Archivum Mathematicum

N. A. Dragieva; Drumi Dimitrov Bajnov

Метод асимптотического интегрирования систем и нтегро-дифференциальных уравнений с малым параметром в случае несоизмеримых частот порождающей системы

Archivum Mathematicum, Vol. 8 (1972), No. 4, 187--194

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104778`

Terms of use:

© Masaryk University, 1972

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

ARCH. MATH., SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS, 4,
VIII: 187 — 194, 1972

МЕТОД АСИМПТОТИЧЕСКОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ В СЛУЧАЕ НЕСОИЗМЕРИМЫХ ЧАСТОТ ПОРОЖДАЮЩЕЙ СИСТЕМЫ

Н. А. Драгиева, Д. Д. Байнов

(Поступило в редакцию 28-ого августа 1972 г.)

При моделировании динамических задач теории вязко-упругости часто приходится решать квазилинейные системы интегро-дифференциальных уравнений.

В настоящей работе метод предложенный в [1] применяется для асимптотического интегрирования этих систем.

Рассмотрим систему

$$
\begin{gathered}
\ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i = \varepsilon f_i(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) + \\
+ \varepsilon \int_0^t \lambda_i(t-\tau)\, \varrho_i[x_1(\tau), \dots, x_n(\tau), \dot{x}_1(\tau), \dots, \dot{x}_n(\tau)]\, \mathrm{d}\tau \qquad (i = 1, \dots, n).
\end{gathered} \tag{1}
$$

Предполагаем, что функции ϱ_i и f_i раскладываются в рядах Фурье произвольной кратности, а о частотах ω_i — что являются несоизмеримыми между собой. Величина ε — малый параметр.

Рассмотрим порождающую систему системы (1)

$$\ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i = 0 \tag{2}$$

Она имеет решение

$$x_i = A_{i0} \sin(\omega_i t + \Theta_{i0}) \qquad (\dot{x}_i = A_i \omega_i \cos(\omega_i t + \Theta_{i0}) \tag{3}$$

где A_{i0} и Θ_{i0} — постоянные.

Будем искать решение системы (1) в виде

$$x_i(t) = A_i(t) \sin[\omega_i t + \Theta_i(t)]. \tag{4}$$

Подобно (3) ставим условие

$$\dot{x}_i = A_i \omega_i \cos[\omega_i t + \Theta_i(t)]. \tag{5}$$

Дифференцируя (4) и имея ввиду (5), получаем следующую зависимость

$$\dot{A}_i \sin(\omega_i t + \Theta_i) + A_i \dot{\Theta} \cos(\omega_i t + \Theta_i) = 0. \tag{6}$$

Дифференцируя (5), находим

$$\ddot{x}_i = \dot{A}_i \omega_i \cos(\omega_i t + \Theta_i) - A_i \omega_i(\omega_i + \dot{\Theta}_i) \sin(\omega_i t + \Theta_i). \tag{7}$$

Подставляем равенства (4) и (7) в (1) и получаем

$$\dot{A}_i\omega_i \cos(\omega_i t + \Theta_i) - A_i\omega_i\dot{\Theta}_i \sin(\omega_i t + \Theta_i) = \varepsilon f_i(x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n) + \tag{8}$$
$$+ \varepsilon \int_0^t \lambda_i(t-\tau)\, \varrho_i[x_1(\tau), \ldots\, x_n(\tau), \dot{x}_1(\tau), \ldots, x_n(\tau)]\, d\tau$$

Умножаем равенство (8) на $\frac{1}{\omega_i}\cos(\omega_i t + \Theta_i)$, равенство (6) на $\sin(\omega_i t + \Theta_i)$, складываем их и находим

$$\dot{A}_i = \frac{\varepsilon}{\omega_i} f_i(x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)\cos(\omega_i t + \Theta_i) + \tag{9}$$
$$+ \frac{\varepsilon}{\omega_i}\int_0^t \lambda_i(t-\tau)\, \varrho_i[x_1(\tau), \ldots, x_n(\tau), \dot{x}_1(\tau), \ldots, \dot{x}_n(\tau)]\, d\tau \cos(\omega_i t + \Theta_i)$$

