Archivum Mathematicum

J. M. Stojanov; Drumi Dimitrov Bajnov

О методе усреднения для стохастических и нтегро-дифференциальных уравнений

Archivum Mathematicum, Vol. 8 (1972), No. 4, 213--218

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104781`

Terms of use:

© Masaryk University, 1972

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

ARCH. MATH., SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS, 4,
VIII: 213 — 218, 1972

О МЕТОДЕ УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Й. М. Стоянов, Д. Д. Байнов
(Поступило в редакцию 28-ого августа 1972 г.)

Введение. Методу усреднения для интегро-дифференциальных уравнений посвящено большое количество работ. В недавной обзорной статье [2] Ю. А. Митропольский и А. Н. Филатов подводят итоги достигнутых в этом направлении успехов, а в заключение указывают на некоторые важные нерешенные задачи. Там мы читаем: „Важной проблемой является развитие и обоснование схем усреднения для стохастических интегро-дифференциальных уравнений“. Именно этой проблеме посвящена настоящая работа.

В § 1 приводится теорема 1 о существовании и единственности решения стохастического интегро-дифференциального уравнения (сокращенно СИДУ).

В § 2 исходной системе СИДУ, правая часть которой пропорциональна малому параметру ε по специальной схеме, ставится в соответствие другая система, названная усредненной. Там доказывается теорема 2 о близости решений этих двух систем.

§ 1. Пусть на вероятностном пространстве (Ω, F, P) задан n-мерный стандартный винеровский процесс $w(t)$, $t \in [0, T]$. Заданы также n-мерная вектор-функция $a(t, x, y)$, квадратная матрица $\sigma(t, x, y)$ порядка $n \times n$ и m-мерные вектор-функции $\varphi(t, s, x)$, $\psi(t, s, x)$, при чем $t, s \in [0, T]$, $x \in R_n$, $y \in R_m$. Для векторов будем рассматривать обычную евклидову норму, а норму матрицы $\sigma = (\sigma_{ij})$ определим следующим образом $\| \sigma \|^2 = \sum\limits_{i,j=1}^{n} | \sigma_{ij} |^2$.

Пусть выполнены следующие предположения:

I. Функции $a(t, x, y)$, $\varphi(t, s, x)$, $\psi(t, s, x)$ и матрица $\sigma(t, x, y)$ измеримы по совокупности своих переменных и непрерывны соответственно по t и по (t, s).

II. $a(t, x, y)$, $\sigma(t, x, y)$ и $\varphi(t, s, x)$, $\psi(t, s, x)$ удовлетворяют следующим условиям Липшица: для $x', x'' \in R_n$, $y', y'' \in R_m$

$$| a(t, x', y') - a(t, x'', y'') | + \| \sigma(t, x', y') - \sigma(t, x'', y'') \| \leqq$$
$$\leqq K(| x' - x'' | + | y' - y'' |)$$
$$| \varphi(t, s, x') - \varphi(t, s, x'') | + | \psi(t, s, x') - \psi(t, s, x'') | \leqq \mu(t, s) | x' - x'' |$$

III. $| a(t, x, y) | + \| \sigma(t, x, y) \| \leqq K(1 + | x | + | y |)$

$$| \varphi(t, s, x) | + | \psi(t, s, x) \leqq K(1 + | x |).$$

В этих условиях $K = \text{const}$, а $\mu(t, s)$ — положительная функция, для которой существует $\int\limits_0^t \mu(t, s)\,\mathrm{d}s = \mu_0(t)$, для каждого $t \in [0, T]$, причем $\mu_0(t)$ — инетгрируемая на $[0, T]$ функция.

Как следует из результатов [1], условия I—III достаточны для существования стохастических интегралов

$$\int\limits_0^t \sigma(s, x, y)\,\mathrm{d}w(s) \qquad \text{и} \qquad \int\limits_0^t \sigma(s, x, \int\limits_0^t \psi(s, \tau, x)\,\mathrm{d}\tau)\,\mathrm{d}w(s)$$

по винеровскому процессу для любых $x \in R_n$, $y \in R_m$.

