Věra Radochová

Eigenschaften der Lösung einer partiellen Differentialgleichung vierter Ordnung

Archivum Mathematicum, Vol. 8 (1972), No. 2, 99--111

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104764

ARCH. MATH. 2, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS
VIII; 99 — 111 1972

EIGENSCHAFTEN DER LÖSUNG EINER PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNG VIERTER ORDNUNG

VĚRA RADOCHOVÁ
(Eingegangen am 24. September 1971)

Wenn wir die Längsschwingungen von Stäben in dem elastischen Zustand betrachten, setzen wir gewöhnlich voraus, dass die Querschnitte in ihrer Ebene undeformiert bleiben und dass sie sich nur in der Längsrichtung des Stabes bewegen. Unter diesen Voraussetzungen kann man die Längsschwingungen mit klassischer Wellengleichung beschreiben. Wenn wir aber die Deformation des Querschnittes in seiner Ebene in Erwägung ziehen, bekommen wir für die Längsschwingungen eine partielle Differentialgleichung vierter Ordnung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} \tag{1}$$

deren Koeffizienten a^2, c^2 gegebene Konstanten sind und die zum Beispiel in [1] hergeleitet ist.

Die folgenden Absätze sind der Behandlung von Eigenschaften der Lösung dieser partiellen Differentialgleichung für Cauchysche Anfangsbedingungen und für gewisse Randbedingungen gewidmet.

DIE LÖSUNG FÜR ANFANGSBEDINGUNGEN VON CAUCHY

Wir betrachten die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} = A(t, x) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + B(t, x) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + g(t, x), \tag{2}$$

deren Funktionen $A(t, x)$, $B(t, x)$, $g(t, x)$ in einem abgeschlossenen Gebiete $D : 0 \leqq x \leqq L$, $0 \leqq t \leqq T$, $L > 0$, $T > 0$, stetig sind und stetige Ableitungen haben.

Wir bezeichnen die rechte Seite der Gleichung (2) mit $F\left[t, x, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]$ und nehmen an, dass die Funktion F in dem Gebiete D stetige Ableitungen nach ihren Veränderlichen t, x, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ besitzt.

Wir nehmen an, dass zwei Funktionen $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$ gegeben sind, die in dem abgeschlossenen Intervalle $\langle 0, T\rangle$ definiert sind, in diesem Intervalle der Klasse C^2 gehören und für $t = 0$ folgende Beziehungen erfüllen:

$$\varphi_0(0) = u(0, 0), \frac{d^i \varphi_0(0)}{dt^i} = \frac{\partial^i u(0, 0)}{\partial t^i}, \quad i = 1, 2, 3, 4; \tag{3}$$

$$\frac{d^i \varphi_1(0)}{dt^i} = \frac{\partial^{i+1} u(0, 0)}{\partial x \partial t^i}, \quad i = 0, 1, 2, 3. \tag{4}$$

Es seien ferner in dem abgeschlossenen Intervalle $\langle 0, L\rangle$ die Funktionen $\psi_0(x)$ und $\psi_1(x)$ definiert, welche in diesem Intervalle der Klasse C^2 gehören und für $x = 0$ folgende Beziehungen erfüllen:

$$\psi_0(0) = u(0, 0), \quad \frac{d^i\psi_0(0)}{dx^i} = \frac{\partial^i u(0, 0)}{\partial x^i}, \quad i = 1, 2, 3, 4; \tag{5}$$

$$\frac{d^i\psi_1(0)}{dx^i} = \frac{\partial^{i+1}u(0, 0)}{\partial t\partial x^i}, \quad i = 0, 1, 2, 3. \tag{6}$$

Dann existiert genau eine Lösung der Differentialgleichung (2) die in dem Gebiete D regulär ist und für welche folgende Anfangsbedingungen gelten:

$$u(t, 0) = \varphi_0(t); \quad \frac{\partial u(t, 0)}{\partial x} = \varphi_1(t); \quad t \in \langle 0, T\rangle, \tag{7}$$

$$u(0, x) = \psi_0(x); \quad \frac{\partial u(0, x)}{\partial t} = \psi_1(x); \quad x \in \langle 0, L\rangle. \tag{8}$$

Diese Behauptung folgt aus dem allgemeinen Existenzsatz, der für partielle Differentialgleichungen n-ter Ordnung zum Beispiel in [2] eingeführt ist.