Потом умножаем равенство (8) на $\frac{1}{\omega_i}\sin(\omega_i t + \Theta_i)$, равенство (6) на $\cos(\omega_i t + \Theta_i)$, вычитаем (6) из (8) и находим

$$\dot{\Theta}_i = -\frac{\varepsilon}{A_i\omega_i} f_i(x_1 \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)\sin(\omega_i t + \Theta_i) - \tag{10}$$
$$- \frac{\varepsilon}{\omega_i A_i}\int_0^t \lambda_i(t-\tau)\, \varrho_i[x_1(\tau), \ldots, x_n(\tau), \dot{x}_1(\tau), \ldots, \dot{x}_n(\tau)]\, d\tau \sin(\omega_i t + \Theta_i)$$

Подставляем равенства (4) и (6) в (9) и (10) и полагая $\varphi_i = \omega_i t + \Theta_i$ получаем

$$\dot{A}_i = \frac{\varepsilon}{\omega_i} f_i[A_1 \sin\varphi_1, \ldots, A_n \sin\varphi_n, A_1\omega_1 \cos\varphi_1, \ldots, A_n\omega_n \cos\varphi_n]\cos\varphi_i +$$
$$+ \frac{\varepsilon}{\omega_i}\int_0^t \lambda_i(t-\tau)\, \varrho_i[A_1 \sin\bar{\varphi}_1, \ldots, A_n \sin\bar{\varphi}_n, A_1\omega_1 \cos\bar{\varphi}_1, \ldots, A_n\omega_n \cos\bar{\varphi}_n]\, d\tau \cos\varphi_i$$
$$\dot{\Theta}_i = -\frac{\varepsilon}{\omega_i A_i} f_i[A_1 \sin\varphi_1, \ldots, A_n \sin\varphi_n, A_1\omega_1 \cos\varphi_1, \ldots, A_n\omega_n \cos\varphi_n]\sin\varphi_i -$$
$$- \frac{\varepsilon}{\omega_i A_i}\int_0^t \lambda_i(t-\tau)\, \varrho_i[A_1 \sin\bar{\varphi}_1, \ldots, A_n \sin\bar{\varphi}_n, A_1\,\omega_1 \cos\bar{\varphi}_1, \ldots, A_n\omega_n \cos\bar{\varphi}]\, d\tau \times$$
$$\sin\varphi_i \quad \bar{\varphi}_i = a_i\tau + \Theta_i(\tau) \tag{11}$$

Функции $f_i\cos\varphi_i$, $f_i\sin\varphi_i$ раскладываем в n-кратных рядах Фурье. Для нахождения первого приближения решения нам нужны только первые коэффициенты этих разложений

$$a_{i0} = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi} f_i \cos\varphi_i\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_n \tag{12}$$
$$C_{i0} = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi} f_i \sin\varphi_i\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_n$$

Функции ϱ_i тоже раскладываем в n-кратных рядах Фурье

$$
\begin{aligned}
\varrho_i &= p_{i0}(A_1, \ldots, A_n) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{K=1}^{n} (p_{i\nu\kappa} \cos \nu\varphi_\kappa + q_{i\nu\kappa} \sin \nu\varphi_\kappa) + \\
&+ \sum_{ч=2}^{n} \Big(\sum_{m_1 \ldots m_ч} \sum_{i_1 \ldots i_ч} \bar{P}_{im_1 \ldots m_ч i_1 \ldots i_ч} \prod_{S=1}^{ч} \cos m_4 \varphi_{is} + \\
&+ \sum_{\bar{m}_1 \ldots \bar{m}_ч} \sum_{j_1 \ldots j_ч} \bar{P}_{i\bar{m}_1 \ldots \bar{m}_ч j_1 \ldots j_ч} \prod_{s=1} \sin \bar{m}_i \varphi_{js}\Big) + \\
&+ \sum_{p+q=2}^{n} \sum_{m_1 \ldots m_p \bar{m}_1 \ldots \bar{m}_q} \sum_{i_1 \ldots i_p j \ldots j_q} \bar{P}_{im_1 \ldots m_p \bar{m}_1 \ldots \bar{m}_q i_1 \ldots i_p j_1 \ldots j_q} \prod_{S=1}^{P} \cos m_8 \varphi_{i_s} \prod_{l=1}^{q} \sin \bar{m}_l \varphi_{jl}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

$$
\left.\begin{matrix} i_\nu \neq i_\mu \\ j_\nu \neq j_\mu \end{matrix}\right\} \nu \neq \mu \qquad \begin{matrix} i_i \neq j_e \\ p,q \geqq 1 \end{matrix}
$$

$$
m_1, \ldots, m_n, \bar{m}_1, \ldots, \bar{m}_n = 1, 2, 3, \ldots
$$

$$
i_1, \ldots, i_n, j_1, \ldots, j_n = 1, 2, \ldots, n.
$$

Коэффициенты этих разложений являются функциями A_i. Педположим, что они удовлетворяют достаточным условиям раскладывания в кратных рядах Фурье

