{\gamma_{s+1}^i(t)}{i!} \, dt \right| = \varkappa_{s+1,k}(x) \frac{\gamma_{s+1}^{i+1}(x)}{(i+1)!}$$

Damit ist die Ungleichung (5,3) bewiesen. Für $x \in I$ gilt offenbar

$$\sum_{i=0}^{\infty} \| U_{s+1}^{i}(\mathbf{H}_{s+1,k}) \| \leqq \varkappa_{s+1,k}(x) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\gamma_{s+1}^{i}(x)}{i!} \leqq \varkappa_{s+1}(x_0) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\gamma_{s+1}^{i}(x_0)}{i!}$$

und das bedeutet, daß die Reihe $\varkappa_{s+1,k}(x_0) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\gamma_{s+1}^{i}(x_0)}{i!}$ konvergente Majorante der Reihe (4,3) ist. Die Behauptung des Satzes ist bewiesen.

Bemerkung 5,3. *Gilt für alle $i = 1, 2, \ldots, n$*

$$\int_{x_0}^{\infty} \| \mathbf{A}_i(t) \| \, \mathrm{d}t < \infty, \tag{5,4}$$

dann konvergiert die Reihe (4,3) *gleichmäßig im Intervall I.*

Satz 5,4. *Es gelten die Voraussetzungen des Satzes 5,2.* Dann gelten *die Abschätzungen*

$$\| L_s \mathbf{Y}_k(x) - \sum_{i=0}^{n} U_{s+1}^{i}(\mathbf{H}_{s+1,k}) \| \leqq \varkappa_{s+1,k}(x) \frac{\gamma_{s+1}^{n+1}(x)}{(n+1)!} \exp\{\gamma_{s+1}(x)\} \tag{5,5}$$

für $x \in I$.

Beweis. Bezeichnen wir

$$\mathrm{R}_{n+1}(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} U_{s+1}^{i}(\mathbf{H}_{s+1,k})$$

Nach (5,3) ist

$$\| \mathrm{R}_{n+1}(x) \| \leqq \varkappa_{s+1,k}(x) \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\gamma_{s+1}^{i}(x)}{i!} = \varkappa_{s+1,k}(x) \left[\frac{\gamma_{s+1}^{n+1}(x)}{(n+1)!} + \frac{\gamma_{s+1}^{n+2}(x)}{(n+2)!} + \ldots \right] =$$

$$= \varkappa_{s+1,k}^{(x)} \frac{\gamma_{s+1}^{n+1}(x)}{(n+1)!} \left[1 + \frac{\gamma_{s+1}(x)}{n+2} + \frac{\gamma_{s+1}^{2}(x)}{(n+2)(n+3)} + \ldots \right] <$$

$$< \varkappa_{s+1,k}(x) \frac{\gamma_{s+1}^{n+1}(x)}{(n+1)!} \exp\{\gamma_{s+1}(x)\},$$

womit (5,5) bewiesen ist.

Satz 5,5. *Es gelte* (*). *Dann konvergiert dieReihe* (4,3) *gleichmäßig im Intervall $I_1 = \langle x_0, b \rangle$, wobei U_j^i und $\mathbf{H}_{j,k}$ durch* (2,5,) (2,6), (2,7) *gegeben sind mit $a_i = a$, für $i = 1, 2, \ldots, n$ und $b > x_0$.*

Der Beweis dieses Satzes wird ganz analog wie bei Satz 5,2 durchgeführt. Es gilt nämlich

$$\| U_{s+1}^{i}(\mathbf{H}_{s+1,k}) \| \leqq \varkappa_{s+1,k}(b) \frac{\gamma_{s+1}^{i}(b)}{i!}, \quad x \in \langle x_0, b \rangle \tag{5,6}$$

und so ist die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} \varkappa_{s+1,k}(b) \frac{\gamma_{s+1}^{i}(b)}{i!}$ eine konvergente Majorante der Reihe (4,3). Daraus folgt die gleichmäßige Konvergenz dieser Reihe in I_1.

Satz 5,6, *Es seien die Voraussetzungen des Satzes 5,5 erfüllt. Dann gilt für $x \in I_1$*

$$\| L_s \mathbf{Y}_k(x) - \sum_{i=0}^{n} U_{s+1}^{i}(\mathbf{H}_{s+1,k}) \| \leqq \varkappa_{s+1,k}(x) \frac{\gamma_{s+1}^{n+1}(x)}{(n+1)!} \exp\{\gamma_{s+1}(x)\}. \tag{5,7}$$

Der Beweis wird analog wie bei Satz 5,4 durchgeführt und darum lassen wir ihn fort.