Рассмотрим следующее стохастическое интегро-дифференциальное уравнение (СИДУ)

$$(1)\quad x(t) = x_0 + \int\limits_0^t a(s, x(s), \int\limits_0^s \varphi(s, \tau, x(\tau))\,\mathrm{d}\tau)\,\mathrm{d}s + \int\limits_0^t \sigma(s, x(s), \int\limits_0^s \psi(s, \tau, x(\tau))\,\mathrm{d}\tau)\,\mathrm{d}w(s)$$

где x_0 — случайная величина с $\mathscr{E}\{\,|x_0|^2\} < \infty$, $t \in [0, T]$. Вместо (1) мы будем употреблять также его запись в виде стохастического дифференциала

$$(1')\quad \mathrm{d}x(t) = a(t, x(t), \int\limits_0^t \varphi(t, \tau, x(\tau))\,\mathrm{d}\tau)\,\mathrm{d}t + \sigma(t, x(t), \int\limits_0^t \psi(t, \tau, x(\tau))\,\mathrm{d}\tau)\,\mathrm{d}w(t)$$

указывая каждый раз начальное условие, здесь $x(0) = x_0$.

Для системы СИДУ (1) представляют интерес вопросы существования, единственности и свойств решения.

Через F_w^t обозначим σ - алгебру, порожденной винеровским процессом w на интервале времени $[0, t]$.

Теорема 1. При сделенных выше предположениях

а) существует решение $x(t)$, $t \in [0, T]$ являющееся n-мерным случайным процессом, измеримым при каждом t относительно σ - алгебры F_w^t;

б) решение $x(t)$ единственно;

в) $x(t)$ непрерывно с вероятностью 1;

г) $\sup \mathscr{E}\{\,|x(t)|^2\} < \infty$;

д) $x(t)$ является марковским процессом.

Доказательство проводится по методу сжатых отображений. На самом деле, пусть $B_2[0, T]$ — банахово пространство n-мерных непрерывных случайных процессов $\xi(t)$, $t \in [0, T]$, согласованных с σ - алгебрами F_w^t, $\sup\limits_t \mathscr{E}\{|\,\xi(t)|^2\} < \infty$, а метрика задается формулой

$$\rho(\xi_1, \xi_2) = (\sup_{0 \le t \le T} \mathscr{E}\{\,|\,\xi_1(t) - \xi_2(t)\,|^2\})^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда из условий I—III и свойств стохастических интегралов нетрудно получить, что оператор S, определенный по формуле

$$S\xi(t) = x_0 + \int\limits_0^t a(s, \xi(s), \int\limits_0^s \varphi(s, \tau, \xi(\tau)\,\mathrm{d}\tau)\,\mathrm{d}s + \int\limits_0^t \sigma(s, \xi(s), \int\limits_0^s \psi(s, \tau, \xi(\tau))\,\mathrm{d}\tau)\,\mathrm{d}w(s)$$

является непрерывным относительно ч отображением пространства $B_2[0, T]$ в себя, и что некоторая его степень является сжимающим оператором. Следовательно уравнение $Sx(t) = x(t)$ имеет притом единственное решение, что доказывает пункты а)–г), а пункт д) доказывается методами работы [1].