$$
\begin{gathered}
\sum_{\nu=1}^{\infty} | P_{i\nu\kappa} | \nu^2 < \infty, \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} | q_{i\nu\kappa} | \nu^2 < \infty \\
i = 1, \ldots, n, \qquad \kappa = 1, \ldots, n, \\
\sum_{ч=2}^{n} \sum_{m_1 \ldots m_ч} | \bar{P}_{im_1 \ldots m_ч i_1 \ldots i_ч} | \sum_{l=1}^{n} m_l^2 < \infty, \\
\sum_{ч=2}^{n} \sum_{m_1 \ldots m_2} | \bar{P}_{i\bar{m}_1 \ldots \bar{m}_ч j_1 \ldots j_ч} | \sum_{l=1}^{n} \bar{m}_l^2 < \infty, \\
\sum_{p+q=2}^{n} \sum_{m_1 \ldots m_p \bar{m}_1 \ldots \bar{m}_q} \bar{P} | _{im_1 \ldots m_p \bar{m}_1 \ldots \bar{m}_q i_1 \ldots i_p j_1 \ldots j_q} | \Big(\sum_{l=1}^{p} m_l^2 + \sum_{l_1=1}^{q} m_{l_1}^2\Big) < \infty
\end{gathered}
\tag{14}
$$

В этих развитиях произведения синусов и косинусов представляем сумами и получаем

$$
\begin{aligned}
\varrho_i &= p_{i0}(A_1, \ldots, A_n) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\kappa=1}^{n} (P_{i\nu\kappa} \cos \nu\varphi_\kappa + q_{i\nu\kappa} \sin \nu\varphi_\kappa) + \\
&+ \sum_{ч=2}^{n} \sum_{m_1 \ldots m_ч} \sum_{S=1}^{ч-1} \sum_{i_1 \ldots i_s j_{s+1} \ldots j_ч} \Big(P_{im_1 \ldots m_ч i_1 \ldots i_s j_{s+1} \ldots j_ч} \cos\Big[\sum_{\nu=s+1}^{ч} m_\nu \varphi_{j\nu} - \sum_{\nu=1}^{s} m_\nu \varphi_{i\nu}\Big] + \\
&+ q_{im_1 \ldots m_ч i_1 \ldots i_s j_{s+1} \ldots j_ч} \sin\Big[\sum_{\nu=s+1}^{ч} m_\nu \varphi_{j\nu} - \sum_{\nu=1}^{s} m_\nu \varphi_{i\nu}\Big)\Big] + \\
&+ \sum_{\tau=2}^{n} \sum_{m_1 \ldots m_2} \sum_{l_1 \ldots l_ч} \Big(P_{im_1 \ldots m_ч l_1 \ldots l_ч} \cos\Big[\sum_{\nu=1}^{ч} m_\nu \varphi_{l\nu}\Big] + \\
&+ q_{im_1 \ldots m_ч l_1 \ldots l_ч} \sin\Big[\sum_{\nu=1}^{ч} m_\nu \varphi_{l\nu}\Big]\Big).
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Раскладываем и функции $f_i[A_1 \sin \varphi_1, \ldots, A_n \sin \varphi_n, A_1\omega_1 \cos \varphi_1, \ldots, A_n\omega_n \cos\varphi]$ в n-кратных рядах Фурье и произведения тригонометрических функций тоже представляем суммами

$$f_i = P_{i0}(A_1, \ldots, A_n) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\kappa=1}^{n} (P_{i\nu\kappa} \cos \nu\varphi_\kappa + Q_{i\nu\kappa} \sin \nu\varphi_\kappa) +$$

$$+ \sum_{ч=2}^{n} \sum_{m_1 \ldots m_\tau} \sum_{s=1}^{ч-1} \sum_{i_1 \ldots i_s j_{s+1} \ldots j_\tau} (P_{im_1 \ldots m_ч i_1 \ldots i_s j_{s+1} \ldots j_ч} \cos \Big[\sum_{\nu=1}^{ч} m_\nu \varphi_{j\nu} \sum_{\nu=s+1}^{s} m_\nu \varphi_{j\nu}\Big] +$$

