Robert Karpe

Verallgemeinerung der goniometrischen Funktionen

Archivum Mathematicum, Vol. 9 (1973), No. 1, 26--48

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104789`

ARCH. MATH. 1, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS
IX:26—48 1973

VERALLGEMEINERUNG DER GONIOMETRISCHEN FUNKTIONEN

ROBERT KARPE (BRNO)

(Eingegangen am 10. März 1972)

In dieser Behandlung betrachten wir die goniometrischen Funktionen in engerem Sinne des Wortes; d. h. wir behandeln nur die Funktionen $\cos t$, $\sin t$, weil die übrigen als die von jenen zusammegesetzten betrachtet werden können.

Dieses Studium bietet unmittelbare Analogien der goniometrischen Funktionen und zwar sowohl aus den analytischen als auch den metrischen Gründen.

Die ganze Behandlung besteht aus fünf thematischen Absätzen, A bis E, deren Inhalt immer im voraus angedeutet wird.

A. Analytische Analogien und deren Prinzipien.

1] **Definition.** $f(t)$ sei eine Funktion im Argument t, mit unbeschränkter Anzahl der Ableitungen im gewissen Intervall; n sei eine natürl. Zahl.

Die Funktion mit der Ableitungsperiode n ist eine Funktion $f(t)$, für die gilt:

$$D_n f(t) = f(t), \qquad D_k f(t) \neq f(t), \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{1}$$

2] **Vereinbarung.** Die charakteristische Gleichung, die der dif. Gleichung (1) entspricht, bezeichnen wir $\lambda^n = 1$. Die Wurzeln dieser Gleichung bezeichnen wir $\varepsilon_{n,k} = \varepsilon_k$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, wo (wie wohl bekannt ist) gilt:

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \,.\, \sin\frac{2k\pi}{n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{2}$$

3] **Definition.** Eine Spezialbasis der partikulären Lösungen der Gleichung (1), die wir bezeichnen:

$$f_{n,i}(t), \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{3}$$

besteht aus den Funktionen, die folgende Bedingungen erfüllen:

$$\begin{cases} f_{n,0}(0) = 1; \quad f_{n,j}(0) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1 \\ Df_{n,j}(t) = f_{n,j+1}(t), \quad j = 0, 1, \ldots, n-1. \end{cases} \tag{4}$$

4] **Vereinbarung.** $s_{n,k}$ sei die Bezeichnung für die Summe $\sum_{j=0}^{n-1} (\varepsilon_{n,j})^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ also für die sogenannte k-te symmetrische Funktion, die den Wurzeln der Gleichung $\lambda^n = 1$ entspricht.

5] Lemma. Es gilt:

$$s_{n,k} = 0 \quad \text{für} \quad k \neq C \,.\, n$$
$$= n \quad \text{für} \quad k = C \,.\, n \tag{5}$$

wo C eine ganze Zahl ist.

Beweis. Betrachten wir ein willkürliches Polynom n-ten Grades: $P_n(x) = = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$. $S_{n,k}$ sei die Bezeichnung für die k-te symmetrische Funktion der Wurzeln des Polynoms $P_n(x)$. Dann gilt folgende Rekurenz: $S_{n,k} + a_1 \,.\, S_{n,k-1} + a_2 \,.\, S_{n,k-2} + \ldots + a_{k-1} \,.\, S_{n,1} + k \,.\, a_k = 0$, siehe z. B. [1], Seite 39. Daraus sieht man sofort, dass für das Polynom $\lambda^n - 1 = 0$ gilt: 1) $s_{n,k} = 0$ für $k = 1, 2, \ldots, n - 1$. 2) $s_{n,k} = n$ für $k = 0$. Es gelte weiter $k = = n + h$, wo $h = 0, 1, 2, \ldots$. Dann gilt: $s_{n,n+h} = \sum\limits_{i=0}^{n-1} (\varepsilon_i)^{n+h} = \sum\limits_{i=0}^{n-1} (\varepsilon_i)^n \,.\, (\varepsilon_i)^h = = \sum\limits_{i=0}^{n-1} (\varepsilon_i)^h = s_{n,h}$. W.z.b.w.

6] Vereinbarung. Mit dem Symbol V_n bezeichnen wir jene Vandermonde's Determinante n-ten Grades, in deren j-ter Spalte einzelne Potenzen der Wurzeln $\varepsilon_{n,j} = \varepsilon_j$, $j = 0, 1, \ldots, n - 1$, der Gleichung $\lambda^n = 1$ sind, siehe (6). Wegen der Übereinstimmung mit den Wurzeln $\varepsilon_{n,j}$ wollen wir die Zeilen- und Spaltenindexen bei V_n von der Null anfangend bezeichnen.

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \varepsilon_0 & \varepsilon_1 & \ldots & \varepsilon_{n-1} \\ \varepsilon_0^2 & \varepsilon_1^2 & \ldots & \varepsilon_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_0^{n-1} & \varepsilon_1^{n-1} & \ldots & \varepsilon_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} \tag{6}$$

Ersetzen wir nun in der Determinante V_n ihre k-te Spalte durch die erste Spalte der Einsermatrix $\mathbf{E}_n$: die heimit enstandene Determinante bezeichnen wir $V_{n,k}$; $k = 0, 1, \ldots, n - 1$.

7] Lemma. Es sei gegeben das System von n linearen, nicht homogenen Gleichunggen mit n Unbekannten, in folgender Matrixform:

$$\mathbf{V}_n \,.\, \mathbf{z} = \mathbf{j}; \tag{7}$$

$\mathbf{V}_n$ ist die der Determinante V_n zugehörige Matrix; $\mathbf{z}$ ist der Spaltenvektor von den Unbekannten: $\mathbf{z} = (z_0, z_1, \ldots, z_{n-1})$, und $\mathbf{j}$ ist der Vektor aus der ersten Spalte der Matrix $\mathbf{E}_n$; $\mathbf{j} = (1, 0, 0, \ldots, 0, 0)$.

Das eben angeführte System hat folgende Lösung:

$$z_i = \frac{1}{n}; \qquad i = 0, 1, \ldots, n - 1 \tag{8}$$

Beweis. Beachten wir zuerst, dass das System (7) gerade eine Lösung hat: V_n ist nämlich eine Vandermond'sche Determinante und keiner von ihren Faktoren, d. h. $(\varepsilon_j - \varepsilon_k)$, $j \neq k$, wird gleich der Null, da einzelne Wurzeln der Gleichung $\lambda^n = 1$ voneinander verschieden sind. Der Wert der Determinante verändert sich nicht, wenn wir zu den Elementen der k-ten Spalte die entsprechenden Elemente von allen übrigen Spalten addieren. Dann bekommen wir:

$$V_n = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & k\text{-te Spalte} & & \\ & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & \dots & n & \dots & 1 \\ \varepsilon_0^1 & \dots & s_{n,1} & \dots & \varepsilon_{n-1}^1 \\ \varepsilon_0^2 & \dots & s_{n,2} & \dots & \varepsilon_{n-1}^2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_0^{n-1} & \dots & s_{n,n-1} & \dots & \varepsilon_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} \end{array}$$

Aber nach dem Lemma 5. gilt: $s_{n,1} = s_{n,2} = \dots = s_{n,n-1} = 0$. Wenn wir also aus den Elementen der k-ten Spalte die Nummer n ausklammern, bekommen wir: $V_n = n \,.\, V_{n,k}$; $k = 0, 1, \dots, n - 1$. Wenn wir nun weiter, zwecks der Lösung des Systems (7), die Cramer'sche Regel anwenden, dann gilt:

$$z_k = \frac{V_{n,k}}{V_n} = \frac{\frac{1}{n} \,.\, V_n}{V_n} = \frac{1}{n}, \qquad k = 0, 1, \dots, n - 1$$

8] **Satz.** Die Funktion $f_{n,i}(t)$; $i = 0, 1, \dots, n - 1$; kann man durch folgende Formel ausdrücken:

$$f_{n,i}(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_{n,j}^i \,.\, e^{\varepsilon_{n,j} \,.\, t}; \qquad i = 0, 1, \dots, n - 1 \tag{9}$$

Beweis. Die allgemeine Lösung der Gl. (1), wenn wir ε_i anstatt $\varepsilon_{n,i}$ schreiben, ist:

$$z_0 \,.\, e^{\varepsilon_0 \,.\, t} + z_1 \,.\, e^{\varepsilon_1 \,.\, t} + \dots + z_{n-1} \,.\, e^{\varepsilon_{n-1} \,.\, t}$$

wo z_i die unbestimmten Koeffizitenten sind. Wenn wir nun von der allgemeinen zur partikulären Gleichung übergehen, wobei die Bedingungen (4) zu erfüllen sind, gelangen wir offenbar zu dem System (7), so dass, mit Hinsicht auf das Lemma 7., die Glütigkeit unseres Satzes ersichtlich wird.

9] **Bemerkung.** Die Formeln (9) für $n = 2$ sind die wohl bekannten Formeln für den hyperbolischen Sinus und Cosinus.

10] **Satz.** Die Funktionen $f_{n,i}(t)$; $i = 0, 1, \dots, n - 1$; kann man als folgende Potenzreihen ausdrücken; $t \in (-\infty, \infty)$:

$$\begin{aligned} f_{n,0}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{nk}}{(nk)!} \\ f_{n,j}(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{nk-j}}{(nk-j)!}, \qquad j = 1, 2, \dots, n - 1 \end{aligned} \tag{10}$$

Beweis. Nach dem Satz 8. gilt:

$f_{n,j}(t) = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} \varepsilon_r^j \, e^{\varepsilon_r \,.\, t} = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_r^j (\varepsilon_r \,.\, t)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\varepsilon_r^{j+i}}{n} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \,.\, \frac{s_{n,i+j}}{n}$, wo nach 7. gilt: 1) $s_{n,i+j} = 0$ für $i + j \neq n \,.\, k$, 2) $s_{n,i+j} = n$ für $i + j = n \,.\, k$, wo

$k = 0, 1, 2, \ldots,$ so dass gilt: $f_{n,j}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{nk-j}}{(nk-j)!}$; dabei für $j = 0$ gilt: $f_{n,0}(0) =$ $= 1$, siehe (4). W.z.b.w.

11] Satz. Es gilt folgende Formel für $t \in (-\infty, \infty)$:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f_{n,i}(t) = e^t \tag{11}$$

Beweis. Nach 7. und 8. gilt: $\sum_{i=0}^{n-1} f_{n,i}(t) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \varepsilon_k^i \, e^{\varepsilon_k \cdot t} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\varepsilon_k \cdot t} \,.$ $. \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_k^i = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\varepsilon_k \cdot t} \,. \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i^k = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\varepsilon_k \cdot t} \,. s_{n,k} = \frac{1}{n} e^{\varepsilon_0 \cdot t} \,. s_{n,0} = e^t.$

12] Satz. *Es gilt folgende Analogie des Moivre'schen Satzes:*

$$\sum_{i=0}^{n-1} f_{n,i}(rt) = \Big[\sum_{i=0}^{n-1} f_{n,i}(t)\Big]^r \tag{12}$$

wo r eine beliebige reale Zahl ist; $n \geqq 1$; $t \in (-\infty, \infty)$.

Beweis. Nach 11. gilt für ein beliebiges reelle Argument z: $\sum_{i=0}^{n-1} f_{n,i}(z) = e^z$. Setzen wir hier $z = r \,.\, t$ ein, so bekommen wir: $\sum_{i=0}^{n-1} f_{n,i}(rt) = e^{rt}$.

