Archivum Mathematicum

Michail M. Konstantinov; Drumi Dimitrov Bajnov

Существование и единственность решения некоторых экстремально-дифференциальных систем сверхнейтрального типа

Archivum Mathematicum, Vol. 8 (1972), No. 4, 207--212

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104780`

ARCH. MATH., SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS, 4,
VIII: 207 — 212, 1972

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ СВЕРХНЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

(М. М. Константинов, Д. Д. Байнов

(Поступило в редакцию 28-ого августа 1972 г.)

Проблемами существования и единственности решения дифференциальных уравнений с наследственностью занимались многие авторы (см. например [1]–[4]).

В настоящей работе доказываются теоремы существования и единственности решения следующей начальной задачи сверхнейтрального типа с итерированным запаздыванием

$$\dot{x}(t) = \min_q \max_p f(p, q, t; x(\tau_0), \dot{x}(t), \dot{x}(\Delta_0)); \qquad t > 0 \tag{1}$$

$$x(t) = \varphi(t), \dot{x}(t) = \dot{\varphi}(t); \qquad t \leqq 0, \tag{2}$$

где запаздывания τ_0 и Δ_0 определяются при помощи рекуррентных зависимостей

$$\tau_K = \tau_K(t; x(\tau_{K+1}), \dot{x}(t), \dot{x}(\Delta_{K+1})),$$
$$\Delta_K = \Delta_K(t; x(\tau_{K+1}), \dot{x}(t), \dot{x}(\Delta_{K+1})),$$
$$K = 0, \dots, m-1 \qquad (m \geqq 1),$$
$$\tau_m = \tau_m(t; \dot{x}(t)), \Delta_m = \Delta_m(t; \dot{x}(t)).$$

Начальная задача (1), (2) обобщает некоторые из задач, возникающих при рассмотрении непрерывных процессов решения в теории игр [5]. Предполагается, что функция f определена: по p и q — на множестве R, по t — на интервале $I_H = [0, H]$, а по остальным аргументам — на некотором множестве $G \subset E^3$ (E — вещественная ось).

Пусть $F = F(t)$ — скалярная, неотрицательная, ограниченная и суммируемая на интервале I_H функция, удовлетворяющая условию $F(0) = |\dot{\varphi}(0)|$, и пусть Y — множество непрерывных функций y: $J_H \xrightarrow{y} E$ ($J_H = (-\infty, H]$), таких, что $|y(t)| \leqq F(t)$ при $t \in I_H$ и $y(t) = \dot{\varphi}(t)$ при $t \in J_0$.

Определим далее следующие множества из E:

$$\omega = \{\xi_1 : |\xi_1| \leqq |\varphi(0)| + \int_0^H F(t)\mathrm{d}t\} \underset{s\varepsilon J_0}{U} \varphi(s),$$

$$\Omega_H = \{\xi_1 : |\xi_1| \leqq F^* = \sup_{t\varepsilon I_H} F(t)\}, \tilde{\Omega} = \underset{s\varepsilon J_0}{U} \dot{\varphi}(s)$$

Предполагаем, что функция

$$\min_q \max_p f(p, q, t; \xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

определена при $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in G = \omega \times \Omega_H \times \tilde{\Omega}_{H-\Delta}$, где $\tilde{\Omega}_H = \Omega_H U \tilde{\Omega}$, а $\Delta > 0$ — некоторое число, которое определим ниже. Пусть кроме того при фиксированных t, ξ минимакс для f достигается при $(p, q) = \tau \in R$.

Всюду дальше принимаем, что выполнены следующие условия:

1.1. В области $R \times Q$, $Q = I_H \times G$, функция f непрерывна по t, удовлетворяет неравенству

$$\max_{\tau \in R} | f(p, q, t; \xi_1, \xi_2, \xi_3) | \leqq F(t)$$

и условиям Липшица

$$\max_{\tau \in R} | f(p, q, t; \xi_1, \xi_2, \xi_3) - f(p, q, t; \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3) | \leqq$$
$$\leqq \sum_{i=1}^{3} L_i | \xi_i - \bar{\xi}_i |$$

1.2. В области $R \times Q$ функции τ_K и Δ_K удовлетворяют условиям Липшица

$$| \alpha_K(t; \xi_1, \xi_2, \xi_3) - \alpha_K(t; \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3) | \leqq \sum_{i=1}^{3} M_i | \xi_i - \bar{\xi}_i |,$$
$$K = 0, \dots, m - 1;$$
$$| \alpha_m(t; \xi_2) - \alpha_m(t; \bar{\xi}_2) | \leqq M_2 | \xi_2 - \bar{\xi}_2 |$$

и ограничениям

$$\min_{0 \leqq K \leqq m} \{t - \tau_K\} \geqq 0; \quad \min_{0 \leqq K \leqq m} \{t - \Delta_K\} \geqq \Delta > 0,$$

где через α_K обозначена какаянибудь из функций τ_K, Δ_K.