Hilfssatz 5,7. *Es sei* $\varkappa_{j,k}(x) < \infty$, $\gamma_j(x) < \infty$, $1 \leqq j, k \leqq n$. *Dann gilt*

$$(5,8) \qquad \| U_j^i(\mathbf{H}_{j,k}) \| \leqq (\sup_{t \in I} \varkappa_{j,k}(t)) (\sup_{t \in I} \gamma_j(t))^i$$

Beweis. Wir werden die Behauptung durch die vollständige Induktion beweisen. Für $i = 1$ haben wir wegen (2,5), (2,6), (2,7) (2,10), (2,11)

$$\| U_j^1(\mathbf{H}_{j,k}) \| \leqq | q_j q_{j+1} \ldots q_{n+j-1} (\| \mathbf{H}_{j,k} \|) | \leqq \sup_{t \in I} \varkappa_{j,k}(t) \, | q_j q_{j+1} \ldots q_{n+j-1}(1) | \leqq$$
$$\leqq \sup_{t \in I} \varkappa_{j,k}(t) \sup_{t \in I} \gamma_j(t).$$

Nehmen wir jetzt an, daß (5,8) gilt. Dann ist mit Berücksichtigung auf (2,6)

$$\| U_j^{i+1}(\mathbf{H}_{j,k}) \| = \| U_j U_j^i(\mathbf{H}_{j,k}) \| \leqq | q_j q_{j+1} \ldots q_{n+j-1} [\| U_j^i(\mathbf{H}_{j,k}) \|] | \leqq$$
$$\leqq \sup_{t \in I} \varkappa_{j,k}(t) (\sup_{t \in I} \gamma_j(t))^i \, | q_j q_{j+1} \ldots q_{n+j-1}(1) | =$$
$$= \sup_{t \in I} \varkappa_{j,k}(t) (\sup_{t \in I} \gamma_j(t))^i \gamma_j(x) \leqq \sup_{t \in I} \varkappa_{j,k}(t) (\sup_{t \in I} \gamma_j(t))^{i+1}$$

Damit ist der Beweis durchgeführt.

Satz 5,8. *Es gelte* $(*)$. *Es sei* $a_{s+1} = \infty$ *für irgedein Paar* s, k, $0 \leqq s \leqq n - 1$ $1 \leqq k \leqq n$ *und es existiere wenigstens ein* i, $1 \leqq i \leqq n$ *so, daß* $a_i = a$. *Nehmen wir an, daß*

$$(5,9) \qquad \gamma_{s+1}(x) < \infty,$$

$$(5,10) \qquad \varkappa_{s+1,k}(x) < \infty$$

gilt. Dann konvergiert di Reihe (4,3) gleichmäßig auf jedem Intervall $\langle a, \infty)$, *dessen Endpunkt* a *die Bedingung* $\gamma_{s+1}(a) < 1$ *erfüllt.*

Beweis. Unter den Voraussetzungen (5,9), (5,10) sind die Funktionen $\gamma_{s+1}(x)$ und $\varkappa_{s+1,k}(x)$ endlich, stetig und abnehmend. Es gibt also eine Zahl $a > x_0$ so, daß $\gamma_{s+1}(x) \leqq \gamma_{s+1}(a) < 1$ für $x \in \langle a, \infty)$ ist. Nach Hilfssatz 5,7 gilt für $x \geqq a$

$$(5,11) \qquad \| U_{s+1}^i(\mathbf{H}_{s+1,k}) \| \leqq \varkappa_{s+1,k}(a) \, \gamma_{s+1}^i(a).$$

Wegen $\gamma_{s+1}(a) < 1$, ist die geometrische Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} \varkappa_{s+1,k}(a) \, \gamma_{s+1}^i(a)$ eine konvergente Majorante der Reihe (4,3). Die Reihe (4,3) konvergiert also gleichmäßig im Intervall $\langle a, \infty)$.

Satz 5,9. *Es seien die Voraussetzungen des Satzes 5,8 erfüllt. Dann gilt für* $x \geqq a$

$$(5,12) \qquad \| L_s \mathbf{Y}_k(x) - \sum_{i=0}^{n} U_{s+1}^i(H_{s+1,k}) \| \leqq \gamma_{s+1}^{n+1}(a) \frac{\varkappa_{s+1,k}(a)}{1 - \gamma_{s+1}(a)}.$$

Beweis. Wir bezeichnen

$$\mathrm{R}_{n+1}(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} U_{s+1}^i(\mathbf{H}_{s+1,k}).$$

Nach (5,11) gilt

$$\| R_{n+1}(x) \| \leqq \varkappa_{s+1,k}(a) \sum_{i=n+1}^{\infty} \gamma_{s+1}^{i}(a) = \gamma_{s+1}^{n+1}(a) \frac{\varkappa_{s+1,k}(a)}{1 - \gamma_{s+1}(a)},$$

womit die Ungleichung (5,12) bewiesen ist.