Um die Lösung der Anfangswertaufgabe (2), (7), (8) zu bestimmen, benützen wir das Iterationsverfahren von E. Picard, wie es in [3] für partielle Differentialgleichungen erwähnt ist.

Satz 1. *Betrachten wir die partielle Differentialgleichung*

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2} = g(t, x), \tag{9}$$

deren rechte Seite eine, in dem abgeschlossenen Gebiete D: $0 \leqq x \leqq L$, $0 \leqq t \leqq T$, stetige Funktion ist, dann gibt es genau eine Lösung der Anfangswertaufgabe (9), (7), (8), *mit den Voraussetzungen* (3), (4), (5), (6), *die in dem Gebiete D definiert ist und die in der Form*

$$\begin{aligned} u(t, x) = {} & \varphi_0(t) + \psi_0(x) - \psi_0(0) + t[\psi_1(x) - \psi_1(0)] + x[\varphi_1(t) - \varphi_1(0)] - \\ & - tx\varphi_1'(0) + \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} g(t_2, x_2)\, dx_2 \end{aligned} \tag{10}$$

geschrieben werden kann.

Infolge der Gleichung (9) gilt für jeden beliebigen Punkt (t, x), der innerhalb oder an der Grenze des Gebiets D liegt, folgende Beziehung

$$\int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^x \int_0^{x_1} \frac{\partial^4 u(t_2, x_2)}{\partial x_2^2 \partial t_2^2}\, dx_2\, dx_1\, dt_2\, dt_1 = \int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^x \int_0^{x_1} g(t_2, x_2)\, dx_2\, dx_1\, dt_2\, dt_1. \tag{11}$$

Die linke Seite der Beziehung (11) ist:

$$\begin{aligned} & u(t, x) - u(0, x) - u(t, 0) + u(0, 0) - t\left[\frac{\partial u(0, x)}{\partial t} - \frac{\partial u(0, 0)}{\partial t}\right] - \\ & - x\left[\frac{\partial u(t, 0)}{\partial x} - \frac{\partial u(0, 0)}{\partial x}\right] + tx\frac{\partial^2 u(0, 0)}{\partial x\partial t} \end{aligned}$$

Sie ist mit den Anfangsbedingungen (7), (8) eindeutig gegeben und hat die Form

$$u(t, x) - \varphi_0(t) - \psi_0(x) + \psi_0(0) - t[\psi_1(x) - \psi_1(0)] - x[\varphi_1(t) - \varphi_1(0)] + tx\,\varphi_1'(0),$$

woraus die Behauptung (10) folgt.

Wir schreiben nun die Differentialgleichung (2) über in

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} = \lambda \left\{ A(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\} + g(t, x), \tag{12}$$

wo λ ein beliebiger Parameter ist, und suchen die Potenzreihe im Parameter λ:

$$u(t, x) = u_0(t, x) + \lambda u_1(t, x) + \lambda^2 u_2(t, x) + \ldots + \lambda^n u_n(t, x) + \ldots \tag{13}$$

die formell die Anfangswertaufgabe (12), (7), (8) mit den Bedingungen (3), (4), (5), (6) lösen soll.

Wenn wir in (12) $\lambda = 0$ einsetzen, erhalten wir (9), so dass wir für die Funktion $u_0(t, x)$ die (10) wählen können. So gewählte Funktion $u_0(t, x)$ erfüllt die Anfangsbedingungen (7), (8).