§ 2. Рассмотрим систему СИДУ, правая часть которой пропорциональна малому параметру ε, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, ε_0 — фиксированное число. Поскольку решение этой системы будет зависеть от ε, обозначим его через $x_\varepsilon(t)$, т. е.

$$(2)\quad dx_\varepsilon(t) = \varepsilon a\left(t, x_\varepsilon(t), \int_0^t \varphi(t, \tau, x_\varepsilon(\tau))\, d\tau\right) dt + \varepsilon\sigma\left(t, x_\varepsilon(t), \int_0^t \psi(t, \tau, x_\varepsilon(\tau))\, d\tau\right) dw(\tau)$$

Эта система решается при начальном условии $x_\varepsilon(0) = x_0$ для всех ε. Здесь функции a, φ, ψ и матрица σ определены как в § 1. Нам будет необходимо еще одно условие для функции $\mu(s, \tau)$. Обозначим $\int_0^s \mu^2(s,\tau)\, d\tau = \lambda(s)$. Мы требуем, чтобы функция $\lambda(s)$ расла строго медленнее линейной функции при $s \to \infty$, т. е.

$$(3)\qquad \lambda(s) \leqq c_1 s^{1-\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1.$$

В зависимости от свойств функций $a(t, x, y)$, $\varphi(t, s, x)$, $\psi(t, s, x)$ и матрицы $\sigma(t, x, y)$ мы можем рассмотреть различные схемы усреднения и для каждой из них-вопрос о близости (в определенном смысле) решений исходной и усредненной системы.

Теперь мы изложим одну схему усреднения системы (2).

Пусть существуют векторы $\varphi_1(t, x)$ и $\psi_1(t, x)$ такие, что

$$(4)\qquad \int_0^t \varphi(t, s, x)\, ds = \varphi_1(t, x), \int_0^t \psi(t, s, x)\, ds = \psi_1(t, x)$$

т. е. мы вычислили эти два интеграла по явно входящему переменному s, считая t и x параметрами.

Тогда получаем вспомогательную систему

$$(5)\qquad dy_\varepsilon(t) = \varepsilon a(t, y_\varepsilon(t), \varphi_1(t, y_\varepsilon(t)))\, dt + \varepsilon\sigma(t, y_\varepsilon(t), \psi_1(t, y_\varepsilon(t)))\, dw(t)$$

с тем же начальным условием, что и система (2).

Пусть существуют n-мерный вектор $\bar{a}(y)$ и квадратная матрица $\sigma(y)$ порядка $n \times n$ такие, что

$$(6)\quad \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau a(t, y, \varphi_1(t, y))\, dt = \bar{a}(y), \qquad \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \sigma(t, y, \psi_1(t, y))\, dt = \bar{\sigma}(y)$$

и оба предела выполняются равномерно по y.

Тогда окончательно системе СИДУ (2) сопоставим следующую систему

$$(7)\qquad dz_\varepsilon(t) = \varepsilon\bar{a}(z_\varepsilon(t))\, dt + \varepsilon\bar{\sigma}(z_\varepsilon(t))\, dw(t), z_\varepsilon(0) = x_0.$$

Будет естественным назвать (7) усредненной системой для исходной системы СИДУ (2).

В этой работе мы будем интересоваться близостью случайных процессов $x_\varepsilon(t)$ и $z_\varepsilon(t)$ в среднем квадратическом смысле.

Теорема 2. Для любых чисел $\delta > 0$ и $L > 0$ существует число $\varepsilon_1 = \varepsilon_,(\delta_1 L)$, $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0)$ такое, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ будет выполняться неравенство

$$\sup_t \mathscr{E} \{x_\varepsilon(t) - z_\varepsilon(t)|^2\} < \delta.$$

где sup берется по t на интервале $\left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right]$.

Доказательство. Из (2) и (7) для разности $x_\varepsilon(t) - z_\varepsilon(t)$ получаем

$$x_\varepsilon(t) - z_\varepsilon(t) = \varepsilon I_1(t) + \varepsilon I_2(t),$$

где

$$I_1(t) = \int_0^t \Delta_1(s)\, ds, \qquad I_2(t) = \int_0^t \Delta_2(s)\, dw(s),$$

$$\Delta_1(s) = a(s, x_\varepsilon(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, x_\varepsilon(\tau))\, d\tau) - \bar{a}(z_\varepsilon(s))$$

$$\Delta_2(s) = \sigma(s, x_\varepsilon(s), \int_0^s \psi(s, \tau, x_\varepsilon(\tau))\, d\tau) - \bar{\sigma}(z_\varepsilon(s)).$$