(16)
$$+ Q_{im_1 \ldots m_ч i_1 \ldots i_s j_{s+1} \ldots j_ч} \sin \Big[\sum_{\nu=s+1}^{ч} m_\nu \varphi_{j\nu} - \sum_{\nu=1}^{s} m_\nu \varphi_{i\nu}\Big]) +$$

$$+ \sum_{ч=2}^{n} \sum_{m_1 \ldots m_2} \sum_{l_1 \ldots l_ч} (P_{im_1 \ldots m_ч l_1 \ldots l_ч} \cos \Big[\sum_{\nu=1}^{ч} m_\nu \varphi_{l\nu}\Big] +$$

$$+ Q_{im_1 \ldots m_ч l_1 \ldots l_ч} \sin \Big[\sum_{\nu=1}^{ч} m_\nu \varphi_{l\nu}\Big]).$$

$$i_\nu \neq j_\nu \qquad m_1, \ldots, m_n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\left.\begin{array}{l} i_p \neq i_q \\ j_p \neq j_q \end{array}\right\} p \neq q \qquad \begin{array}{ll} i_1, \ldots, i_{n-1} & = 1, 2, \ldots, n, \\ j_2, \ldots, j_n & = 1, 2, \ldots, n, \\ l_1, \ldots, l_n & = 1, 2, \ldots, n. \end{array}$$

Для коэффициентов P_{i1i} и Q_{i1i} в этом разложении имеем

(17)
$$P_{i1i} = \frac{1}{2^{n-1}\pi^n} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} f_i \cos \varphi_i \, d\varphi_1 \ldots d\varphi_n$$

$$\Theta_{i1i} = \frac{1}{2^{n-1}\pi^n} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} f_i \sin \varphi_i \, d\varphi_1 \ldots d\varphi_n.$$

Имея ввиду (15) находим

$$\int_0^t \lambda_i(t-\tau)\, \varrho_i \, d\tau = p_{i0}R_{i0} +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\kappa=1}^{n} (p_{i\nu\kappa}R_{i\nu\kappa} - q_{i\nu\kappa}S_{i\nu\kappa}) \cos \nu\varphi_\kappa + (p_{i\nu\kappa}S_{i\nu\kappa} + q_{i\nu\kappa}R_{i\nu\kappa}) \sin \nu\varphi_\kappa +$$

$$+ \sum_{\tau=2}^{n} \sum_{m_1 \ldots m_ч} \sum_{S=1}^{ч-1} \sum_{i_1 \ldots i_s j_{s+1} \ldots j_ч} - (P_{im_1 \ldots m_ч i_1 \ldots i_s j_{s+1} \ldots j_\tau} R_{im_1 \ldots m_ч i_1 i_s j_{s+1} \ldots j_\tau} -$$

$$- q_{im_1 \ldots m_ч i_1 \ldots i_s j_{s+1} \ldots j_ч} S_{im_1 \ldots m_ч i_1 \ldots i_s j_{s+1} \ldots j_ч}) \cos \Big[\sum_{\nu=s+1}^{ч} m_\nu \varphi_{i\nu} - \sum_{\nu=1}^{s} m_\nu \varphi_{i\nu}\Big] +$$

(18)
$$+ (P_{im_1 \ldots m_ч i_1 \ldots i_s j_{s+1} \ldots j_ч} S_{im_1 \ldots m_ч i_1 \ldots i_s j_{s+1} \ldots j_ч} +$$

$$+ q_{im_1 \ldots m_ч i_1 \ldots i_s j_{s+1} j_ч} R_{im_1 \ldots m_ч i_1 \ldots i_s j_{s+1} \ldots j_ч}) \sin \Big[\sum_{\nu=s+1}^{ч} m_\nu \varphi_{j\nu} - \sum_{\nu=1}^{S} m_\nu \varphi_{i\nu}\Big] +$$

$$+\sum_{\tau=2}^{n}\sum_{m_1\ldots m_ч}\sum_{l_1\ldots l_ч}(P_{im_1\ldots m_ч l_1\ldots l_ч}R_{im_1\ldots m_ч l_1\ldots l_ч} -$$

$$- q_{im_1\ldots m_ч l_1\ldots l_ч}S_{im_1\ldots m_ч l_1\ldots l_ч})\cos\left[\sum_{\nu=1}^{\tau} m_\nu\varphi_{l\nu}\right] +$$

$$+ (P_{im_1\ldots m_ч l_1\ldots l_ч}S_{im_1\ldots m_ч l_1\ldots l_ч} +$$

$$+ q_{im_1\ldots m_ч l_1\ldots l_ч}R_{im_1\ldots m_ч l_1\ldots l_ч})\sin\left[\sum_{\nu=1}^{\tau} m_\nu\varphi_{l\nu}\right]$$