Die weiteren Koeffizienten $u_1(t, x)$, $u_2(t, x)$, $\ldots$ $u_n(t, x)$, $\ldots$ der Potenzreihe (13) sollen folgenden Randbedingungen genügen:

$$\begin{aligned} &u_i(0, x) = 0; \quad \frac{\partial u_i(0, x)}{\partial t} = 0; \quad x \in \langle 0, L \rangle, \quad i = 1, 2, 3, \ldots \\ &u_i(t, 0) = 0; \quad \frac{\partial u_i(t, 0)}{\partial x} = 0; \quad t \in \langle 0, T \rangle, \quad i = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned} \tag{14}$$

Wenn wir die Reihe (13) in die Differentialgleichung (12) einführen und die Koeffizienten von λ^n unter Berücksichtigung von (14) vergleichen, erhalten wir die Beziehung

$$\begin{aligned} u_n(t, x) = \int_0^t \mathrm{d}t_1 \int_0^{t_1} \mathrm{d}t_2 \int_0^x \mathrm{d}x_1 \int_0^{x_1} \Big\{ A(t_2, x_2) \frac{\partial^2 u_{n-1}(t_2, x_2)}{\partial x_2^2} + \\ + B(t_2, x_2) \frac{\partial^2 u_{n-1}(t_2, x_2)}{\partial t_2^2} \Big\} \mathrm{d}x_2 . \end{aligned} \tag{15}$$

Wir führen nunmehr $\lambda = 1$ in die Reihe (13) ein und beweisen, dass diese Reihe mit den Koeffizienten (15) in dem abgeschlossenen Gebiete D gleichmässig konvergiert.

Aus den Voraussetzungen über die Funktionen $g(t, x)$, $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$ folgt, dass $u_0(t, x)$, $\dfrac{\partial^2 u_0(t, x)}{\partial t^2}$, $\dfrac{\partial^2 u_0(t, x)}{\partial x^2}$ in dem Bereiche D beschränkte Funktionen sind.

Es seien

$$|\, u_0(t, x) \,| < H_1; \quad \left| \frac{\partial^2 u_0(t, x)}{\partial x^2} \right| < H_2; \quad \left| \frac{\partial^2 u_0(t, x)}{\partial t^2} \right| < H_3$$

und

$$|\, A(t, x) \,| < M_1, \quad |\, B(t, x) \,| < M_2$$

für $(t, x) \in D$.

Wenn wir

$$H = \max(H_1, H_2, H_3), \quad M = \max(M_1, M_2).$$

bezeichnen, so gelten für $(t, x) \in D$ folgende Beziehungen

$$|u_1(t, x)| < 2MHx^2t^2; \quad \left|\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\right| < 2MHx^2; \quad \left|\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right| < 2MHt^2,$$

oder auch

$$|u_1(t, x)| < 8MH\frac{(t+x)^4}{4!}; \quad \left|\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\right| < 8MH\frac{(t+x)^2}{2!}; \quad \left|\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right| < 8MH\frac{(t+x)^2}{2!}$$

Bezeichnen wir $2M = N$, dann gelten allgemein für die Funktion $u_n(t, x)$ die Formeln

$$(16) \qquad |u_n(t, x)| < 4HN^n\frac{(t+x)^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

$$(17) \qquad \left|\frac{\partial^2 u_n(t, x)}{\partial x^2}\right| < 4HN^n\frac{(t+x)^{2n}}{(2n)!}; \quad \left|\frac{\partial^2 u_n(t, x)}{\partial t^2}\right| < 4HN^n\frac{(t+x)^{2n}}{(2n)!}$$

Da die Reihen

$$4H\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} N^n\frac{(t+x)^{2n+2}}{(2n+2)!}\right\}; \qquad 4H\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} N^n\frac{(t+x)^{2n}}{(2n)!}\right\}$$

n dem Bereiche D konvergieren, konvergieren gleichmässig in dem abgeschlossenen Gebiete D auch die Reihen

$$(18) \qquad \text{a)} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t, x); \quad \text{b)} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial^2 u_n(t, x)}{\partial t^2}; \quad \text{c)} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial^2 u_n(t, x)}{\partial x^2},$$

o dass die Funktion $u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t, x)$ in diesem Bereiche regulär ist, und die Lösung der Anfangswertaufgabe (2), (7), (8) darstellt. Unter gegebenen Voraussetzungen ist es die einzige Lösung des betrachteten Problems.