Nun potenzieren wir die Gl. (11) zum r-ten Grad; dann geht, durch den Vergleich mit der letzten Gleichung, unser Satz sofort hervor.

13] Satz. *Zwischen den Funktionen* $f_{n,i}(t)$; $i = 0, 1, \ldots, n-1$, *gelten folgende Relationen, die mit den additiven Relationen der goniometrischen Funktionen analogisch sind:*

$$f_{n,k}(x+y) = \sum_{i=0}^{n-1} f_{n,i}(x) \cdot f_{n,k-i}(y), \qquad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \tag{13}$$

wo man im Falle $k - i < 0$ den Index $n + k - i$ anstatt $k - i$ benützt.

Beweis. Unterscheiden wir hier zwei Arten der Faktoren:

1) Wenn $p = q$ ist, dann gilt $\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{n^2} \,.\, \varepsilon_p^i \,.\, \varepsilon_p^{k-i} \,.\, e^{\varepsilon_p \cdot x} \,.\, e^{\varepsilon_p \cdot y} = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{n^2} \,.$ $. \big(\sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_p^{i+k-i} \,.\, e^{\varepsilon_p(x+y)}\big) = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{n^2} \,.\, n \,.\, \varepsilon_p^k \,.\, e^{\varepsilon_p(x+y)} = f_{n,k}(x+y)$

2) Wenn $p \neq q$ ist, dann gilt: $\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{p=0}^{n-1}\sum_{q=0}^{n-1} \frac{1}{n^2} \,.\, \varepsilon_p^i \,.\, \varepsilon_q^{k-i} \,.\, e^{\varepsilon_p \cdot x + \varepsilon_q \cdot y} = \sum_{p=0}^{n-1}\sum_{q=0}^{n-1} \frac{1}{n^2} \,.$ $. e^{\varepsilon_p \cdot x + \varepsilon_q \cdot y} \,.\, \varepsilon_{kq} \,.\, \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i^{p-q} = 0$, weil $\varepsilon_p^i \,.\, \varepsilon_q^{k-i} = \varepsilon_q^k \,.\, \varepsilon_{i(p-q)} = \varepsilon_{kq} \,.\, \varepsilon_i^{p-q}$; dabei $p - q \neq$ $\neq 0$. W.z.b.w.

14] Bemerkung. Aus den angeführten Formeln (13) entstehen auch weitere Identitäten, z. B. wenn wir $y = -x$ setzen, mit Hinsicht auf (4).

15] Lemma. Es sei $\varepsilon_j = \varepsilon_{n,j}$ eine beliebige Wurzel der Gl. $\lambda^n = 1$ und i sei ein beliebiges Element der Menge $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Dann gilt:

$$f_{n,i}(\varepsilon_j \cdot z) = \varepsilon_{n-ij} \cdot f_{n,i}(z) \tag{14}$$

Beweis. Durch den Einsatz $t = \varepsilon_j \cdot z$ bekommen wir nach (9): $f_{n,i}(\varepsilon_j z) = = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k^i \cdot e^{\varepsilon_k \varepsilon_j z} = \varepsilon_j^{-i} \cdot \varepsilon_j^i \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k^i \, e^{\varepsilon_k \varepsilon_j \cdot z}$. Da es gilt: $\varepsilon_j^i \cdot \varepsilon_k^i = \varepsilon_i^j \cdot \varepsilon_i^k = \varepsilon_i^{j+k} = = \varepsilon_{j+k}^i$, und weiter: $\varepsilon_j^{-i} = \varepsilon_{-ij} = \varepsilon_{n-ij}$, kann man den obigen Ausdruck folgenderweise umformen: $f_{n,i}(\varepsilon_j \cdot z) = \varepsilon_{n-ij} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_{k+j}^i \cdot e^{\varepsilon_{k+j} \cdot z}$. Aber die Folge $\{\varepsilon_j^i, \varepsilon_{1+j}^i, \ldots, \varepsilon_{n-1+j}^i\}$ bildet, mit Hinsicht auf die Identität $\varepsilon_{n+k}^i = \varepsilon_k^i$, eine zyklische Permuation der Grundfolge $\{\varepsilon_0^i, \varepsilon_1^i, \ldots, \varepsilon_{n-1}^i\}$. Demnach gilt: $\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_{k+j}^i \cdot e^{\varepsilon_{k+j} \cdot z} = = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k^i \cdot e^{\varepsilon_k \cdot z}$, so dass die zu beweisende Relation gilt.

16] Satz. (Der Satz über die Zerlegung der Formel (12) nach den Wurzeln der Gleichung $\lambda^n = 1$).

Wenn r in der Gleichung (12) eine ganze Zahl bedeutet, dann zerfällt diese Gleichung — nach der Substitution $t = \varepsilon_1 \cdot z$ und nach der folgenden Durchführung des angezeigten Potenzierens auf der rechten Seite — in n Teilgleichungen; dabei wird die $(n-k)$-te Teilgleichung durch gerade alle jenen Glieder zusammengesetzt, die den Faktor ε_k enthalten. $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$. Die $(n-k)$-te Teilgleichung drückt hiemit die Funktion des r-fachen Argumentes, d. i. $f_{n,k}(rz)$, durch die zugehörigen Funktionen des einfachen Argumentes aus.

Beweis. In der Gleichung (13) setzen wir $y = (r-1) \cdot x$ ein; dann nach der Substitution $t = \varepsilon_1 \cdot z$, siehe (14), bekommen wir: $\varepsilon_{n-k} \cdot f_{n,k}(rt) = \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_{n-i} \cdot f_{n,i}(t) \cdot \cdot \varepsilon_{n-k+i} \cdot f_{n,k-i}((r-1)\,t)$, wo gilt: $\varepsilon_{n-i} \cdot \varepsilon_{n-k+i} = \varepsilon_n \cdot \varepsilon_{n-i-k+i} = \varepsilon_{n-k}$, so dass gilt:

$$\varepsilon_{n-k} \cdot f_{n,k}(rt) = \varepsilon_{n-k} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f_{n,i}(t) \cdot f_{n,k-i}((r-1)\,t) \tag{A}$$

Wenn wir dies schrittweise für $k = 0, 1, \ldots, n-1$, durchführen, und alle diesen Gleichungen summieren, so bekommen wir:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_{n-k} \cdot f_{n,k}(rt) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_{n-k} \cdot f_{n,i}(t) \cdot f_{n,k-i}((r-1)\,t) \tag{B}$$

Anderseits, wenn wir die Gl. (12) für das Argument $\varepsilon_1 t$ statt t schreiben, bekommen wir nach (14):

$$\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_{n-k} \cdot f_{n,k}(rt) = \left[\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_{n-k} \cdot f(t)\right]^r \tag{C}$$

Nun stimmen die linken Seiten der Gleichungen (B), (C) überein und ausserdem kann die rechte Seite von (B) (schrittweise) ausschliesslich durch die Funktionen des einfachen Argumentes ausgedrückt werden. Daraus ist aber ersichtlich, dass die rechten Seiten von (B), (C), nur zwei verschiedene Arten von demselben Ausdruck sind. Die Gl. (B) kann man aber in n Teilgleichungen der Art (A) zerlegen, d. h. alle Glieder von einer und derselben Wurzel ε_k bilden immer eine Teilgleichung. W.z.b.w.

17] **Beispiel.** *Applikation des Satzes* 16. *für* $n = 3$.

$\sum_{j=0}^{2} f_{3,j}(2x) = [\sum_{j=0}^{2} f_{3,j}(x)]^2$; nach der Subst. $x = \varepsilon_1 t$: $f_{3,0}(2t) + \varepsilon_2 . f_{3,1}(2t) + \varepsilon_1 . f_{3,2}(2t) = [f_{3,0}(t) + \varepsilon_2 . f_{3,1}(t) + \varepsilon_1 . f_{3,2}(t)]^2 = f^2_{3,0}(t) + \varepsilon_1 . f^2_{3,1}(t) + \varepsilon_2 . f^2_{3,2}(t) + \varepsilon_2 . 2 . f_{3,0}(t) . f_{3,1}(t) + \varepsilon_1 . 2 . f_{3,0}(t) . f_{3,2}(t) + 2 . f_{3,1}(t) . f_{3,2}(t)$. Daraus, nach dem Vergleich aller Glieder von derselben Wurzel ε_j:

a) $$f_{3,0}(2t) = f^2_{3,0}(t) + 2 . f_{3,1}(t) . f_{3,2}(t)$$

b) $$f_{3,1}(2t) = f^2_{3,2}(t) + 2 . f_{3,0}(t) . f_{3,1}(t)$$

c) $$f_{3,2}(2t) = f^2_{3,1}(t) + 2 . f_{3,0}(t) . f_{3,2}(t)$$

Dies aber entspricht dem Satz 13. für $n = 3$, wenn wir $x = y = t$ setzen.

B. Die geometrischen Analogien in einer Ebene mit dem System von n Halbachsen. Prinzipielle Verhältnisse.

18] **Definition.** Eine Ebene mit dem Koordinatensystem von n Halbachsen benennen wir kurz „*die Ebene* α“. Die Ebene der komplexen Zahlen (die *Gauss'sche* Ebene) benennen wir kurz „*die Ebene* γ“.

Die Deckung zweier Koordinatenebenen bedeutet, dass diese beiden Ebenen dicht aufeinanderliegen, wie zwei Nachbarseiten in einem Buch. Jede zwei Punkte, die bei der Deckung im Kontakt sind, werden immer mit demselben Buchstaben bezeichnet. Die Anfangspunkte der beiden Koordinatenebenen müssen wechselseitig im Kontakt sein.

Bringen wir die Deckung der Ebene α mit γ zustande: In der Ebene γ seien einzelne Wurzeln ε_j der Gl. $\lambda^n = 1$ jenach der Vereinbarung 2. bezeichnet. Ausserdem seien hier auch die zugehörigen Radiusvektoren $\bar{\varepsilon}_j = \overrightarrow{0\varepsilon_j}$ bezeichnet; $j = 0, 1, \ldots, n - 1$.

Das Koordinatsystem von n Halbachsen in der Ebene α ist das System von n orientierten Halbgeraden $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$, die aus dem gemeinsamen Anfangspunkt 0 in solcher Richtung führen, dass die Halbachse X_j mit dem Radiusvektor $\bar{\varepsilon}_j \in \gamma$ zusammenfällt; $j = 0, 1, \ldots, n - 1$. Dabei haben X_j, $\bar{\varepsilon}_j$, auch dieselbe Orientierung.

Ein beliebiger Punkt $P \in \alpha$ wird angegeben durch einen geordneten Satz von n reellen, nicht negativen Zahlen $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$, so dass der entsprechende Punkt $P \in \gamma$ als der Endpunkt des orientierten Vektorpolygons $a_0\bar{\varepsilon}_0 \wedge a_1\bar{\varepsilon}_1 \wedge \ldots \wedge a_{n-1} . \bar{\varepsilon}_{n-1}$ fungiert, das in dem Anfangspunkt 0 beginnt. $(\bar{\varepsilon}_j \parallel a_j\bar{\varepsilon}_j)$.

Mit dem Symbol r bezeichnen wir den Radius OP (oder den Absolutwert des Radiusvektors $\overrightarrow{OP}$).