1.3. На интервале J_0 функции φ и $\dot{\varphi}$ удовлетворяют условиям Липшица

$$| \varphi(t) - \varphi(\bar{t})| \leqq B | t - \bar{t} |, | \dot{\varphi}(t) - \dot{\varphi}(\bar{t}) | \leqq \beta | t - \bar{t} |.$$

1.4. Выполнено условие согласования

$$\dot{\varphi}(0) = \min_q \max_p f(p, q, 0; \varphi(\tau_0^0), \dot{\varphi}(0), \varphi(\Delta_0^0)),$$

где

$$\alpha_K^0 = \alpha_K(0; \varphi(\tau_{K+1}^0), \dot{\varphi}(0), \dot{\varphi}(\Delta_{K+1}^0)); K = 0, \dots, m - 1,$$
$$\alpha_m^0 = \alpha_m^0(0; \dot{\varphi}(0))$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1.1.—1.5. Пусть кроме того

$$\nu = 1 - (L_2 + qM_2) > 0 \tag{3}$$

где

$$q = q_L \frac{1 - q_M^{m+1}}{1 - q_M}, \quad q_L = \Phi L_1 + \beta L_3,$$
$$q_M = \Phi M_1 + \beta M_3, \Phi = \max \{B, F^*\}.$$

Тогда начальная задача (1), (2) имеет единственное непрерывно дифференцируемое решение на интервале J_h, если только $h = \min\{H, \Delta, h_1\}$. Здесь

$$h_1 < h_2 = \nu(L_1 + qM_1)^{-1} \tag{4}$$

Доказательство. Сформулируем следующую лемму:
Лемма 1. Пусть (ξ_1, ξ_2, ξ_3), $(\bar\xi_1, \bar\xi_2, \bar\xi_3) \in G$, $t \in I_H$.
Тогда

$$\begin{aligned} &|\min_q \max_p f(p, q, t; \xi_1, \xi_2, \xi_3) - \\ &- \min_q \max_p f(p, q, t; \bar\xi_1, \bar\xi_2, \bar\xi_3)| \leqq \\ &\leqq \max_{\tau\in R} |f(p, q, t; \xi_1, \xi_2, \xi_3) - f(p, q, t; \bar\xi_1, \bar\xi_2, \bar\xi_3)|. \end{aligned} \tag{5}$$

Лемма тривиальна и непосредственно следует из свойств седловой точки [5].

Рассмотрим пространство C непрерывных ограниченных функций y на интервале J_h, с метрикой, порожденной нормой

$$\| y \| = \sup\{| y(t) | : t \in J_h\} \tag{6}$$

Пусть оператор Π действует в C по формуле

$$\Pi y(t) = \begin{cases} \min\limits_q \max\limits_p f(p, q, t; x(\tau_0), y(t), y(\Delta_0)); & t > 0 \\ \dot\varphi(t);\ t \leqq 0, \end{cases} \tag{7}$$

где

$$x(t) = \varphi(0) + \int_0^t y(s)\,\mathrm{d}s$$

Нетрудно установить, что $\Pi Y \subset \tilde{Y}$, где $\tilde{Y}$ есть множество сужений элементов $y \in Y$ на интервал J_h. На основе (6), (7) и 1.4. получаем оценку

$$| x(t) - x(\bar t) | \leqq \Phi\, | t - \bar t |;\ t, \bar t \in J_h.$$

Пусть $y, \bar y \in \tilde{Y}$. Для соответствующих $x, \bar x$ имеем

$$\| x - \bar x \| \leqq h \| y - \bar y \|. \tag{8}$$

Положим $\alpha_K = \alpha_K(t; x(\tau_{K+1}), y(t), y(\Delta_{K+1}))$,

$$\bar\alpha_K = \alpha_K(t; \bar x(\bar\tau_{K+1}), \bar y(t), \bar y(\bar\Delta_{K+1})).$$

Тогда из 1.1.–1.4., (3), (4) и леммы 1 следует

$$\begin{aligned} &| \Pi y(t) - \Pi \bar y(t) | \leqq L_1\, | x(\tau_0) - \bar x(\bar\tau_0) | + \\ &+ L_2\, | y(t) - \bar y(t) | + L_3\, | y(\Delta_0) - \bar y(\bar\Delta_0) | \leqq \\ &\leqq L_1(| x(\tau_0) - x(\bar\tau_0) | + | x(\bar\tau_0) - \bar x(\bar\tau_0) |) + \\ &+ L_2\, | y(t) - \bar y(t) | + L_3\, | \dot\varphi(\Delta_0) - \dot\varphi(\bar\Delta_0) | \leqq \\ &\leqq L_1\, \| x - \bar x \| + L_2\, \| y - \bar y \| + \\ &+ \Phi L_1\, | \tau_0 - \bar\tau_0 | + \beta L_3\, | \Delta_0 - \bar\Delta_0 |. \end{aligned} \tag{9}$$