где коэффициенты R_{i0}, $R_{i\nu\kappa}$, $S_{i\nu\kappa}$, … имеют вид

$$R_{i0} = \int_0^\infty \lambda_i(z)\,\mathrm{d}z$$

$$R_{i\nu\kappa} = \int_0^\infty \lambda_i(z)\cos\nu\varphi_\kappa\,\mathrm{d}z$$

$$S_{i\nu\kappa} = \int_0^\infty \lambda_i(z)\sin\nu\varphi_\kappa\,\mathrm{d}z$$

(19) $$R_{im_1\, m_ч l_1\, i_s\, j+1\, j_ч} = \int_0^\infty \lambda_i(z)\cos\left[\sum_{\nu=S+1}^{ч} m_\nu\varphi'_{j\nu} - \sum_{\nu=1}^{S} m_\nu\varphi'_{i\nu}\right]\mathrm{d}z,$$

$$S_{im_1\ldots m_ч l_1\ldots i_s j_{s+1}\ldots j_ч} = \int_0^\infty \lambda_i(z)\sin\left[\sum_{\nu=S+1}^{ч} m_\nu\varphi'_{j\nu} - \sum_{\nu=1}^{S} m_\nu\varphi'_{i\nu}\right]\mathrm{d}z,$$

$$R_{im_1\ldots m_ч l_1\ldots l_ч} = \int_0^\infty \lambda_i(z)\cos\left[\sum_{\nu=1}^{ч} m_\nu\varphi'_{e\nu}\right]\mathrm{d}z,$$

$$S_{im_1\ldots m_ч l_1\ldots l_ч} = \int_0^\infty \lambda_i(z)\sin\left[\sum_{\nu=1}^{ч} m_\nu\varphi'_{e\nu}\right]\mathrm{d}z.$$

$$\varphi'_i = \omega_i z + \Theta_i$$

Раскладываем правую сторону равенства (9) в n-кратных рядах Фурье и после интегрирования в области $0 \le \varphi_i \le 2\pi$ находим

(20) $$\dot{A}_i = \frac{\varepsilon}{\omega_i}a_{i0} + \frac{\varepsilon}{2\omega_i}(p_{i1i}R_{i1i} - q_{i1i}S_{i1i})$$

$$\dot{\Theta}_i = -\frac{\varepsilon}{\omega_i A_i}c_{i0} - \frac{\varepsilon}{2\omega_i A_i}(p_{i1i}S_{i1i} + q_{i1i}R_{i1i})$$

Из равенства (20) определяем $A_i(t)$ и $\Theta_i(t)$.

Здесь

(21) $$p_{i1i} = \frac{1}{2^{n-1}\pi^n}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}\varrho_i\cos\varphi_i\,\mathrm{d}\varphi_1\ldots\mathrm{d}\varphi_n,$$

$$q_{i1i} = \frac{1}{2^{n-1}\pi^n}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}\varrho_i\sin\varphi_i\,\mathrm{d}\varphi_i\ldots\mathrm{d}\varphi_n,$$

$$R_{i1\,i} = \int\limits_0^\infty \lambda_i(z) \cos \varphi_i' \, dz,$$

(22)

$$S_{i1\,i} = \int\limits_0^\infty \lambda_i(z) \sin\varphi_i' dz.$$

Для приближенного решения системы (1) получаем

$$\bar{x}_i = A_i \sin \varphi_i + \frac{\varepsilon}{\omega_i} x_i^*, \tag{23}$$

где x_i^* является решением уравнения

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i^* + \omega_i^2 x_i^* &= \omega_i[f_i - P_{i1\,i} \cos \varphi_i - \Theta_{i1\,i} \sin \varphi_i] + \\ &+ \omega_i \int\limits_0^t \lambda_i(t-\tau)\,\varrho_i\, d\tau - \omega_i(p_{i1\,i} R_{i1\,i} - q_{i1\,i} S_{i1\,i}) \cos \varphi_i - \\ &- \omega_i\,(p_{i1i}\, S_{i1i} + q_{i1i}\, R_{i1i})\, sin\, \varphi_i \end{aligned} \tag{24}$$