Wir erwägen nunmehr den Sonderfall, für welchen folgende Beziehungen gelten

$$(19) \qquad \begin{gathered} g(t, x) \equiv 0, \quad A(t, x) = -\frac{c^2}{a^2}, \quad B(t, x) = \frac{1}{a^2} \\ \psi_0(x) \equiv 0, \quad \varphi_0(t) \equiv 0, \quad \psi_1(x) = f(x), \quad \varphi_1(t) = h(t), \end{gathered}$$

in deren $a^2 \neq 0$, c^2 gegebene Konstanten sind, die Funktion $f(x)$ in dem abgeschlossenen Intervalle $\langle 0, L\rangle$ definiert ist, $h(t)$ in dem abgeschlossenen Intervalle $\langle 0, T\rangle$ gegeben ist, beide der Klasse C^2 gehören und folgende Beziehungen erfüllen

$$(20) \qquad f(0) = h(0) = 0; \; h'(0) = f'(0)$$

Die Anfangswertaufgabe hat dann die Form

$$(21) \qquad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{c^2}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$
(22)\qquad \begin{aligned} &u(0, x) = 0, \quad \frac{\partial u(0, x)}{\partial t} = f(x), \quad x \in \langle 0, L \rangle, \\ &u(t, 0) = 0; \quad \frac{\partial u(t, 0)}{\partial x} = h(t), \quad t \in \langle 0, T \rangle. \end{aligned}
$$

Sie erfüllt die Voraussetzungen der vorgehenden Absätze, so dass wir ihre Ergebnisse benützen können.

Die erste Annäherung $u_0(t, x)$ hat die Form:

$$
u_0(t, x) = tf(x) + xh(t) - txf'(0), \tag{23}
$$

und aus der Formel

$$
(24)\quad u_n(t, x) = \int_0^t \mathrm{d}t_1 \int_0^{t_1} \mathrm{d}t_2 \int_0^x \mathrm{d}x_1 \int_0^{x_1} \left\{ \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_{n-1}(t_2, x_2)}{\partial t_2^2} - \frac{c^2}{a^2} \frac{\partial^2 u_{n-1}(t_2, x_2)}{\partial x_2^2} \right\} \mathrm{d}x_2
$$

bekommen wir die Beziehungen

$$
(25)\quad u_1(t, x) = \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{x^3}{3!} h(t) - c^2 \frac{t^3}{3!} f(x) + \left[- \frac{x^3 t}{3!} + c^2 \frac{t^3 x}{3!} \right] f'(0) \right\},
$$

$$
u_2(t, x) = \frac{1}{a^4} \left\{ \frac{x^5}{5!} h(t) + c^4 \frac{t^5}{5!} f(x) + \left[- \frac{x^5 t}{5!} + 2c^2 \frac{t^3 x^3}{3!\,3!} - c^4 \frac{x t^5}{5!} \right] f'(0) - \right.
$$

$$
(26)\quad \left. - c^2 \frac{x^3}{3!} \int_0^t \mathrm{d}t_1 \int_0^{t_1} h(t_2)\, \mathrm{d}t_2 - c^2 \frac{t^3}{3!} \int_0^x \mathrm{d}x_1 \int_0^{x_1} f(x_2)\, \mathrm{d}x_2 \right\},
$$

usw.