Аналогичным образом для α_K и $\bar{\alpha}_K$ получаем

$$
(10) \qquad \begin{gathered}
|\alpha_K - \bar{\alpha}_K| \leqq M_1 \| x - \bar{x} \| + M_2 \| y - \bar{y} \| + \\
+ \varnothing M_1 | \tau_{K+1} - \bar{\tau}_{K+1} | + \beta M_3 | \Delta_{K+1} - \bar{\Delta}_{K+1} |, \\
K = 0, \ldots m - 1; \\
|\alpha_m - \bar{\alpha}_m| \leqq M_2 \| y - \bar{y} \|,
\end{gathered}
$$

Из (10) следует

$$
(11) \qquad |\alpha_0 - \bar{\alpha}_0| \leqq \frac{1 - q_M^{m+1}}{1 - q_M} (M_1 \| x - \bar{x} \| + M_2 \| y - \bar{y} \|),
$$

Подставляя (11) в (8) и (9) получаем

$$
\| \Pi y - \Pi \bar{y} \| \leqq \varkappa(h) \| y - \bar{y} \|,
$$

где

$$
\varkappa(h) = 1 - \nu + \frac{\nu}{h_2} h,
$$

На основе неравенства (5) $\varkappa(h) < \varkappa(h_2) = 1$, т. е., Π — оператор сжатия на множестве $\tilde{Y}$. Следовательно существует единственное решение $y \in \tilde{Y}$ операторного уравнения $y = \Pi y$, которое может быть найдено интерациями по схеме $y^{(K)} = \Pi y^{(K-1)}$; $K = 1, 2, \ldots$, если только $y^{(0)} \in \tilde{Y}$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 при $H = \infty$. Пусть кроме того в G имеют место неравенства

$$
\begin{gathered}
\max_{\tau \in R} | f(p, q, t; \xi) - f(p, q, \bar{t}; \xi) | \leqq \lambda | t - \bar{t} |, \\
| \alpha_K(t; \xi) - \alpha_K(\bar{t}; \xi) | \leqq \mu | t - \bar{t} |, \\
K = 0, \ldots, m.
\end{gathered}
$$

Пусть наконец

$$
(12) \qquad \begin{gathered}
C_3 - C_2 \geqq 2 \sqrt{C_1 C_4}; \ \varnothing M_1 < 1, \ C_2 + C_3 > 0, \\
C_3 > 0, C_1 C_4 + C_2 C_3 > 0,
\end{gathered}
$$

где

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \lambda(1 - \Phi M_1) + \mu \Phi L_1, \\
C_2 &= \mu L_3 - \lambda M_3, \\
C_3 &= (1 - L_2)(1 - \Phi M_1) - \Phi L_1 M_2, \\
C_4 &= M_3(1 - L_2) + L_3 M_2.
\end{aligned}
$$

Тогда если

$$
(13) \qquad \beta \leqq \tilde{\beta} = \frac{1}{2C_4} (C_3 - C_2 + \sqrt{(C_3 - C_2)^2 - 4C_1 C_4}).
$$

то начальная задача (1), (2) имеет единственное почти всюду непрерывно дифференцируемое решение на интервале $J\infty$.

Доказательство. Рассмотрим шаговый процесс построения решения с шагом $\tilde{h}$, где $\tilde{h} = \min \{\Delta, \tilde{h}_1\}$ и

$$\tilde{h}_1 < (c_3 - c_4\tilde{\beta})(L_1 + \tilde{q}M_1)^{-1},$$

$$\tilde{q} = \tilde{q}_L \frac{1}{1 - \tilde{q}_M}, \quad \tilde{q}_L = \Phi L_1 + \tilde{\beta} L_3,$$

$$\tilde{q}_M = \Phi M_1 + \tilde{\beta} M_3$$

Покажем, что полученное таким образом решение будет обладать производной, удовлетворяющей условию Липшица с константой β.

Действительно, в силу условий теоремы 2 заведомо выполняются и условия теоремы 1 т. е., существует единственное непрерывно дифференцируемое решение $x = x(t)$ начальной (1), (2) на интервале $J_{\tilde{h}}$, $\tilde{h} \leqq h$.