Подставляем в (24) фурьеровые развития функции f_i и $\int\limits_0^t \lambda_i(t-\tau)\varrho_i\, d\tau$ из равенства (16) и (18), ставим полученные результаты в (23) и находим

$$\begin{aligned} \bar{x}_i = A_i \sin \varphi_i + \varepsilon \Bigg\{ & \frac{P_{i0}}{\omega_i^2} - \sum_{\nu=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \Big(P_{i\nu\kappa} \cos \nu\varphi_\kappa + Q_{i\nu\kappa} \sin\nu\, \varphi_\kappa \Big) \frac{1}{\nu^2\omega_k^2 - \omega_i^2} - \\ & \sum_{\text{ч}=2}^{n} \sum_{m_1 \ldots m_\text{ч}} \sum_{s=1}^{\text{ч}-1} \sum_{i_1 \ldots i_s j_{s+1} \ldots j_\text{ч}} \Big(P_{im_1 \cdots m_\text{ч} i_1 \cdots i_s j_{s+1} \cdots} \cos \Big[\sum_{\nu=s+1}^{\text{ч}} m_\nu \varphi_{j\nu} - \sum_{\nu=1}^{s} m_\nu \varphi_{i\nu} \Big] + \\ & + Q_{im_1 \cdots m_\text{ч} \cdots ij_s j_{s+1} \cdots j_\text{ч}} \sin \Big[\sum_{\nu=s+1}^{\tau} m_\nu \varphi_{j\nu} - \sum_{\nu=1}^{s} m_\nu \varphi_{i\nu} \Big] \Big) \frac{1}{\Big[\sum\limits_{\nu=s+1}^{\text{ч}} m_\nu \omega_{j\nu} - \sum\limits_{u=1}^{\tau} m_\nu \omega_{i\nu} \Big]^2 - \omega_t^2} - \\ & - \sum_{\tau=2}^{n} \sum_{m_1 \ldots m_\text{ч}} \sum_{l_1 \ldots l_\tau} \Big(P_{im_1 \cdots m_\text{ч} l_1 \cdots l_\text{ч}} \cos \Big[\sum_{\nu=1}^{\text{ч}} m \varphi_{e\nu} \Big] + \\ & + Q_{im_1 \cdots m_\text{ч} l_1 \cdots l_\text{ч}} \sin \Big[\sum_{\nu=1}^{\text{ч}} m_\nu \varphi_{e\nu} \Big] \Big) \frac{1}{\Big[\sum\limits_{\nu=1}^{\text{ч}} m_\nu \omega_{e\nu} \Big]^2 - \omega_i^2} \Bigg\} + \\ & + \varepsilon \Bigg\{ \frac{P_i R_{i0}}{\omega_i^2} - \sum_{\nu=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \Big[\Big(P_{i\nu\kappa} R_{i\nu\kappa} - q_{i\nu\kappa} S_{i\nu\kappa} \Big) \cos \nu\varphi_\kappa + \\ & + \Big(P_{i\nu\kappa} S_{i\nu\kappa} + q_{i\nu\kappa} R_{i\nu\kappa} \Big) \sin \nu\varphi_\kappa \Big] \frac{1}{\nu^2 \omega_k^2 - \omega_i^2} - \\ & - \sum_{\tau=2}^{n} \sum_{m_1 \ldots m_\text{ч}} \sum_{s=1}^{\text{ч}-1} \sum_{i_1 \ldots i_s j_{s+1} \ldots j_\text{ч}} \Big(\big(p_{im_1 \cdots m_\text{ч} i_1 \cdots i_s j_{s+1} \cdots j_\text{ч}} R_{im_1 \cdots m_\text{ч} i_1 \cdots i_s j_{s+1} \cdots j_\text{ч}} - \\ & - q_{im_1 \cdots m_\text{ч} i_1 \cdots i_s j_{s+1} \cdots j_\text{ч}} S_{im_1 \cdots m_\text{ч} i_1 \cdots i_s j_{s+1} \cdots j_\text{ч}} \big) \cos \Big[\sum_{\nu=s+1}^{\tau} m_\nu \varphi_{i\nu} - \sum_{\nu=1}^{s} m_\nu \varphi_{i\nu} \Big] + \end{aligned} \tag{25}$$

$$+\,(p_{im_1\cdots m_ч i_1\cdots i_s j_{s+1}\cdots j_ч}S_{im_1\cdots m_ч i_1\cdots i_s j_{s+1}\cdots j_ч}+$$