Satz 5,10. *Es gelte* (*). *Es sei* $a_{s+1} = a$ *und es existiere ein* i, $1 \leqq i \leqq n$ *so, daß* $a_i = \infty$. *Es sei* a_l *die erste Zahl* $a_{s+1}, \ldots, a_{n+s}$ *für welche* $a_l = \infty$. *Nehmen wir an, daß*

$$\gamma_l(x) < \infty, \tag{5,13}$$

$$\varkappa_{l,k}(x) < \infty, \tag{5,14}$$

gilt. Dann konvergiert die Reihe (4,3) *gleichmäßig in jedem Intervall* $\langle a, b \rangle$, *dessen Endpunkt* a *die Bedingung* $\gamma_l(a) < 1$ *erfüllt.*

Beweis. Durch die Verwendung des Hilfssatzes 5,7 kann man leicht folgende Behauptungen ableiten.

1° Wenn $s + 1 < l \leqq k$ oder $l \leqq k < s + 1$ oder $k < s + 1 < l$ ist, dann gilt für $x \in \langle a, b \rangle$

$$\| U_{s+1}^{i}(\boldsymbol{H}_{s+1,k}) \| \leqq \varkappa_{s+1,l}(b)\, \gamma_l^{i}(a)\, \varkappa_{l,k}(a), \quad i = 0, 1, \ldots \tag{5,15}$$

2° Wenn $l < s + 1 \leqq k$ oder $s + 1 \leqq k < l$ oder $k < l < s + 1$ ist, dann gilt für $x \in \langle a, b \rangle$

$$\| U_{s+1}^{i}(\boldsymbol{H}_{s+1,k}) \| \leqq \varkappa_{s+1,l}(b)\, \gamma_l^{i-1}(a)\, \varkappa_{l,k}(a), \quad i = 1, 2, \ldots \tag{5,16}$$

In den beiden Fällen existiert unter der Voraussetzung $\gamma_l(a) < 1$ konvergente geometrische Reihe, die Majorante der Reihe (4,3) ist. Die Reihen (4,3) konvergieren also gleichmäßig im Intervall $\langle a, b \rangle$.

Satz 5,11. *Es seien die Voraussetzungen des Satzes 5,10 erfüllt. Dann gilt für* $x \in \langle a, b \rangle$

$$\| L_s \boldsymbol{Y}_k(x) - \sum_{i=0}^{n} U_{s+1}^{i}(\boldsymbol{H}_{s+1,k}) \| \leqq \varkappa_{s+1,l}(b)\, \gamma_l^{n+1}(a) \frac{\varkappa_{l,k}(a)}{1 - \gamma_l(a)}, \tag{5,17}$$

$$\| L_s \boldsymbol{Y}_k(x) - \boldsymbol{H}_{s+1,k}(x) - \sum_{i=1}^{n} U_{s+1}^{i}(\boldsymbol{H}_{s+1,k}) \| \leqq \varkappa_{s+1,l}(b)\, \gamma_l^{n}(a) \frac{\varkappa_{l,k}(a)}{1 - \gamma_l(a)} \tag{5,18}$$

Der Beweis kann analog wie bei Satz 5,9 durchgeführt werden.

LITERATUR

[1] U. Richard: *Serie asintotiche per una di equazioni differenziali lineari non oscillanti del 2 ordine*, Rendiconti del Sem. Mat. Torino, Vol. 23 (1963–64)

[2] R. Bellman: *Teorija ustojčivosti rešenij differencial'nych uravněnij*, Izdatělstvo inostrannoj lit. 1954

[3] A. Wintner: *On a theorem of Bocher in the theory of ordinary linear differential equations*, Amer. J. Math., 76, 1954

[4] M. Ráb: *Über lineare Perturbationen eines Systems von linearen Differentialgleichungen*, Czech. Mat. Jm Tm 8 (83), 1953

[5] M. RÁB: *Asymptotische Formeln fur die Lösungen der Differentialgleichung* $y'' + q(x)y = 0$, Czech. Mat. J. T. 14 ([12]), 1964
[6] M. RÁB: *Note sur les Formules asymptotiques pour les solutions d'un système d'equations differentialles lineaires,* Czech. Mat. J. T. 16(91), 1966

I. Res
Mathematisches Institut
Ackerbauhochschule
Zemědělská 3, Brno
Tschechoslowakei