Wenn wir in die Reihe (18a) die Ausdrücke (23), (25), (26) und weitere einführen, erhalten wir die Lösung der Anfangswertaufgabe (21), (22) in der Form

$$
u(t, x) = ah(t) \sin \mathrm{h} \frac{x}{a} + \frac{a}{c} f(x) \sin \frac{ct}{a} -
$$

$$
- f'(0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k c^{2k} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \frac{x^{2n-2k+1}}{(2n-2k+1)!} +
$$

$$
+ \frac{a}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{2n}} \int_{2n} f(x)\, \mathrm{d}x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \binom{n+k-1}{n} \left(\frac{ct}{a} \right)^{2k+1} +
$$

$$
+ a \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{c}{a} \right)^{2n} \int_{2n} h(t)\, \mathrm{d}t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \binom{n+k-1}{n} \left(\frac{x}{a} \right)^{2k+1},
$$

wo wir die Bezeichnung

$$
\int_{2n} f(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^x \mathrm{d}x_1 \int_0^{x_1} \mathrm{d}x_2 \int_0^{x_2} \mathrm{d}x_3 \ldots \int_0^{x_{2n-1}} f(x_{2n})\, \mathrm{d}x_{2n},
$$

$$\int\limits_{2n} h(t)\, \mathrm{d}t = \int\limits_0^t \mathrm{d}t_1 \int\limits_0^{t_1} \mathrm{d}t_2 \int\limits_0^{t_2} \mathrm{d}t_3 \ldots \int\limits_0^{t_{2n-1}} h(t_{2n})\, \mathrm{d}t_{2n},$$

benützt haben.

LÖSUNG FÜR GEWISSE RANDBEDINGUNGEN

Wir betrachten zunächst die Lösung der partiellen Differentialgleichung (2) die die Anfangsbedingungen

$$u(0, x) = \varphi_1(x); \qquad \frac{\partial u(0, x)}{\partial t} = \varphi_2(x), \qquad x \in \langle 0, L\rangle \tag{27}$$

und die Randbedingungen

$$u(t, 0) = \psi_1(t), \qquad \frac{\partial u(t, L)}{\partial x} = \psi_2(t), \qquad t \in \langle 0, T\rangle \tag{28}$$

erfüllt, wobei die Funktionen $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ in dem Intervalle $\langle 0, L\rangle$ und die Funktionen $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ in dem Intervalle $\langle 0, T\rangle$ der Klasse C^2 gehören und die Beziehungen

$$\begin{aligned} \varphi_1(0) &= \psi_1(0); \qquad & \varphi_2(0) &= \psi_1'(0); \\ \varphi_1'(L) &= \psi_2(0); & \varphi_2'(L) &= \psi_2'(0) \end{aligned} \tag{29}$$

erfüllen.

Das Iterationsverfahren, das wir in den vorgehenden Absätzen benützt haben, gibt für die Funktion $u_0(t, x)$ die Formel

$$\begin{aligned} u_0(t, x) = {} & \varphi_1(x) - \varphi_1(0) + \psi_1(t) + t[\varphi_2(x) - \varphi_2(0)] + x[\psi_2(t) - \psi_2(0)] - \\ & - tx\varphi_2'(L) + \int\limits_0^t \mathrm{d}t_1 \int\limits_0^{t_1} \mathrm{d}t_2 \int\limits_0^x \mathrm{d}x_1 \int\limits_L^{x_1} g(t_2, x_2)\, \mathrm{d}x_2 \end{aligned} \tag{30}$$

und für die Funktionen $u_n(t, x)$ die Formel

$$\begin{aligned} u_n(t, x) = {} & \int\limits_0^t \mathrm{d}t_1 \int\limits_0^{t_1} \mathrm{d}t_2 \int\limits_0^x \mathrm{d}x_1 \int\limits_L^{x_1} \Big\{ A(t_2, x_2) \frac{\partial^2 u_{n-1}(t_2, x_2)}{\partial x_2^2} + \\ & + B(t_2, x_2) \frac{\partial^2 u_{n-1}(t_2, x_2)}{\partial t_2^2} \Big\} \mathrm{d}x_2, \end{aligned} \tag{31}$$

wenn wir für die Funktionen $u_n(t, x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ die Anfangsbedingungen (27) und die Randbedingungen (28) homogen annehmen.