19] **Bemerkung.** Einem und demselben Punkt $P \in \alpha$ kann man ersichtlich eine unendliche Menge der n-gliedrigen Sätze von Koordinaten zuteilen, d. h. jeder von diesen Sätzen genügt nach der Def. 18.. In dieser Menge existiert aber gerade ein

Koordinatensatz, der einem willkürlich gewählten Parameterswert t entspricht. Darüber im Absatz C. Einstweilen setzen wir einen willkürlichen Koordinatensatz des Punktes P voraus.

20] **Definition.** Es sei ein willkurlicher Punkt $P \in \alpha$, der durch einen beliebigen Koordinatensatz $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ angegeben ist; $n \geqq 3$. Die zusammenhängende gebrochene Linie $\in \alpha$, die aus den obigen Koordinaten so gebildet wird, dass sie sich bei der Deckung α mit γ überall mit dem orientierten Vektorpolygon $a_0\bar{\varepsilon}_0 \wedge \wedge a_1\bar{\varepsilon}_1 \wedge \ldots \wedge a_{n-1}\bar{\varepsilon}_{n-1}$ deckt, bildet, zusammen mit dem Radius OP, ein $(n+1)$-eck, welches wir als „*das Koordinaten-$(n+1)$-eck des Punktes $P \in \alpha$*" bezeichnen. Dabei benennen wir die Seite OP „*die Hypothenuse*" und die Seite a_j „*die j-te Kathete*", $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

21] **Satz.** Es sei ein Punkt $P \in \alpha$ durch seinen beliebigen Koordinatensatz $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ gegeben; $n \geqq 3$. Dann gilt

a) Für $n = 2k+1$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$r^2 = \sum_{i=0}^{2k} \Big(\sum_{j=0}^{k} + \sum_{j=1}^{k}\Big) a_i \, . \, a_{i+j} \, . \cos \frac{2\pi j}{2k+1}, \tag{15}$$

b) Für $n = 2k$, $k = 2, 3, 4, \ldots$

$$r^2 = \sum_{i=0}^{2k-1} \Big(\sum_{j=0}^{k} + \sum_{j=1}^{k-1}\Big) a_i \, . \, a_{i+j} \, . \cos \frac{\pi j}{k}, \tag{16}$$

wobei in den beiden Fällen gilt $a_{cn+j} = a_j$, wo c eine ganze Zahl ist.

Beweis. Bilden wir das Skalarprodukt $\overrightarrow{OP} \, . \, \overrightarrow{OP}$; wir bekommen:

$$r^2 = \Big(\sum_{i=0}^{n-1} a_i\bar{\varepsilon}_i\Big) \, . \, \Big(\sum_{j=0}^{n-1} a_j\bar{\varepsilon}_j\Big)$$

Erwägen wir, wieviele verschiedene Paare entstehen auf der rechten Seite dieser Gleichung. Es gilt offenbar: 1) Zwei Faktoren mit wechselseitig gleichen, bzw. ungleichen Indexen, treffen immer gerade einmal, bzw. zweimal zusammen. 2) Es gilt: $(a_i\bar{\varepsilon}_i) \, . \, (a_{i+j}\bar{\varepsilon}_{i+j}) = a_i \, . \, a_{i+j} \, . \cos \frac{2\pi \, . \, j}{n}$.

Überlegen wir nun wieviele Paare $a_i \, . \, a_{i+j} \, . \cos \frac{2\pi j}{n}$ existieren für einzelne Indexe j: ordnen wir dem Indexensatz $(0, 1, 2, \ldots, n-1)$ seine j-te zyklische Permutation zu; hiemit bekommen wir:

$$\{(0, j), (1, 1+j), \ldots, (n-1-j, n-1), (n-j, 0), \\ (n-j+1, 1), \ldots, (n-1, j-1)\}. \tag{17}$$

Betrachten wir nun zwei Fälle: a) $n = 2k+1$, $k = 1, 2, 3, \ldots$: Dann geht die Folge (17), schrittweise für $j = 1, 2, \ldots, k$, in die zugehörige Folge über, die in jedem Fall aus $(2k+1)$ verschiedenen Paaren besteht. b) $n = 2k$, $k = 2, 3, 4, \ldots$: Dann geht (17) in die zugehörige Folge über, die bei den Fällen $j \neq k$ immer aus $2k$

verschiedenen Paaren besteht. In dem Fall $j = k$ erscheint jedoch jedes Paar gerade zweimal, so dass summarisch gilt:

ad a) $$r^2 = \sum_{i=0}^{2k} a_i^2 + 2 \, . \sum_{i=0}^{2k} \sum_{j=1}^{k} a_i \, . \, a_{i+j} \, . \cos \frac{2\pi j}{2k+1}$$

ad b) $$r^2 = \sum_{i=0}^{2k-1} a_i^2 + 2 \, . \sum_{i=0}^{2k-1} \sum_{j=1}^{k-1} a_i \, . \, a_{i+j} \, . \cos \frac{\pi j}{k} - \sum_{i=0}^{2k-1} a_i \, . \, a_{i+k}$$

Daraus bekommen wir, nach kurzer Umformung, die obigen Formeln.

Die Beziehung $a_{cn+j} = a_j$, wo c eine ganze Zahl ist, geht daraus hervor, dass immer a_i als Koeffizient beim Vektor $\bar{\varepsilon}_i$ fungiert.

22] **Definition.** In einem Koordinaten-$(n+1)$-eck, der einem beliebigen Punkt $P \in \boldsymbol{\alpha}$, gehört, fungieren folgende metrischen Funktionen:

(18) $$\varphi_{n,j} = \frac{a_j}{r}; \qquad j = 0, 1, \ldots, n-1$$

Mit Worten: $\varphi_{n,j}$ ist das Verhältnis der j-ten Kathete ($j = 0, 1, \ldots, n-1$) zur Hypothenuse, in einem Koordinaten-$(n+1)$-eck eines beliebigen Punktes $P \in \boldsymbol{\alpha}$, $P \neq 0$.

23] **Bemerkung.** Eine so definierte Funktion $\varphi_{n,,j}$ ändert sich im allgemein mit der Änderung der Lage der zuständigen Gipfelpunkte des Koordinaten-$(n+1)$-eckes; also nicht nur mit der Änderung der Lage des Punktes P.

24] **Satz.** Zwischen den metrischen Funktionen $\varphi_{n,i}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, die einem Koordinaten-$(n+1)$-eck gehören, gelten folgende Relationen:

a) Für $n = 2k+1$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

(19) $$1 = \sum_{i=0}^{2k} \Big(\sum_{j=0}^{k} + \sum_{j=1}^{k}\Big) \varphi_{n,i} \cdot \varphi_{n,i+j} \cdot \cos \frac{2\pi j}{2k+1}$$

b) Für $n = 2k$, $k = 2, 3, 4, \ldots$

(20) $$1 = \sum_{i=0}^{2k-1} \Big(\sum_{j=0}^{k} + \sum_{j=1}^{k-1}\Big) \varphi_{n,i} \, . \, \varphi_{n,i+j} \, . \cos \frac{\pi j}{k}$$

Beweis. Wenn wir die Gleichung (15), bzw. (16), durch die Grösse r^2 dividieren, dann bekommen wir nach kurzer Umformung und nach dem Einsatz von (18) sofort die zu beweisenden Relationen.

C. Die Verbindung der gefundenen Relationen, d. h. der analytischen mit den metrischen.

25] **Satz.**

a) Für $n = 2k+1$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, und für $t \in (-\infty, \infty)$, gilt folgende Identität.

(21) $$e^{2\left(\cos \frac{2\pi}{2k+1}\right) . t} = \sum_{i=0}^{2k} \Big(\sum_{j=0}^{k} + \sum_{j=1}^{k}\Big) f_{n,i}(t) \cdot f_{n,i+j}(t) \, . \cos \frac{2\pi j}{2k+1}$$

b) Für $n = 2k$, $k = 2, 3, 4, \ldots$, und für $t \in (-\infty, \infty)$, gilt folgende Identität:

(22) $$e^{2\left(\cos\frac{\pi}{k}\right).t} = \sum_{i=0}^{2k-1}\left(\sum_{j=0}^{k}+\sum_{j=1}^{k-1}\right) f_{n,i}(t)\cdot f_{n,i+j}(t)\,.\cos\frac{\pi j}{k}$$

Beweis ad a) ε_i bedeutet hier die i-te Wurzel der Gleichung $\lambda^{2k+1} = 1$. Weiter bezeichnen wir $\varepsilon_{2k+1-j} = \varepsilon_{-j}$. Dann gilt, nach (9) und nach (2):

$$\sum_{i=0}^{2k}\left(\sum_{j=0}^{k}+\sum_{j=1}^{k}\right) f_{2k+1,i}(t)\cdot f_{2k+1,i+j}(t)\,.\cos\frac{2\pi j}{2k+1} = \sum_{i=0}^{2k}\left(\sum_{j=0}^{k}+\sum_{j=1}^{k}\right)\left(\frac{1}{2k+1}\sum_{r=0}^{2k}\varepsilon_r^i e^{\varepsilon_r t}\right)\cdot \left(\frac{1}{2k+1}\sum_{s=0}^{2k}\varepsilon_s^{i+j}e^{\varepsilon_s t}\right)\cdot\frac12(\varepsilon_j+\varepsilon_{-j}) = \frac12\cdot\frac{1}{(2k+1)^2}\sum_{r=0}^{2k}\sum_{s=0}^{2k} e^{(\varepsilon_r+\varepsilon_s)t}\,.\left(\sum_{j=0}^{k}+\sum_{j=1}^{k}\right)\varepsilon_{js}\cdot(\varepsilon_j+\varepsilon_{-j})\sum_{i=0}^{2k}\varepsilon_i^{r+s} = |\text{ mit Hinsicht auf (5) }| = \frac12\cdot\frac{1}{2k+1}\sum_{s=0}^{2k} e^{(\varepsilon_s+\varepsilon_{-s})t}\left(\sum_{j=0}^{k}+\sum_{j=1}^{k}\right)\cdot\varepsilon_{js}(\varepsilon_j+\varepsilon_{-j}) = |\text{ zerlgen wir }| = \left\{\frac12\cdot\frac{1}{2k+1}e^{(\varepsilon_0+\varepsilon_0)t}\left(\sum_{j=0}^{k}+\sum_{j=1}^{k}\right)\varepsilon_0(\varepsilon_j-\varepsilon_{-j})\right\} + \left\{\frac12\cdot\frac{1}{2k+1}\sum_{p=1}^{k} e^{(\varepsilon_p+\varepsilon_{-p})t}\cdot\left(\sum_{j=0}^{k}+\sum_{j=1}^{k}\right)(\varepsilon_{jp}+\varepsilon_{-jp})(\varepsilon_j+\varepsilon_{-j})\right\}.$$

Die Ausdrücke in den geschweiften Klammern werden wir nun nacheinander umformen:

1) $$\frac12\cdot\frac{1}{2k+1}e^{2t}\left(\sum_{j=0}^{k}+\sum_{j=1}^{k}\right)(\varepsilon_j+\varepsilon_{-j}) = \frac12\cdot\frac{1}{2k+1}e^{2t}\,.[2\varepsilon_0+2(\varepsilon_1+\varepsilon_{-1})+2(\varepsilon_2+\varepsilon_{-2})+\ldots+2(\varepsilon_k+\varepsilon_{-k})] = \frac{1}{2k+1}e^{2t}\sum_{s=0}^{2k}\varepsilon_s = 0,$$ siehe (5).