Тогда

$$| x_\varepsilon(t) - z_\varepsilon(t)|^2 \leqq 2\varepsilon^2 | I_1(t)|^2 + 2\varepsilon^2 | I_2(t)|^2.$$

С другой стороны

$$\mathscr{E}\{ | I_1(t)|^2\} \leqq \int_0^t \mathscr{E}\{ | \Delta_1(s)|^2\}\, ds$$

а из свойств стохастических интегралов [1] вытекает

$$\mathscr{E}\{| I_2(t)|^2\} = \int_0^t \mathscr{E}\{| \Delta_1(s)|^2\}\, ds$$

Теперь ясно, что нужно сначала оценить $\mathscr{E}\{|\Delta_1(s)^2\}$ и $\mathscr{E}\{|\Delta_2(s)|^2\}$.

Нам будет удобно представить $\Delta_1(s)$ в виде

$$\Delta_1(s) = \Delta_{11}(s) + \Delta_{12}(s) + \Delta_{13}(s, z_\varepsilon(s)),$$

где

$$\Delta_{11}(s) = a(s, x_\varepsilon(s)_r, \int_0^s \varphi(s, \tau, x_\varepsilon(\tau))\, d\tau) - a(s, z_\varepsilon(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, z_\varepsilon(\tau))\, d\tau)$$

$$\Delta_{12}(s) = a(s, z_\varepsilon(s) \int_0^s \varphi(s, \tau, z_\varepsilon(\tau))\, d\tau) - a(s, z_\varepsilon(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, z_\varepsilon(s))\, d\tau)$$

$$\Delta_{1,}(s, z_\varepsilon(s)) = a(s, z_\varepsilon(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, z_\varepsilon(s))\, d\tau) - \bar{a}(z_\varepsilon(s))$$

Оценим в отдельности каждое из этих слагаемых. Из условия II § 1

$$| \Delta_{11}(s)|^2 \leqq 2K^2\{| x_\varepsilon(s) - z_\varepsilon(s)|^2 + \int_0^s \mu^2(s, \tau) | x_\varepsilon(\tau) - z_\varepsilon(\tau)|^2\, d\tau\}$$

Если обозначить $\mathscr{E}\{|x_\varepsilon(t) - z_\varepsilon(t)|^2\} = \varrho_\varepsilon(t)$, то

$$\mathscr{E}\{\int_0^t |\Delta_{11}|\, ds\} \leqq 2K^2 \int_0^t [\varrho_\varepsilon(s) + s\,\mu^2(s,\tau)\,\varrho_\varepsilon(\tau)\, d\tau]\, ds$$

Из свойств решения $z_\varepsilon(t)$ системы (7) находим

$$\mathscr{E}\{\int_0^t |\Delta_{12}(s)|^2\, ds\} \leqq 2K^2 C_2 \int_0^t (s\,\mu^2(s,\tau)\, d\tau)\, ds,\ c_2 = \text{const}.$$

Теперь оценим слагаемое $\Delta_{13}(s, z_\varepsilon(s))$. Легко видеть, что функция $\Delta_{13}(s, z) = = a(s, z, \int_0^s \varphi(s, \tau, z)\, d\tau) - \bar{a}(z)$ удовлетворяет следующему условию Липшица

(9) $$|\Delta_{13}(s, z') - \Delta_{13}(s, z'')| \leqq K(1 + \int_0^s \mu(s,\tau)\, d\tau)\, |z' - z''|.$$