Положим $\bar{\gamma}_K = \gamma_K(\bar{t}; x(\bar{\tau}_{K+1}), \dot{x}(\bar{t}), \dot{x}(\bar{\Delta}_{K+1}))$,
где через γ_K обозначена какая-нибудь из функций τ_K, Δ_K, $K = 0, \ldots, m$. Пусть t, $\bar{t} \in I_{\tilde{h}}$. Тогда

$$\text{(14)} \qquad \begin{aligned} |\dot{x}(t) - \dot{x}(\bar{t})| &\leqq \lambda |t - \bar{t}| + \Phi L_1 |\tau_0 - \bar{\tau}_0| + \\ &+ L_2 |\dot{x}(t) - \dot{x}(\bar{t})| + \beta L_3 |\Delta_0 - \bar{\Delta}_0|. \end{aligned}$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} |\gamma_K - \bar{\gamma}_K| &\leqq \mu |t - \bar{t}| + \Phi M_1 |\tau_{K+1} - \bar{\tau}_{K+1}| + \\ &+ M_2 |\dot{x}(t) - \dot{x}(\bar{t})| + \beta M_3 |\Delta_{K+1} - \bar{\Delta}_{K+1}|, \\ &K = 0, \ldots, m-1; \\ |\gamma_m - \bar{\gamma}_m| &\leqq \mu |t - \bar{t}| + M_2 |\dot{x}(t) - \dot{x}(\bar{t})|, \end{aligned}$$

откуда следует

$$\text{(15)} \qquad |\gamma_0 - \bar{\gamma}_0| \leqq \frac{\mu}{1 - q_M} |t - \bar{t}| + \frac{M_2}{1 - q_M} |\dot{x}(t) - \dot{x}(\bar{t})|.$$

Подставляя (15) в (14) получаем

$$\begin{aligned} |\dot{x}(t) - \dot{x}(\bar{t})| &\leqq (\lambda + \mu q_L (1 - q_M)^{-1}) |t - \bar{t}| + \\ &+ (L_2 + M_2 q_L (1 - q_M)^{-1}) |\dot{x}(t) - \dot{x}(\bar{t})|. \end{aligned}$$

Следовательно

$$|\dot{x}(t) - \dot{x}(\bar{t})| \leqq \beta^* |t' - t''|; \beta^* = \max\{\beta, \beta_1\},$$

$$\beta_1 = (c_1 + c_2\beta)(c_3 - c_4\beta)^{-1}; t', t'' \in J_{\tilde{h}}.$$

Но тогда из (12) и (13) находим оценку $\beta^* \leqq \tilde{\beta}$.

Допустим теперь, что при помощи $n (n \geqq 2)$ шагов построено решение начальной задачи на интервале $J_{n\tilde{h}}$, причем производная этого решения удовлетворяет условию Липшица с константой β_n. Это решение может быть продолжено на интервал $J_{(n+1)\tilde{h}}$. Аналогичным образом, как это делалось для $n = 1$, можно показать, что производная продолженного решения будет удовлетворять условию Липшица с константой

$$\text{(16)} \qquad \beta_{n+1} = \max\{\beta_n, (c_1 + c_2\beta_n)(c_3 - c_4\beta_n)^{+1}\}.$$

Пусть $\beta_n \leqq \tilde{\beta}$. Тогда из (12), (13) и (16) следует $\beta_{n+1} \leqq \tilde{\beta}$, т. е., индукцией по n показано, что рассматриваемое решение будет обладать производной, удовлетворяющей условию Липшица с константой $\tilde{\beta}$.

Теперь ясно, что шаговый процесс построения решения можно продолжить до бесконечности и полеченное таким образом склеенное решение будет соответствовать утверждению теоремы 2. Этим теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Животовский Л. А., *Теоремы существования и классы единственности решений функциональных уравнений с наследственностью.* ДУ, т. 7, № 8, 1971.

[2] Скрипник В. П., *Единственность и непрерывная зависимость от начальных условий решений некоторых систем с преобразованным аргументом.* ДУ, т. 7, № 6, 1971.

[3] Рудаков В. П., *К вопросу о существовании решений дифференциальных уравнений с запаздыванием, зависящим от решения.* ДУ, т. 7, № 11, 1971.

[4] Driver R. D., *Existence and Continuous Dependence of Solutions of a Neutral Functional-Differential Equation.* Arch. Rat. Mech. and Anal., v. 19 (2), 1965.

[5] Беллман Р., *Динамическое программирование.* ИЛ, Москва, 1960.

Михаил Константинов
Высший машинно-электротех. институт им. В. И. Ленина
ул. Омуртаг 10, София — 4
Болгария

Друми Байнов
Медицинская академия
Оборище 23, София — 4
Болгария