2) $$\frac12\cdot\frac{1}{2k+1}\sum_{p=1}^{k}e^{(\varepsilon_p+\varepsilon_{-p})t}\cdot\left(\sum_{j=0}^{k}+\sum_{j=1}^{k}\right)[(\varepsilon_j^{p+1}+\varepsilon_{-j}^{p+1})+(\varepsilon_j^{p-1}+\varepsilon_{-j}^{p-1})] = \frac12\cdot\frac{1}{2k+1}\sum_{p=1}^{k}e^{(\varepsilon_p+\varepsilon_{-p})t}\cdot\left[2\sum_{u=0}^{2k}\varepsilon_u^{p+1}+2\sum_{v=0}^{2k}\varepsilon_v^{p-1}\right] = |\text{ mit Hinsicht auf (5) }| = \frac12\cdot\frac{1}{2k+1}e^{(\varepsilon_1+\varepsilon_{-1})t}\,.2(2k+1) = e^{2\left(\cos\frac{2\pi}{2k+1}\right)t}.$$

Beweis ad b) ε_j bedeutet hier die j-te Wurzel der Gleichung $\lambda^{2k} = 1$. Weiter bezeichnen wir $\varepsilon_{2k-j} = \varepsilon_{-j}$. Dann gilt, nach (9) und nach (2):

$$\sum_{i=0}^{2k-1}\left(\sum_{j=0}^{k}+\sum_{j=1}^{k-1}\right)f_{2k,i}(t)\cdot f_{2k,i+j}(t)\,.\cos\frac{\pi j}{k} = \sum_{i=0}^{2k-1}\left(\sum_{j=0}^{k}+\sum_{j=1}^{k-1}\right)\left(\frac{1}{2k}\cdot\sum_{r=0}^{2k-1}\varepsilon_r^i e^{\varepsilon_r t}\right)\left(\frac{1}{2k}\cdot\sum_{s=0}^{2k-1}\varepsilon_s^{i+j}e^{\varepsilon_s t}\right)\cdot\frac12(\varepsilon_j+\varepsilon_{-j}) = \frac12\cdot\frac{1}{(2k)^2}\cdot\sum_{r=0}^{2k-1}\sum_{s=0}^{2k-1}e^{(\varepsilon_r+\varepsilon_s)t}\,.\left(\sum_{j=0}^{k}+\sum_{j=1}^{k-1}\right)\varepsilon_{js}(\varepsilon_j+\varepsilon_{-j})\cdot\sum_{i=0}^{2k-1}\varepsilon_i^{r+s} = |\text{ mit Hinsicht auf (5) }| = \frac12\cdot\frac{1}{2k}\cdot\sum_{s=0}^{2k-1}e^{(\varepsilon_s+\varepsilon_{-s})t}\,.\left(\sum_{j=0}^{k}\sum_{j=1}^{k-1}\right)\varepsilon_{js}(\varepsilon_j+\varepsilon_{-j}) = |\text{ zerlegen wir }| = \left\{\frac12\cdot\frac{1}{2k}\cdot e^{(\varepsilon_0+\varepsilon_0)t}\,.\left(\sum_{j=0}^{k}+\sum_{j=1}^{k-1}\right)\varepsilon_0\cdot(\varepsilon_j+\varepsilon_{-j})\right\} + \left\{\frac12\cdot\frac{1}{2k}\cdot e^{(\varepsilon_k+\varepsilon_k)t}\,.\left(\sum_{j=0}^{k}+\sum_{j=1}^{k-1}\right)\cdot\varepsilon_{jk}\cdot(\varepsilon_j+\varepsilon_{-j})\right\} + \left\{\frac12\cdot\frac{1}{2k}\cdot\sum_{p=1}^{k-1}e^{(\varepsilon_p+\varepsilon_{-p})t}\,.\left(\sum_{j=0}^{k}+\sum_{j=1}^{k-1}\right)(\varepsilon_{jt}+\varepsilon_{-jt})(\varepsilon_j+\varepsilon_{-j})\right\}.$$

Die Ausdrücke in den geschweiften Klammern werden wir nun nacheinander umformen:

1) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2k} \cdot e^{2t}\{2\varepsilon_0 + 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_{-1}) + 2(\varepsilon_2 + \varepsilon_{-2}) + \ldots + 2(\varepsilon_{k-1} + \varepsilon_{-k+1}) + 2\varepsilon_k\} = \frac{1}{2k} \cdot$
$. e^{2t} . \sum_{s=0}^{2k-1} \varepsilon_s = 0$, siehe (5).

2) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2k} . e^{-2t} . \{2\varepsilon_0 - 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_{-1}) + 2(\varepsilon_2 + \varepsilon_{-2}) \pm \ldots + (-1)^{k-1} . 2(\varepsilon_{k-1} +$
$+ \varepsilon_{-k+1}) + (-1)^k . 2\varepsilon_k\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2k} . e^{-2t} . 2 . \sum_{s=0}^{2k-1} (-1)^s . \varepsilon_s = \frac{1}{2} . e^{-2t} . \{(-1) .$
$\cdot \sum_{s=0}^{2k-1} \varepsilon_s + 2 . \sum_{s=0}^{k-1} \varepsilon_{2s}\} = 0$ nach (5), denn $\sum_{s=0}^{k-1} \varepsilon_{2s}$ die Summe aller Wurzeln der Gleichung $\lambda^k = 1$ ist.

3) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2k} \sum_{p=1}^{k-1} e^{(\varepsilon_p + \varepsilon_{-p})t} . (\sum_{j=0}^{k} + \sum_{j=1}^{k-1}) [(\varepsilon_j^{p+1} + \varepsilon_{-j}^{p+1}) + (\varepsilon_j^{p-1} + \varepsilon_{-j}^{p-1})] = \frac{1}{2} \cdot$
$\cdot \frac{1}{2k} \sum_{p=1}^{k-1} e^{(\varepsilon_p + \varepsilon_{-p})t} . 2[(\varepsilon_0^{p+1} + \varepsilon_1^{p+1} + \varepsilon_{-1}^{p+1} + \varepsilon_2^{p+1} + \varepsilon_{-2}^{p+1} + \ldots + \varepsilon_{k-1}^{p+1} + \varepsilon_{k+1}^{p+1} +$
$+ \varepsilon_k^{p+1}) + (\varepsilon_0^{p-1} + \varepsilon_1^{p-1} + \varepsilon_{-1}^{p-1} + \ldots + \varepsilon_{k-1}^{p-1} + \varepsilon_{k+1}^{p-1} + \varepsilon_k^{p-1})] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2k} . e^{(\varepsilon_1 + \varepsilon_{-1})t} .$
$. 2 . 2k = e^{2\left(\cos \frac{\pi}{k}\right)t}$.

26] **Definition.** Mit dem Symbol $g_{n,j}(t)$; $j = 0, 1, \ldots, n-1$; $n \geqq 3$, bezeichnen wir folgende Funktionen:

$$g_{n,j}(t) = f_{n,j}(t) . e^{-\left(\cos \frac{2\pi}{n}\right).t}, \tag{23}$$

wo $f_{n,j}(t)$ nach (9) bestimmt werden.

27] **Satz.** Zwischen den Funktionen $g_{n,j}(t)$; $j = 0, 1, \ldots, n-1$; $n \geqq 3$, existieren folgende Relationen:

a) Für $n = 2k + 1$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ und für alle reellen Zahlen t, gilt:

$$1 = \sum_{i=0}^{2k} (\sum_{j=0}^{k} + \sum_{j=1}^{k}) g_{n,i}(t) . g_{n,i+j}(t) . \cos \frac{2\pi j}{n} \tag{24}$$

b) Für $n = 2k$, $k = 2, 3, 4 \ldots$ und für alle reellen Zahlen t, gilt:

$$1 = \sum_{i=0}^{2k-1} (\sum_{j=0}^{k} + \sum_{j=1}^{k-1}) g_{n,i}(t) . g_{n,i+j}(t) . \cos \frac{2\pi j}{n} \tag{25}$$

Beweis. Multiplizieren wir die Gleichung (21), bzw. (22), mit dem Faktor $\exp\left\{-2\left(\cos \frac{2\pi}{n}\right) . t\right\}$. Dann bekommen wir, nach kurzer Umformung mit Hinsicht auf (23), sofort die Relation (24), bzw. (25).

Beachten wir nun die Übereinstimmung der Form der Gleichungen (19), (24), bzw. (20), (25). Auf Grund dieser Übereinstimmung finden wir einen reellen Zusammenhang zwischen den Werten der analytischen Funktionen $g_{n,i}(t)$ und den Werten der entsprechenden metrischen Funktionen $\varphi_{n,i}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Dies kann man folgenderweise ausdrücken:

28] **Korolar.** *Es sei $n \geqq 3$. Einem realen Radius $r > 0$ und einem realen Argument t kann man gerade einen Punkt $P \in \alpha$, $OP = r$, zuordnen, u.z. mit jenem Koordinatensatz dieses Punktes, für den es gilt:*

$$a_i = r \cdot \varphi_{n,i} = r \cdot g_{n,i}(t); \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{26}$$

29] **Vereinbarung.** Für die Grössen aus dem Korolar ↑ führen wir die Bezeichnung $P(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$, bzw. $P(r, t)$ ein, und benenen wir sie „*der metrische-*", bzw. „*der polare Koordinatensatz des Punktes $P \in \alpha$*".

30] **Korolar.** *Es sei Index $n \geqq 3$. Jedem metrischen Koordinatensatz $P(a_0, a_1, \ldots$ $\ldots, a_{n-1})$, der einem bestimmten Punkt $P \in \alpha$ gehört, können wir gerade einen polaren Koordinatensatz $P(r, t)$ zuordnen, und umgekehrt.*

Beweis. Den Radius r ordnen wir nach (15) oder (16) zu. Dann gilt es nach (26), (23) und (11):

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i = r \cdot \sum_{i=0}^{n-1} g_{n,i}(t) = r \cdot e^{-\left(\cos\frac{2\pi}{n}\right) \cdot t} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f_{n,i}(t) = r \cdot e^{\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right) \cdot t}$$

Daraus, für jedes n, bekommen wir einen reellen Wert t. Das rückwertige Verfahren führt man nach Korolar 28.

31] **Satz.** Für die Funktionen $g_{n,i}(t)$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, gilt eine Analogie des *Moivre*-schen Satzes:

$$\sum_{i=0}^{n-1} g_{n,i}(rt) = \left[\sum_{i=0}^{n-1} g_{n,i}(t)\right]^r \tag{27}$$

wo r, t, beliebige reelle Zahlen sind.

Beweis. Multiplizieren wir die Gleichung (12) mit dem Faktor $\exp\left\{-\left(\cos\frac{2\pi}{n}\right) \cdot rt\right\}$. Nach kleiner Umformung mit Hinsicht auf (23), bekommen wir sofort die zu beweisende Relation.

32] **Satz.** Wenn r in der Gl. (27) eine ganze Zahl ist, dann zerfällt — nach der Substitution $t = \varepsilon_1 \cdot z$ und nach der folgenden Durchführung der angezeigten Operationen auf der rechten Seite. — diese Gleichung in n Teilgleichungen, von denen die $(n-k)$-te aus allen Gliedern der summarischen Gleichung besteht, die den Faktor ε_k enthalten; $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Beweis. Von dem Satz 16 ausgehend, vefahren wir ebenso wie beim Beweis des Satzes 31.