Покажем, что для любых чисел $\delta_1 > 0$ и $L_1 > 0$ существует число $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_0)$ такое, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ выполняется неравенство

$$\varepsilon^2 \mathscr{E}\{\int_0^t |\Delta_{13}(s, z_\varepsilon(s))|^2\, ds\} < \delta_1$$

$$\text{для всех } t \in \left[0, \frac{L_1}{\varepsilon}\right].$$

Идея доказательства заключается в следующем. Отрезок $\left[0, \frac{L_1}{\varepsilon}\right]$ разбивается на k частей точками $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = \frac{L_1}{\varepsilon}$ и пусть d_k — диаметр этого разбиения. Тогда

$$\varepsilon^2 \mathscr{E}\{\int_0^t |\Delta_{13}(s, z_\varepsilon(s))|^2\, ds\} \leqq 2\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{k-1} \mathscr{E}\{\int_{t_i}^{t_{i+1}} |\Delta_{13}(s, z_\varepsilon(s)) - \Delta_{13}(s, z_\varepsilon(t_i))|^2\, ds\} +$$

$$+ 2\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{k-1} \mathscr{E}\{\int_{t_i}^{t_{i+1}} |\Delta_{13}(s, z_\varepsilon(t_i))|^2\, ds\}$$

Для оценки первого члена справа при $d_k \to 0$ используется условие Липшица (9), а для второго — условия (3) и (6).

Нетрудно заметить, что оценки для $\mathscr{E}\{|I_2(t)|^2\}$ будут точно такими же, как и найденные нами для $\mathscr{E}\{|I_1(t)|^2\}$. Из этого замечания и полученных выше оценок вытекает, что для любых чисел $\delta_2 > 0$ и $L_2 > 0$ найдется число $\varepsilon_3 \in (0, \varepsilon_0)$ такое, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3)$ и $t \in \left[0, \frac{L_2}{\varepsilon}\right]$

$$\varrho_\varepsilon(t) \leqq 12\varepsilon^2 K^2 \int_0^t [\varrho_\varepsilon(s) + \int_0^s \mu^2(s,\tau)\,\varrho_\varepsilon(\tau)\, d\tau]\, ds +$$

$$+ 12\varepsilon^2 K^2 C_2 \int_0^t (\int_0^s \mu^2(s,\tau)\, d\tau)\, ds + 2\delta_2$$

Из условия (3) ясно, что подходящим выбором числа ε_3 второе слагаемое справа можно сделать меньше δ_2. Следовательно

$$\varrho_\varepsilon(t) \leqq 3\delta_2 + 12\varepsilon^2 K^2 \int_0^t [\varrho_\varepsilon(s) + \int_0^s \mu^2(s,\tau)\, \varrho_\varepsilon(\tau)\, \mathrm{d}\tau]\, \mathrm{d}s,$$

Применяя один из вариантов неравенства Гронуолла—Беллмана находим

$$\varrho_\varepsilon(t) \exp \leqq 3_2 \exp \{12\varepsilon^2 K^2 \int_0^t [1 + \int_0^s \mu^2(s,\tau)\, \mathrm{d}\tau]\, \mathrm{d}s$$

а еще раз воспользовавшись условием (3)

$$\varrho_\varepsilon(t) \leqq C_3\delta_2$$

Теперь, если положим $C_3\delta_2 = \delta$, то очевидно, что при любом $\delta > 0$ и $L > 0$ можно выбрать число $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0)$ (в зависимости от δ и L) такое, что для всех

$$\varepsilon \in (0, \varepsilon_1) \text{ и } t \in \left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right], \qquad \varrho_\varepsilon(t) \leqq \delta, \text{ а тогда}$$

$$\sup_{0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-1}} \varrho_\varepsilon(t) \leqq \delta$$

Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гихман И. И., Скороход А. В., *Стохастические дифференциальные уравнения.* „Наукова думка", Киев, 1968.

[2] Митропольский Ю. А., Филатов А. Н., *Усреднение интегро-дифференциальных и интегральных уравнений.* УМЖ, 24 (1972), 30—48.

Йордан Стоянов
Математический институт БАН
ул. 36, бл. 8, София
Болгария

Друми Байнов
Медицинская академия
Оборище 23, София — 4
Болгария