$$+\,q_{im_1\cdots m_ч i_1\cdots i_s j_{s+1}\cdots j_ч}R_{im_1\cdots m_ч i_1\cdots i_s j_{s+1}\cdots j_ч})\sin\Big[\sum_{\nu=s+1}^{ч}m_\nu\varphi_{j\nu}-\sum_{\nu=1}^{s}m_\nu\varphi_{i\nu}\Big]\Big)\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\Big[\sum\limits_{\nu=s+1}^{ч}m_\nu\omega_{j\nu}-\sum\limits_{\nu=1}^{s}m_\nu\omega_{i\nu}\Big]^2-\omega_i^2}-$$

$$-\sum_{\tau=2}^{n}\sum_{m_1\ldots m_ч}\sum_{l_1\ldots l_ч}\Big(p_{im_1\cdots m_ч l_1\cdots l_ч}R_{im_1\cdots m_ч l_1\cdots l_ч}-q_{im_1\cdots m_ч l_1\cdots l_ч}S_{im_1\cdots m_ч l_1\cdots l_ч}\Big)\cos\,\cdot$$

$$\cdot\Big[\sum_{\nu=1}^{\tau}m_\nu\varphi_{e\nu}\Big]+\Big(p_{im_1\cdots m_ч l_1\cdots l_ч}S_{im_1\cdots m_ч l_1\cdots l_ч}+q_{im_1\cdots m_ч l_1\cdots l_ч}R_{im_1\cdots m_ч l_1\cdots l_ч}\Big)\sin\,\cdot$$

$$\cdot\Big[\sum_{\nu=1}^{ч}m_\nu\varphi_{l\nu}\Big]\Big)\frac{1}{\Big[\sum\limits_{\nu=1}^{ч}m_\nu\omega_{l\nu}\Big]^2-\omega_i^2}\Bigg\}$$

$$\begin{array}{ll}
i_\nu \neq j_\nu & m_1, m_2, \ldots, m_n = 1, 2, 3, \ldots; \\
\left.\begin{array}{l} i_p \neq i_q \\ j_p \neq j_q \end{array}\right\} p \neq q & i_1, i_2, \ldots, i_{n-1} = 1, 2, \ldots, n; \\
 & j_2, j_3, \ldots, j_n = 1, 2, \ldots, n; \\
 & l_1, l_2, \ldots, l_n = 1, 2, \ldots, n.
\end{array}$$

Для илюстрации эффективности предлагаемого метода интегрируем систему

$$\ddot{x}_i+\omega_i^2x_i=\varepsilon\Bigg\{q_ix_i^2\sum_{\nu=1}^{n}\dot{x}_\nu+p_i\int_0^t\lambda_i(t-\tau)\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu\sum_{\nu=1}^{n}\dot{x}_\nu\,d\tau+ \tag{26}$$

$$+\,\mu_i\int_0^t\lambda_i(t-\tau)\sum x_\nu^2\dot{x}_\nu\,d\tau\Bigg\}\qquad(i=1,\ldots n)$$

где ω_i, q_i и μ_i являются постоянными.

Рассмотрим случай, когда все частоты ω_i являются несоизмеримыми. Применяем предложенный метод интегрирования и находим

$$\ddot{x}_i+\omega_i^2x_i=\varepsilon\Bigg\{q_iA_i^2\sum_{\nu=1}^{n}\omega_\nu A_\nu\left[\frac{1}{2}\cos\varphi_\nu-\frac{1}{4}\cos(2\varphi_i+\varphi_\nu)-\right.$$

$$-\left.\frac{1}{4}\cos(2\varphi_i-\varphi_\nu)\right]+\frac{1}{2}p_i\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\kappa=1}^{n}A_\nu A_\kappa\left[(\omega_\kappa+\omega_\nu)\sin(\varphi_\kappa+\varphi_\nu)R_{\kappa\nu}+\right. \tag{27}$$

$$\left.+\,(\omega_\kappa-\omega_\nu)\sin(\varphi_\nu-\varphi_\kappa)\bar{R}_{\kappa\nu}\right]+\mu_i\sum_{\nu=1}^{n}A_\nu^3\omega_\nu\left(\frac{R_\nu}{8}\cos\varphi_\nu-\frac{R_{3\nu}}{8}\cos3\varphi_\nu\right)$$