33] **Satz.** Es sei $n \geqq 3$ und $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ sei ein fest gewählter Index. Dann gelten für die Funktionen $g_{n,j}(t)$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, folgende Analogien der additiven Relationen bei den goniometrischen Funktionen:

$$g_{n,k}(x + y) + \sum_{j=0}^{n-1} g_{n,j}(x) \cdot g_{n,k-j}(y) \tag{28}$$

wo x, y, beliebige reelle Zahlen sind und wo wir im Falle $k - j < 0$ den Index $n + k - j$ anstatt $k - j$ einsetzen.

Beweis. Multiplizieren wir die Gleichnug (13) mit dem Faktor $\exp\left\{-\left(\cos\frac{2\pi}{n}\right)(x+y)\right\}$. Nach kleiner Umformung bekommen wir, mit Hinsicht auf (23), die zu beweisende Relation.

D. Die Übertragung der Relationen aus dem Koordinatensystem von 2n Halbachsen auf dasjenige von n Achsen.

Setzen wir voraus, dass wir eine Ebene α mit $2n$ Halbachsen haben; $n \geqq 2$. Wir wollen nun immer die zwei Halbachsen vereinigen, die in derselber Gerade liegen, d.h. wir wollen zugleich auch die entsprechenden Paare der Koordinaten vereinigen.

34] **Bemerkung.** *Erst nach den analytischen, bzw. metrischen Reduktionen, die dieser Vereinigung entsprechen, erreichen wir die engsten Analogien der goniometrischen Funktionen, während die bisherigen als die Analogien der hyperbolischen Funktionen betrachtet werden müssen: vergleiche z. B.* (10) *mit* (34) *und siehe auch die Bemerkung* 9.

35] **Definition.** Eine Ebene mit dem Koordinatensystem von n Achsen, bezeichnen wir Knappheitshalber „*die Ebene* β".

In der Ebene γ, siehe Def. 18, seien bezeichnet einzelne Wurzeln $\varepsilon_i = \varepsilon_{2n,i}$ der Gleichung $\lambda^{2n} = 1$, gemäss der Vereinbarung 2. Ausserdem seien hier auch die zugehörigen Radiusvektoren $\bar{\varepsilon}_i = \overrightarrow{0\varepsilon_i}$ bezeichnet. Führen wir die Deckung der Ebene β mit γ durch:

Das Koordinatensystem von n Achsen in der Ebene β ist das System der n orientierten Geraden $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$, die aus einem gemeinsamen Anfangspunkt 0 in solcher Richtung führen, dass die Achse $X_i \in \beta$ mit der Gerade $\varepsilon_i\varepsilon_{n+i} \in \gamma$ zusammenfällt; dabei haben X_i, ε_i auch dieselbe Orientierung.

Ein beliebiger Punkt $P \in \beta$ wird durch einen Koordinatensatz $(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$ so bestimmt, dass der durch die Deckung entsprechende Punkt $P \in \gamma$ den Endpunkt des orientierten Vektorpolygons $b_0\bar{\varepsilon}_0 \wedge b_1\bar{\varepsilon}_1 \wedge \ldots \wedge b_{n-1}\bar{\varepsilon}_{n-1}$ bedeutet, das in dem Anfangspunkt 0 beginnt.

Mit dem Symbol r bezeichnen wir (auch hier) den Radius OP.

36] **Bemerkung.** Nach der eben angeführten Definition, ist die positiv orientierte Achse X_{n+i} zugleich auch die negativ orientirete Achse X_i. Aus denselben Gründen gilt: $b_{n+i} = -b_i$; $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

37] **Lemma.** Es sei ein beliebiger Punkt $P \in \alpha$ durch seinen beliebigen Koordinatensatz $(a_0, a_1, \ldots, a_{2n-1})$ gegeben; dann wird derselbe Punkt $P \in \beta$ durch den Koordinatensatz $(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$ bestimmt, wobei gilt:

$$b_i = a_i - a_{n+i}; \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{29}$$

Beweis — ist ersichtlich aus den Definitionen 18 und 35.

38] **Vereinbarung.** In der Ebene β werden wir (wieder) das Koordinaten-$(n+1)$-eck benützen, das einem Punkt $P \in \beta$ angehört. Seine Seiten sind: $r, b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$. Den Radius $r = OP$, bzw. die Seite b_i bezeichnen wir (wieder) als Hypothenuse, bzw. die i-te Kathete.

39] **Satz.** Es sei ein Punkt $P \in \beta$ gegeben, durch seinen beliebigen Koordinatensazt $(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$; dann gilt:

$$r^2 = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} \right) b_i \cdot b_{i+j} \cdot \cos \frac{\pi j}{n} \tag{30}$$

Beweis. Die Formel (16), in der wir hier n anstatt k schrieben, kann man folgenderweise umformen:

$$r^2 = \left\{ 2 \cdot \sum_{i=0}^{2n-1} \sum_{j=1}^{n-1} a_i \cdot a_{i+j} \cdot \cos \frac{2\pi j}{2n} \right\} + \left\{ \sum_{i=0}^{2n-1} (a_i^2 - a_i \cdot a_{i+n}) \right\} \tag{31}$$

Als Folgerung der Vereiningung der $2n$ Halbachsen zu n Achsen, entstehen in dieser Formel folgende Reduktionen:

In dem Ausdruck in den ersten geschweiften Klammern vereinigen sich immer vier Glieder zu einem neuen:

$$2a_ia_{i+j} \cos \frac{\pi}{n} j + 2a_{n+i}a_{n+i+j} \cos \frac{\pi}{n} j + 2a_ia_{n+i+j} \cos \left(\pi + \frac{\pi}{n} j \right) +$$
$$+ 2a_{n+i}a_{i+j} \cos \left(\pi + \frac{\pi}{n} j \right) = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{n} j \right) (a_ia_{i+j} + a_{n+i}a_{n+i+j} - a_ia_{n+i+j} -$$
$$- a_{n+i}a_{i+j}) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{n} j \right) (a_i - a_{n+i}) (a_{i+j} - a_{n+i+j}) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{n} j \right) \cdot b_i b_{i+j} .$$

Ebenso in dem Ausdruck in den zweiten geschweiften Klammern: $a_i^2 - 2a_ia_{i+n} + a_{i+n}^2 = (a_i - a_{i+n})^2 = b_i^2$. (Das Glied a_ia_{i+n} wird hier zweimal enthalten, siehe (17) für $n = 2k$, $j = k$).

Aus dieser Analyse geht hervor, dass die Gl. (31) nach den angeführten Reduktionen lautet:

$$r^2 = 2 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} b_ib_{i+j} \cos \frac{\pi}{n} j + \sum_{i=0}^{n-1} b_i^2$$

Diese Gleichung wird aber leicht in die Gl. (30) umgeformt.

40] **Definition.** Es gelte: $n \geqq 2$; $i = 0, 1, 2, \ldots$. Die Funktion $F_{n,i}(t)$ wird folgendermassen definiert:

$$F_{n,i}(t) = f_{2n,i}(t) - f_{2n,i+n}(t) \tag{32}$$

wo die Funktionen $f_{2n,s}(t)$ nach (9) definiert werden.

41] **Satz.** Für $F_{n,i}(t)$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$; $n \geqq 2$, gilt:

$$F_{n,i}(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_{2k+1}^i \cdot e^{\varepsilon_{2k+1} \cdot t}; \qquad \varepsilon_j = \varepsilon_{2n,j} \tag{33}$$

Beweis. Nach (9) gilt: $f_{2n,i}(t) - f_{2n,i+n}(t) = \frac{1}{2n} \cdot \sum_{k=0}^{2n-1} (\varepsilon_k^i - \varepsilon_k^{i+n}) \cdot e^{\varepsilon_k \cdot t}$; $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Dabei betrachten wir zwei Fälle:

1) $k = 2s$, $s = 0, 1, 2, \ldots$. Dann gilt: $\varepsilon_{2s}^i - \varepsilon_{2s}^{i+n} = \varepsilon_{2s}^i (1 - \varepsilon_{2s}^n) = \varepsilon_{2s}^i [1 - (\varepsilon_s)^{2n}] = \varepsilon_{2s}^i (1 - 1) = 0$.

2) $k = 2s + 1$, $s = 0, 1, 2, \ldots$ Dann gilt: $\varepsilon_k^i - \varepsilon_k^{i+n} = \varepsilon_k^i(1 - \varepsilon_k^n)$, wo $\varepsilon_k^n =$

$= \varepsilon_1^{n(2s+1)} = \varepsilon_1^{2ns} \cdot \varepsilon_1^n = \varepsilon_s^{2n} \cdot \varepsilon_1^n = 1 \cdot \varepsilon_n = -1$, so dass gilt: $\varepsilon_k^i - \varepsilon_k^{i+n} = \varepsilon_k^i[1 - (-1)] = 2\varepsilon_k^i$. Es gilt also summarisch:

$$\frac{1}{2n} \cdot \sum_{k=0}^{2n-1} (\varepsilon_k^i - \varepsilon_k^{i+n}) \cdot e^{\varepsilon_k \cdot t} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_{2k+1}^i \cdot e^{\varepsilon_{2k+1} \cdot t}; \qquad \varepsilon_j = \varepsilon_{2n,j}$$

42] **Satz.** Die Funktionen $F_{n,i}(t)$; $i = 0, 1, \ldots, n-1$; $n \geqq 2$, kann man in der Form folgender Potenzreihen ausdrücken, die ersichtlich überall konvergieren:

$$F_{n,0}(t) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \cdot \frac{t^{ns}}{(ns)!}$$

(34)

$$F_{n,j}(t) = \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \cdot \frac{t^{ns-j}}{(ns-j)!}; \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1$$

Beweis. Nach (33) gilt: $F_{n,j}(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_{2k+1}^j \cdot e^{\varepsilon_{2k+1} \cdot t} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_{2k+1}^j \frac{(\varepsilon_{2k+1} \cdot t)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_{2k+1}^{i+j} \cdot \frac{1}{n}$. Dabei gilt: $\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_{2k+1}^r = \varepsilon_1^r + \varepsilon_3^r + \ldots + \varepsilon_{2n-1}^r = (\varepsilon_0^r + \varepsilon_1^r + \varepsilon_2^r + \ldots + \varepsilon_{2n-1}^r) - (\varepsilon_0^r + \varepsilon_2^r + \varepsilon_4^r + \ldots + \varepsilon_{2(n-1)}^r) = s_{2n,r} - (\varepsilon_0^{2r} + \varepsilon_1^{2r} + \ldots + \varepsilon_{n-1}^{2r}) = s_{2n,r} - s_{n,2r}$, siehe das Lemma 5. Also gilt: $F_{n,j}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \cdot \frac{1}{n} (s_{2n,i+j} - s_{n,2(i+j)})$. Hier aber gilt nach 5.:

$$\frac{1}{n}(s_{2n,r} - s_{n,2r}) = \begin{cases} = \frac{1}{n}(2n - n) = 1 \text{ für } r = n \cdot 2p; & p = 0, 1, 2, \ldots \\ = \frac{1}{n}(0 - n) = -1 \text{ für } r = n(2p+1); & p = 0, 1, 2, \ldots \\ = 0 \text{ für die übrigen natürlichen Zahlen } r. \end{cases}$$

Summarisch: Die von der Null verschiedenen Koeffizienten, d. h. $+1$, -1, erscheinen nur für $r = i + j = n \cdot s$, $(s = 0, 1, 2, \ldots) \Rightarrow i = ns - j$; dabei entspricht einem ungeraden (geraden) s das Zeichen minus (plus). (Hier gilt $i \geqq 0$, wie aus der Gl. $i = ns - j$ ersichtlich ist, so dass die untere Grenze für s erst von der Einser an genommen wird, wenn $j > 0$ ist. Dabei gilt nach (32) und (4): $F_{n,0}(0) = 1$, so dass für $j = 0$ eine selbständige Formel eingeführt werden muss).

43] **Lemma.** Für $j = 0, 1, \ldots, n-1$; $n \geqq 2$, gilt:

(35)
$$F_{n,n+j}(t) = -F_{n,j}(t).$$

Beweis. Nach (32) gilt: $F_{n,n+j}(t) = f_{2n,n+j}(t) - f_{2n,2n+j}(t)$, wobei nach (9) gilt: $f_{2n,2n+j}(t) = \frac{1}{2n} \cdot \sum_{s=0}^{2n-1} \varepsilon_s^{2n+j} \cdot e^{\varepsilon_s \cdot t} = \frac{1}{2n} \sum_{s=0}^{2n-1} \varepsilon_s^{2n} \cdot \varepsilon_s^j e^{\varepsilon_s \cdot t} = \frac{1}{2n} \sum_{s=0}^{2n-1} \varepsilon_s^j \cdot e^{\varepsilon_s \cdot t} = f_{2n,j}(t)$, so dass gilt: $F_{n,n+j}(t) = f_{2n,n+j}(t) - f_{2n,j}(t) = -F_{n,j}(t)$.

44] **Satz.** Zwischen den Funktionen $F_{n,i}(t)$; $i = 0, 1, \ldots, n-1$; $n \geqq 2$, gilt folgende Relation:

(36)
$$e^{2\left(\cos\frac{\pi}{n}\right) \cdot t} = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1}\right) F_{n,i}(t) \cdot F_{n,i+j}(t) \cdot \cos\frac{\pi}{n} j$$

wo immer $F_{n,n+s}(t) = -F_{n,s}(t)$; $s = 0, 1, \ldots, n-1$.

Beweis. In der Relation (22), in der wir n anstatt k schreiben, kann man, nach (32) und (35), immer vier Glieder zu einem einzigen vereinigen. Vor allem formen wir die G (22) folgenderweise um:

$$e^{2\left(\cos\frac{\pi}{n}\right).t} = \left\{2\sum_{i=0}^{2n-1}\sum_{j=0}^{n-1} f_i \cdot f_{i+j} \cdot \cos\frac{\pi}{n}j\right\} + \left\{\sum_{i=0}^{2n-1}(f_i^2 - f_i \cdot f_{n+i})\right\} \tag{37}$$

wo $f_i = f_{2n,i}(t)$, usw. Das weitere Verfahren ist ganz analogisch mit der Umformung der Gleichung (31), d. h. wir erreichen folgende Umformung der Gl. (37):

$$e^{2\left(\cos\frac{\pi}{n}\right).t} = 2\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} F_{n,i}(t) \,.\, F_{n,i+j}(t) \,.\, \cos\frac{\pi}{n}j + \sum_{i=0}^{n-1} F^2_{n,i}(t)$$

Diese Gleichung wird aber leicht in die Gl. (36) umgeformt.

45] **Definition.** Mit dem Symbol $G_{n,i}(t)$; $i = 0, 1, \ldots, n-1$; $n \geqq 2$, wird folgende Funktion bezeichnet:

$$G_{n,i}(t) = F_{n,i}(t) \,.\, e^{-\left(\cos\frac{\pi}{n}\right).t} \tag{38}$$

wo die Funktionen $F_{n,i}(t)$ nach (33) festgesetzt werden.

46] Satz. Zwischen den Funktionen $G_{n,i}(t)$; $i = 0, 1, \ldots, n-1$; $n \geqq 2$, gilt folgende Relation:

$$1 = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1}\right) G_{n,i}(t) \,.\, G_{n,i+j}(t) \,.\, \cos\frac{\pi}{n}j \tag{39}$$

wo gilt: $G_{n,n+s}(t) = -G_{n,s}(t)$, $\quad s = 0, 1, \ldots, n-1$.

Beweis. Wenn wir die Gl. (36) mit dem Faktor $\exp\left\{-2\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)t\right\}$ multiplizieren, erhalten wir, nach kurzer Umformung mit Hinsicht auf (38), sofort die Relation (39).

47] **Definition.** Es sei ein Punkt $P \in \mathfrak{p}$ durch seinen beliebigen Koordinatensatz $(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$ gegeben; $n \geqq 2$, $OP = r \neq 0$.

Wir definieren in dem zugehörigen Koordinaten-$(n+1)$-eck folgende metrische Funktionen:

$$\Phi_{n,i} = \frac{b_i}{r}; \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{40}$$

Mit Worten: Die metrische Funktion $\Phi_{n,i}$ ist das Verhältnis der i-ten Kathete zur Hypothenuse, in einem beliebigen Koordinaten-$(n+1)$-eck eines beliebegen Punktes $P \in \mathfrak{p}$, $P \neq 0$; $n \geqq 2$.

48] **Satz.** Zwischen den metrischen Funktionen $\Phi_{n,i}$, die einem Punkt $P \in \mathfrak{p}$ im Sinn der Def. 47 gehören, gilt folgende Relation:

$$1 = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1}\right) \Phi_{n,i} \,.\, \Phi_{n,i+j} \,.\, \cos\frac{\pi}{n}j \tag{41}$$

wo gilt: $\Phi_{n,n+s} = -\Phi_{n,s}$, $s = 0, 1, \ldots, n-1$.

Beweis. Dividieren wir die Gl. (30) durch r^2; dann bekommen wir, nach kleiner Umformung mit Hinsicht auf (40), sofort die zu beweisende Relation.

Beachten wir nun die Übereinstimmung der Form der Gleichungen (39) und (41). Auf Grund dieser Übereinstimmung finden wir einen reellen Zusammenhang zwischen den Werten der analytischen Funktion $\mathbf{G}_{n,i}(t)$ und den Werten der entsprechenden metrischen Funktion $\Phi_{n,i}$; man kann es folgenderweise ausdrücken:

49] **Korolar.** *Es sei $n \geqq 2$. Einem reellen Radius $r > 0$ und einem reellen Argument t, kann man gerade einen Punkt $P \in \mathfrak{\beta}$, $OP = r$, zuordnen, u. z. mit jenem Koordinatensatz dieses Punktes, für den es gilt:*

$$b_i = r \,.\, \Phi_{n,i} = r \,.\, G_{n,i}(t); \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{42}$$

50] **Vereinbarung.** Für die Grössen aus dem Korolar 49. führen wir die Bezeichnung $P(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$, bzw. $P(r, t)$ ein, und benennen wir sie „*der metrische* —" bzw. „*der polare Koordinatensatz des Punktes $P \in \mathfrak{\beta}$.*"

51] **Satz.** Es gilt die Identität für $n \geqq 3$, $t \in (-\infty, \infty)$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\cos \frac{\pi k}{n}\right) . \, G_{n,k}(t) = \cos \left[\left(\sin \frac{\pi}{n}\right) . \, t\right] \tag{43}$$

Beweis. Multiplizieren wir die Funktion $F_{n,k}(t)$ mit der Einheitswurzel a) $\varepsilon_{2n,k}$, b) $\varepsilon_{2n,2n-k}$ und führen wir dann die Summation für $k = 0, 1, \ldots, n-1$ durch. Mit Hinsicht auf die Gleichungen: 1) $(-1) \,.\, \varepsilon_{2n,k} = \varepsilon_{2n,n+k}$, 2) $\varepsilon_{2n,k} = \varepsilon_{2n,k+2ns} = (\varepsilon_{2n,1})^{k+2ns}$, $s = 0, 1, 2, \ldots$, bekommen wir nach (34):

ad a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(t \,.\, \varepsilon_{2n,1})^k}{k!} = e^{t \,.\, \varepsilon_{2n,1}}$, ad b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(t \,.\, \varepsilon_{2n,2n-1})^k}{k!} = e^{t \,.\, \varepsilon_{2n,2n-1}}$. Durch Summation dieser zwei Gleichungen bekommen wir: $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (\varepsilon_{2n,k} + \varepsilon_{2n,2n-k}) \,.\, F_{n,k}(t) = e^{t \,.\, \varepsilon_{2n,1}} + e^{t \,.\, \varepsilon_{2n,2n-1}}$, und weiter, nach (2): $\sum\limits_{k=0}^{n-1} 2 \,.\left(\cos \dfrac{\pi k}{n}\right) . \, F_{n,k}(t) = e^{t \,.\, \cos \frac{\pi}{n}} \,.\, 2 \,.\, \cos \left(t \,.\, \sin \dfrac{\pi}{n}\right)$ Multiplizieren wir diese Gleichung mit $\dfrac{1}{2} \,.\, e^{-t \,.\, \cos \frac{\pi}{n}}$, so bekommen wir nach (38) sofort die zu beweisende Gleichung.

52] **Lemma.** Die Gleichung $\vec{r} = \sum\limits_{i=1}^{m} \vec{a}_i$ bedeute eine willkürliche Zerlegung eines Vektors $\vec{r}$ in m Komponenten, $m \geqq 2$. Es sei $\vec{s}$ eine willkürliche Richtung. Dann gilt:
Der Absolutwert der Summe der lotrechten Projektionen der Komponenten $\vec{a}_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, in die Richtung $\vec{s}$, ist minder oder höchstens gleich dem Absolutwert $|\vec{r}|$.
Die Gültigkeit des Lemmas ist elementar bekannt.

53] **Folgerung.** Für einen beliebigen Koordinaten $(n+1)$-eck aus der Ebene β, $n \geqq 3$, wenn wir die lotrechte Projektion seiner Katheten b_i in die Achse X_0

voraussetzen, gilt die Ungleichung: $-r \leqq \sum_{k=0}^{n-1} b_k \cdot \cos \frac{\pi k}{n} \leqq r$, wo r die Hypothenuse ist; d. h. es gilt auch

$$(44) \qquad -1 \leqq \frac{1}{r} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} b_k \cdot \cos \frac{\pi k}{n} \leqq 1$$

54] **Vereinbarung.** Wenn ein Argument einer Funktion (38) aus dem Intervall $\left[0, \pi \left(\sin \frac{\pi}{n}\right)^{-1}\right]$ ist, dann und nur dann bezeichnen wir es mit einem Streifen; also z. B. $\bar{t}$ anstatt t.

55] **Korolar.** *Es sei $n \geqq 3$. Jedem metrischen Koordinatensatz $P(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$, der einem bestimmten Punkt $P \in \beta$ gehört, können wir gerade einen polaren Koordinatensatz $P(r, \bar{t})$ zuordnen, und umgekehrt.*

Beweis. Den Radius r ordnen wir nach (30) zu. Dann gilt es nach (43) und (42): $\bar{t} = \left(\sin \frac{\pi}{n}\right)^{-1} \cdot \arccos \left[\sum_{k=1}^{n-1} \left(\cos \frac{\pi k}{n}\right) \cdot G_{n,k}(t)\right] = \left(\sin \frac{\pi}{n}\right)^{-1} \cdot \arccos \left[\frac{1}{r} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \cdot \right.$ $\left. \cdot \left(\cos \frac{\pi k}{n}\right) \cdot b_k\right]$, wobei für den Ausdruck in den eckigen Klammern die Ungleichheit (44) gilt. Das rückwertige Verfahren führen wir nach dem Korolar 49. durch.