где

$$R_{\kappa\nu}=\int_0^\infty\lambda_i(z)\sin(\varphi_\kappa'+\varphi_\nu')\,dz,\qquad R_\nu=\int_0^\infty\lambda_i(z)\cos\varphi_\tau'\,dz;$$

$$\bar{R}_{\kappa\nu}=\int_0^\infty\lambda_i(z)\sin(\varphi_\nu-\varphi_\kappa)\,dz,\qquad R_{3\nu}=\int_0^\infty\lambda_i(z)\cos3\varphi_\nu'\,dz, \tag{28}$$

$$\dot{A}_i = \frac{\varepsilon}{8} q_i A_i^3 + \frac{\varepsilon\omega_i}{8} A_i^3 \mu_i, \qquad \dot{\Theta}_i = 0,$$

$$A_i = \frac{2}{\sqrt{-\varepsilon(q_i + \mu_i\omega_i}\sqrt{t}}, \qquad q_i + \mu_i\omega_i < 0.$$

Предположим, что коэффициенты в этих разложениях удовлетворяют условиям

$$\frac{8q_i}{\varepsilon(q_i + \mu_i\omega_i)\,t} \sum_{\nu=1}^{n} \left| \frac{\omega_\nu}{\sqrt{-\varepsilon(q_\nu + \mu_\nu\omega_\nu}\sqrt{t}} \right| \nu^2 < \infty,$$

$$(29) \qquad p_i \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\kappa=1}^{n} \left| \frac{2R_{\kappa\nu}\,\omega_\kappa + \omega_\nu}{\varepsilon\sqrt{q_\nu + \mu_\nu\omega_\nu}\sqrt{q_\kappa + \mu_\kappa\omega_\kappa t}} \right| (\nu^2 + \kappa^2) < \infty,$$

$$p_i \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\kappa=1}^{n} \left| \frac{2\bar{R}_{\kappa\nu}\,(\omega_\kappa - \omega_\nu)}{\varepsilon\sqrt{q_\nu + \mu_\nu\omega_\nu}\sqrt{q_\kappa + \mu_\kappa\omega_\kappa t}} \right| (\nu^2 + \kappa^2) < \infty,$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left| A_3^\nu \omega_\nu \frac{R_\nu}{8} \right| \nu^2 < \infty.$$

После некоторых выкладок получаем искомое приближенное решение системы (26)

$$\bar{x}_i = \frac{2\sin\varphi_i}{\sqrt{-\varepsilon(q_i + \mu_i\omega_i}\sqrt{t}} + \frac{4q_i}{t(q_i + \mu_i\omega_i)} \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq i}}^{n} \frac{\omega_\nu}{\sqrt{-\varepsilon(q_\nu + \mu_\nu\omega_\nu}\sqrt{t}} \left[\frac{\cos\varphi_\nu}{\omega_\nu^2 - \omega_i^2} - \right.$$

$$(30) \qquad \left. - \frac{1}{2}\frac{\cos(2\varphi_i + \varphi_\nu)}{(2\omega_i + \omega_\nu)^2 - \omega_i^2} - \frac{1}{2}\frac{\cos(2\varphi_i - \varphi_\nu)}{(2\omega_i - \omega_\nu)^2 - {}_i^2} \right] +$$

$$+ 2p_i \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\kappa=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{q_\nu + \mu_\nu\omega_\nu}\sqrt{q_\kappa + \mu_\kappa\omega_\kappa t}} \left[R_{\kappa\nu} \frac{\omega_\kappa + \omega_\nu}{(\omega_\kappa + \omega_\nu)^2 - \omega_i^2} \sin(\varphi_K + \varphi_\nu) + \right.$$

$$\left. + \bar{R}_{\kappa\nu} \frac{\omega_\kappa + \omega_\nu}{(\omega_\kappa - \omega_\nu)^2 - \omega_i^2} \sin(\varphi_\nu - \varphi_\kappa) \right] +$$

$$+ \mu_i \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq i}}^{n} \omega_\nu \frac{1}{t\sqrt{t(q_\nu + \omega_\nu\mu_\nu)}\sqrt{-\varepsilon(q_\nu + \omega_\nu\mu_\nu}} \left[\frac{R_\nu\cos\varphi_\nu}{\omega_\nu^2 - \omega_i^2} - \frac{R_{3\nu}\cos 3\varphi_\nu}{9\omega_\nu^2 - \omega_i^2} \right]$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Байнов Д. Д., Партинова Н. А., *Метод решения автономной квазилинейной системы с n-степенями свободы в случае несоизмеримых частот*. Archiwum mechaniki stosowanej, т. 18, № 6, 1966.

[2] Зигмунд А., *Тригонометрические ряды*, т. 11, Москва, 1965.

Неллы Драгиева
Высший машинно-электротех. институт
им. В. И. Ленина, ул. Цар Борис 1, № 60А
София,
Болгария

Друми Байнов
Медицинская академия
Оборище 23, София - 4
Болгария