56] **Satz.** Es sei $n \geq 3$ und $k \in \{0, 1, \ldots, n-1)$ sei ein fest gewählter Index. Dann gelten für die Funktionen $G_{n,k}(x)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, folgende Analogien der additiven Relationen bei den goniometrischen Funktionen:

$$(45) \qquad G_{n,k}(x + y) = \sum_{j=0}^{n-1} G_{n,j}(x) \cdot G_{n,k-j}(y)$$

wo x, y, beliebige reellen Zahlen sind und wo wir im Falle, dass $k - j < 0$ ist, den Index $n + k - j$ anstatt $k - j$, zugleich mit dem negativen Vorzechen für das zugehörige Glied einsetzen.

Beweis. Nach (13) gilt a) $f_{2n,k}(x + y) = \sum_{j=0}^{2n-1} f_{2n,j}(x) \cdot f_{2n,k-j}(y)$, b) $f_{2n,k+n}(x + {}$ ${}+ y) = \sum_{j=0}^{2n-1} f_{2n,j}(x) \cdot f_{2n,k+n-j}(y)$. Bilden wir nun die Differenz b) — a), so gilt es nach (32) und (35): $F_{n,k}(x + y) = \sum_{j=0}^{2n-1} f_{2n,j}(x) \cdot F_{n,k-j}(y) = \sum_{j=0}^{n-1} [f_{2n,j}(x) \cdot F_{n,k-j}(y) + {}$ ${}+ f_{2n,j+n}(x) \cdot F_{n,k-j-n}(y)] = \sum_{j=0}^{n-1} [f_{2n,j}(x) - f_{2n,j+n}(x)] \cdot F_{n,k-j}(y) = \sum_{j=0}^{n-1} F_{n,j}(x) \cdot$ $\cdot F_{n,k-j}(y)$. Wenn wir nun diese Gleichung mit dem Faktor $\exp\left\{-\left(\cos \frac{\pi}{n}\right) \cdot (x + {}\right.$ $\left. {}+ y)\right\}$ multiplizieren, so bekommen wir, nach kleiner Umformung mit Hinsicht auf (38), die zu beweisende Gleichung. Die Regel für das Vorzeichen ist direkte Folgerung von (35).

57] **Satz.** Es sei $n \geqq 3$ und r, x, seien reelle Zahlen. Dann gilt folgende Analogie des *Moivre*-schen Satzes:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_{2n,k} \cdot G_{n,k}(rx) = \left[\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_{2n,k} \cdot G_{n,k}(x)\right]^r \tag{46}$$

Beweis. Benützen wir die Gleichung ad a), aus dem Beweis des Satzes 51:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_{2n,k} \cdot F_{n,k}(t) = e^{\varepsilon_{2n,1} \cdot t} \tag{47}$$

Potenzieren wir diese Gleichung zum r-ten Grad und legen wir x anstatt t:

$$\left[\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_{2n,k} \cdot F_{n,k}(x)\right]^r = [e^{\varepsilon_{2n,1} \cdot x}]^r \tag{48}$$

Durch die Subst. $t = rx$ bekommen wir aus (47):

$$\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_{2n,k} \cdot F_{n,k}(rx) = e^{\varepsilon_{2n,1} \cdot rx} \tag{49}$$

Da die rechten Seiten von (48), (49) übereinstimmen, wird hiemit die Gleichung, die aus den zugehörigen linken Seiten besteht, erwiesen. Multiplizeiren wir nun diese Gl. mit $\exp\left\{-\left(\cos\frac{\pi}{n}\right) \cdot rx\right\}$, so bekommen wir, mit Hinsicht auf (38), den zu beweisenden Satz.

58] **Satz.** Wenn r in der Gleichung (46) eine natürliche Zahl ist, dann zerfällt diese Gleichung in n Teilgleichungen, von denen die k-te Gleichung aus allen Gliedern der summarischen Gl. besteht, die den Faktor $\varepsilon_{2n,k}$ enthalten; $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Beweis. Setzen wir in die Gl. (45) $y = (r-1) \cdot x$ ein und multiplizieren wir zugleich diese Gl. mit der Wurzel $\varepsilon_{2n,k}$. Dann, durch die Summation solcher Gleichungen, von $k = 0$ bis $n - 1$, bekommen wir:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_{2n,k} \cdot F_{n,k}(rx) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_{2n,k} \cdot F_{n,j}(x) \cdot F_{n,k-j}((r-1) \cdot x)$$

Eine Seite von dieser Gl. und von der Gl., die zwischen den liknen Seiten der Gleichungen (48), (49) existiert, stimmt also überein. Die weiteren Erwägungen sind dann ganz analogisch mit jenen im Beweis des Satzes 16. Der nachfolgende Übertrag, d. h. mit Hinsicht auf (38), wurde schon oben gezeigt.

59] **Die Funktionskurven** $y = G_{n,i}(x)$, $i = 0,1, \ldots, n-1$, $n \geqq 2$.

Diese Kurven wurden gründlich in den Rechenmaschinenlaboratorien der *FS-VUT* in Brno untersucht: diese Arbeit vollzog *Ing. Ivan Direr*. Diese Rechnungen bestätigen die engsten analogischen Eigenshaften mit den Kurven $y = \cos x = G_{2,0}(x)$, $y = -\sin x = G_{2,1}(x)$:

Wenn der Absolutwert des Argumentes x wächst, nähert sich der Verlauf dieser Funktionen folgenden Kurven:

$$y = H_{n,i}(x) = A_n \cdot \sin(B_n \cdot x + C_{n,i}), \tag{50}$$

wo A_n, B_n, bzw. $C_{n,i}$ für einen festen Index n, bzw. feseten Indexenpaar (n, i), bestimmte Konstanten sind.

Die Näherung der Kurve $G_{n,i}(x)$ zur $H_{n,i}(x)$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, verläuft sehr progressiv. Die Kurve $y = H_{n,i}(x)$ verzögert sich gegenüber der $y = H_{n,i+1}(x)$. Die Phasenverzögerung macht $\frac{1}{2n}$ der Wellenlänge aus.

60] **Die Angaben über die Funktionskurven $G_{n,j}(x)$ für $n = 3, 4, \ldots, 7$.** *Zusammengestellt mittels* (34), (38). Die Periode, d. h. die Wellenlänge, und die Amplitüde dieser Kurven, bei $x \in (10, 30)$:

n	*Periode*		*Amplitüde*	
3	7,254	$\doteq 2\pi \,.\, \operatorname{cosec} \frac{\pi}{n}$	0,667	$\equiv \frac{2}{n}$ (Vermutung von Ing. Dírer)
4	8,464		0,501	
5	10,688		0,401	
6	12,851		0,333	
7	14,374		0,286	

E. Die Transformationen der Koordinaten eines allgemeinen Punktes einer Ebene mit Bezug auf ihre beiden Koordinatensysteme.

61] **Verabredung.** Man vähle in der Ebene den Punkt 0 als den (gemeinsamen) Anfangspunkt. Man führe durch denselben

a) zwei gegeneinander senkrechte Achsen eines Cartesischen Systems; man bezeichne sie als Y, Z; ihre Orientierung wählt man so, dass die Halbachse $+Y$ durch die Drehung um $\frac{\pi}{2}$ um den Anfangspunkt im positiven Sinn in die Lage $+Z$ übergehe.

b) die Achsen $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ des Koordinatensystems β_n für $n > 2$, nach der Definition 35.

Dabei mögen die Achsen X_0, Y den Winkel α einschliessen, den wir im positiven Sinn von $+Y$ zu $+X_0$ messen.

62] **Lemma.** Es sei $a + bi = \cos 2n\alpha + i \,.\, \sin 2n\alpha$ eine komplexe Zahl, wo $n \geq 2$ eine natürliche Zahl und α ein beliebig gewählter Winkel ist. Dann gilt die Gleichung:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \cos\left(2\alpha + \frac{2\pi}{n} j\right) = \sum_{j=0}^{n-1} \sin\left(2\alpha + \frac{2\pi}{n} j\right) = 0 \tag{53}$$

Beweis. Es gilt für die Wurzeln $\varepsilon_{n,j}$; $j = 0, 1, \ldots, n-1$, der binomischen Gleichung $\lambda^n = a + bi$: $\sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_{n,j} = 0$, siehe die symmetrischen Funktionen der Wurzeln, so dass sowohl die reellen als auch die imaginären Komponenten dieser Wurzeln ebenso die Summe Null ergeben.

63] **Lemma.** Für den Index $n \geq 2$ und für den beliebigen Winkel α gilt die Gleichung:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi j}{n}\right) = \sum_{j=0}^{n-1} \sin^2\left(\alpha + \frac{\pi j}{n}\right) = \frac{n}{2} \tag{54}$$

Beweis. Es gilt nach der bekannten Formel: $\sum_{j=0}^{n-1} \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi j}{n}\right) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2}\left[1 + \right.$ $\left. + \cos\left(2\alpha + \frac{2\pi}{n} j\right)\right] = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \cos\left(2\alpha + \frac{2\pi}{n} j\right) = \frac{n}{2}$, siehe (53). Analog beweist man den übrigbleibenden Teil des Lemmas.

64] **Lemma.** Für den Index $n \geq 2$ und für beliebige Winkel α, β, gelten die Gleichungen:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{n} j\right) . \cos\left(\alpha + \beta + \frac{\pi}{n} j\right) = \frac{n}{2} . \cos \beta \tag{55}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{n} j\right) . \sin\left(\alpha + \beta + \frac{\pi}{n} j\right) = \frac{n}{2} . \sin \beta \tag{56}$$

Beweis ad (55). $\sum_{j=0}^{n-1} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{n} j\right) . \cos\left(\alpha + \beta + \frac{\pi}{n} j\right) = \sum_{j=0}^{n-1} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{n} j\right) \cdot$ $\cdot \left[\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{n} j\right) . \cos \beta - \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{n} j\right) . \sin \beta\right] = \cos \beta . \sum_{j=0}^{n-1} \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{n} j\right) -$ $- \frac{1}{2} . \sin \beta . \sum_{j=0}^{n-1} \sin\left(2\alpha + \frac{2\pi}{n} j\right) = \frac{n}{2} . \cos \beta$, siehe (54) und (53). Analog beweist man die Gleichung (56).

65] **Verabredung.** Wir bezeichnen die Koordinaten eines allgemeinen Punktes P in Bezug auf das Koordinatensystem $\mathfrak{P}_2$, bzw. $\mathfrak{P}_n$ $(n > 2)$, $P(y, z)$, bzw. $P(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$.

66] **Satz.** Es mögen die Verabredungen 61. und 65. gelten. Zur Festsetzung des Satzes $P(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ durch den gegebenen (bekannten) Satz $P(y, z)$ benützt man das folgende Gleichungssystem mit einer symmetrischen Systemsdeterminante:

$$\begin{array}{l} a_0 . x_0 + a_1 . x_1 + a_2 . x_2 + \ldots + a_{n-1} . x_{n-1} = b_0 . y + c_0 . z \\ a_1 . x_0 + a_0 . x_1 + a_1 . x_2 + \ldots + a_{n-2} . x_{n-1} = b_1 . y + c_1 . z \\ a_2 . x_0 + a_1 . x_1 + a_0 . x_2 + \ldots + a_{n-3} . x_{n-1} = b_2 . y + c_2 . z \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1} x_0 + a_{n-2} x_1 + a_{n-3} x_2 + \ldots + a_0 . x_{n-1} = b_{n-1} . y + c_{n-1} . z, \end{array} \tag{57}$$

wo $a_k = \cos\left(\frac{\pi}{n} k\right)$, $b_k = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{n} k\right)$, $c_k = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{n} k\right)$.

Beweis. Die k-te Gleichung dieses Systems, $(k = 0, 1, \ldots, n - 1)$, drückt (mit Rücksicht auf die Achsenorientierung nach der Def. 35.) die Gleichheit zwischen den ortogonalen Projektionen beider Polygonalen des Punktes P, d. h. $(\bar{x}_0 \wedge \bar{x}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{x}_{n-1})$, $(\bar{y} \wedge \bar{z})$, auf die Achse X_k aus.

67] **Lemma.** *Die Determinante des Systems (57) ist gleich Null.*

Beweis. Nach der Def. 35. hat der Anfangspunkt 0 ersichtlich auch Nicht-Null Koordinatensätze in Bezug auf das β_n-System; er hat dabei aber bloss einen Null-Koordinatensatz in Bezug auf das System β_2, d. h. $y = z = 0$. Projizieren wir also die dem Nicht-Nullsatz des Anfanges 0 zugehörige Polygonale, so wird das Gleichungssystem (57) ein homogenes und es wird eine Nicht-Null-Lösung haben. Nach einem bekannten Satz muss also seine Systemsdeterminante gleich Null sein. Nach der Def. 35 ist aber diese Determinante immer dieselbe für einen jeden Punkt $P \in \beta_n$.

68] **Satz.** Das Gleichungssystem (57) hat (im Einklang mit dem Lemma 67) unendlich viele Lösungen folgender Form:

$$(58)\quad x_j = \frac{2}{n} \cdot \left[y \,.\, \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{n} j\right) + z \,.\, \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{n} j\right)\right]; \qquad j = 0, 1, \ldots, n-1$$

Jeder Grösse des Winkels α entspricht also gerade ein Satz $P(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$.

Beweis. Mit Rücksicht darauf, dass der Cosinus eine gerade Funktion ist, kann man die k-te Gleichung des Systems (57), $k = 0, 1, \ldots, n-1$, so scheriben:

$$(59)\quad \sum_{j=0}^{n-1} x_j \,.\, \cos\left(-\frac{\pi k}{n} + \frac{\pi}{n} j\right) = y \,.\, \cos\left(\alpha + \frac{\pi k}{n}\right) + z \,.\, \sin\left(\alpha + \frac{\pi k}{n}\right)$$

Durch das Einsetzen der vorausgesetzten Lösung (58) in die linke Seite dieser Gleichung bekommt man: $\sum_{j=0}^{n-1} \frac{2}{n} \left[y \,.\, \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{n} j\right) + z \,.\, \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{n} j\right)\right] .$ $. \cos\left(-\frac{\pi}{n} k + \frac{\pi}{n} j\right) = \frac{2}{n} \,.\, y \,.\, \sum_{j=0}^{n-1} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{n} j\right) . \cos\left(-\frac{\pi}{n} k + \frac{\pi}{n} j\right) + \frac{2}{n} \,.\, z \,.$ $. \sum_{j=0}^{n-1} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{n} j\right) . \cos\left(-\frac{\pi}{n} k + \frac{\pi}{n} j\right) = |\text{ siehe } 64\ | = y \,.\, \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{n} k\right) + z \,.$ $. \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{n} k\right)$; dies ist aber identisch gleich der rechten Seite von (59).

69] **Satz.** Für die Bestimmung des Satzes $P(y, z)$ mittels des gegebenen (bekannten) Satzes $P(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ benützen wir die Formel:

$$(60)\qquad \text{a)}\ y = \sum_{j=0}^{n-1} x_j \,.\, \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{n} j\right), \qquad \text{b)}\ z = \sum_{j=0}^{n-1} x_j \,.\, \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{n} j\right)$$

Beweis. Nach der Verabredung 61 stellt die erste, bzw. die zweite dieser Gleichungen ersichtlich die senkrechte Projektion der Polygonale $(\bar{x}_0 \wedge \bar{x}_1 \wedge \ldots$ $\ldots \wedge \bar{x}_{n-1})$ in die Y- bzw. Z-Achse dar.

70] **Bemerkung.** Aus den Gleichungen (58) kann man die Gleichungen (60-a, -b) folgendermassen ableiten:

ad a) Man multipliziere die Gl. (58) mit dem Faktor $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{n} j\right)$:

Durch die Summierung solcher Gleichungen vom Index $j = 0$ bis $n-1$ bekommt man mit Rücksicht auf (54) und (53): $\sum_{j=0}^{n-1} x_j \,.\, \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{n} j\right) = \frac{2}{n} \,.\, y \,.\, \sum_{j=0}^{n-1} \cos^2 \left(\alpha + \right.$ $\left. + \frac{\pi}{n} j\right) + \frac{1}{n} \,.\, z \,.\, \sum_{j=0}^{n-1} \sin\left(2\alpha + \frac{2\pi}{n} j\right) = y$, was die Gleichung (60-a) ist.

ad b) Wir multiplizieren die Gl. (58) mit dem Faktor $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{n} j\right)$:

Durch die Summierung solcher Gleichungen vom Index $j = 0$ bis $n - 1$ bekommen wir analog (60-b).

71] **Bemerkung.** Den Zusammenhang gegenseitig reziproker Transformationen (58) und (60) kann man folgendermassen veranschaulichen:

$$\text{(61)} \qquad \begin{array}{c|cccc} & x_0 & x_1 & \dots & x_{n-1} \\ \hline y & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ z & b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} \end{array} \quad \Big\downarrow \frac{2}{n}$$

wo $a_j = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{n} j\right)$, $b_j = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{n} j\right)$.

Es gilt dabei: Stellt man (nach dem Schema) die Gleichung in der vertikalen Richtung zusammen, so multipliziert man ihre rechte Seite mit dem Koeffizienten $\frac{2}{n}$.

72] **Verabredung.** Den Winkel des Radiusvektors $r = OP$ mit der Halbachse $+Y$, im positiven Sinne von $+Y$ gemessen, bezeichnen wir ω.

73] **Satz.** Es sei der Index $n \geqq 2$. Für die metrischen Funktionen $\Phi_{n,j}$, siehe (40), gilt die Beziehung:

$$\text{(62)} \qquad \Phi_{n,j} = \frac{2}{n} \,.\, \cos\left(\omega - \alpha - \frac{\pi}{n} j\right); \qquad j = 0, 1, \dots, n - 1$$

Beweis. Dividieren wir die Gleichung (58) durch die Zahl $r = OP$, $(P \neq O)$; wir bekommen:

$$\frac{x_j}{r} = \frac{2}{n} \cdot \left[\frac{y}{r} \,.\, \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{n} j\right) + \frac{z}{r} \,.\, \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{n} j\right)\right]$$

oder nach 47, 61, 72 und nach der bekannten Formel:

$$\Phi_{n,j} = \frac{2}{n} \cdot \left[\cos\omega \,.\, \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{n} j\right) + \sin\omega \,.\, \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{n} j\right)\right] = \frac{2}{n} \,.\, \cos\left(\omega - \alpha - \right.$$
$$\left. - \frac{\pi}{n} j\right), \text{ w. z. b. w.}$$

74] **Bemerkung.** Durch den Satz 73 wird — mit Rücksicht auf Korolar 49 — analytisch die Vermutung über die genaue Amplitudengrösse der Funktionen $G_{n,j}(t)$, $(j = 0, 1, \dots, n - 1)$, bestätigt, siehe 60.

Wir wissen jedoch aus den nummerischen Untersuchungen, dass es in einem kleinen Intervall um den Punkt $t = 0$ die Ungleichung $1 \geqq |\, G_{n,j}(t) \,| > \frac{2}{n}$ gilt. Wir sollten also diese Erscheinung im Hinblick auf den Satz 73 ausklären:

Nach 35. gehört einem Punkt auf der X_0-Achse auch der Koordinatensatz $P(a, 0, 0, \ldots, 0)$, $a \neq 0$. Die entsprechende Koordinatenpolygonale reduziert sich hier auf die einzige Komponente $\bar{x}_0$. Diese Reduktion betrifft also auch das System (57), so dass der für eine n-gliedrige Polygonale abgeleitete Satz 73. für diesen Fall nicht gilt.

75] **Bemerkung.** Durch den Satz 73. wird weiter die im Absatz 60. angeführte nummerische Feststellung bestätigt, dass die Phasenverspätung der Funktion $G_{n,j}(t)$ gegenüber der Funktion $G_{n,j+1}(t)$ ein $\frac{1}{2n}$ — tel der Wellenlänge beträgt.

76] **Bemerkung.** Die übrigbleibende, aus der nummerischen Untersuchung folgende Vermutung, dass nämlich die Wellenlänge bei den Funktionen $G_{n,j}(t)$ zur Grösse $2\pi \,.\, \operatorname{cosec} \frac{\pi}{n}$ konvergiert, sollte im Zusammenhang mit 51., 54. und 55. untersucht werden.

77] **Folgerung.** Überlegen wir nun die Möglichkeit die analytische Geometrie (weiter AG) ind der Ebene β für den Index $n \geqq 3$ zu entwickeln. Überlegen wir, dass hier eine (1,1)-Korrespondenz zwischen den metrischen und polaren Koordinatensätzen existiert. Dies bedeutet also, dass es hier möglich wäre, zwei Arten der Gleichungen parallel zu entwickeln: die allgemeinen und die parametrischen.

Als eine Illustration dieser Idee führe ich eine Kurve an, die in der Ebene β für $n = 3$ durch folgende parametrischen Gleichungen definiert wird:

$$x_0 = a \,.\, G_{30}(t), \qquad x_1 = b \,.\, G_{31}(t), \qquad x_2 = c \,.\, G_{32}(t), \tag{51}$$

wo a, b, c reelle Konstanten sind.

Setzen wir diese Gleichungen in die Gleichung (39) für $n = 3$ ein, so bekommen wir die entsprechende allgemeine Gleichung:

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{x_1^2}{b^2} + \frac{x_2^2}{c^2} - \frac{x_0 x_1}{a \,.\, b} - \frac{x_0 x_2}{a \,.\, c} - \frac{x_1 x_2}{b \,.\, c} = 1 \tag{52}$$

Es handelt sich wahrscheinlich um eine Analogie einer Ellipse aus der Kartesischen $A.\,G.$

Man kann also voraussetzen, dass die $A.\,G.$ in der Ebene β für $n > 2$ die einfachen Gleichungen für verschiedene Kurven bieten würde, die zu ihren Vorbildern aus der kartesischen $A.\,G.$ analog sind.

Dies gilt insbesondere für jene Kurven, die man als die Analogien der goniometrisch definierbaren Kurven einführen kann.

LITERATUR

[1] Dr. Schwarz Štefan, „*O rovnicích*", Praha, r. 1947.

R. Karpe, VUT, Brno, Gorkého 13
Czechoslovakia