Analog wie in den vorgehenden Absätzen erhalten wir, dass die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(t, x)$ in dem abgeschlossenen Gebiete D gleichmässig konvergiert und dass ihre Summe eine Lösung der Randwertaufgabe (2), (27), (28) darstellt.

Wir nehmen nunmehr an, dass folgende Beziehungen gelten:

$$g(t, x) \equiv 0; \quad A(t, x) = -\frac{c^2}{a^2}, \quad B(t, x) = \frac{1}{a^2}; \tag{32}$$

$$\varphi_1(x) \equiv 0; \quad \psi_1(t) \equiv 0; \quad \psi_2(t) \equiv 0; \quad \varphi_2(x) = f(x),$$

so dass die Randwertaufgabe (2), (27), (28) die Form

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{c^2}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{33}$$

$$u(0, x) = 0; \quad \frac{\partial u(0, x)}{\partial t} = f(x); \quad x \in \langle 0, L \rangle \tag{34}$$

$$u(t, 0) = 0; \quad \frac{\partial u(t, L)}{\partial x} = 0; \quad t \in \langle 0, T \rangle \tag{35}$$

erhält, wobei c^2, $a^2 \neq 0$ gegebene Konstanten sind und die Funktion $f(x)$ in dem Intervalle $\langle 0, L \rangle$ definiert ist, der Klasse C^2 gehört und die Beziehung $f(0) = f'(L) = 0$ erfüllt.

Die erste Annäherung hat die Form

$$u_0(t, x) = tf(x)$$

und aus der Formel (31) erhalten wir die Beziehungen

$$u_1(t, x) = -\frac{c^2}{a^2} \frac{t^3}{3!} f(x)$$

$$u_2(t, x) = \frac{c^4}{a^4} \frac{t^5}{5!} f(x) - \frac{c^2}{a^4} \frac{t^3}{3!} \int_0^x \mathrm{d}x_1 \int_L^{x_1} f(x_2)\, \mathrm{d}x_2$$

$$u_3(t, x) = -\frac{c^6}{a^6} \frac{t^7}{7!} f(x) + \frac{2c^4}{a^6} \frac{t^5}{5!} \int_0^x \mathrm{d}x_1 \int_L^{x_1} f(x_2)\, \mathrm{d}x_2 -$$

$$- \frac{c^2}{a^6} \frac{t^3}{3!} \int_0^x \mathrm{d}x_1 \int_L^{x_1} \mathrm{d}x_2 \int_0^{x_2} \mathrm{d}x_3 \int_L^{x_3} f(x_4)\, \mathrm{d}x_4,$$

usw.

Wenn wir diese Beziehungen in die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t, x)$ einführen, bekommen wir die Lösung der Randwertaufgabe (33), (34), (35) in der Form

$$u(t, x) = \frac{a}{c} f(x) \sin \frac{ct}{a} + \tag{36}$$

$$+ \frac{a}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{2n}} \int_{2n} f(x)\, \mathrm{d}x \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \binom{n+k-1}{n} \left(\frac{ct}{a} \right)^{2k+1} \right]$$

wo wir die Bezeichnung

$$\int\limits_{2n} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^x \mathrm{d}x_1 \int\limits_L^{x_1} \mathrm{d}x_2 \int\limits_0^{x_2} \mathrm{d}x_3 \int\limits_L^{x_3} \mathrm{d}x_4 \ldots \int\limits_0^{x_{2n-1}} \mathrm{d}x_{2n-2} \int\limits_L^{x_{2n-1}} f(x_{2n})\,\mathrm{d}x_{2n}$$

benützt haben.

Schreiben wir nun die Differentialgleichung (33) über in die Form

(37) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2\, \partial t^2} .$$

Zur Bestimmung der Lösung von Randwertaufgabe (37), (34), (35) können wir auch die berühmte Methode, die von Daniel Bernoulli stammt, benützen, und voraussetzen, dass die Lösung in der Form

(38) $$u(t, x) = y(x) \,.\, v(t),$$

geschrieben werden kann.

Führen wir den Produktansatz (38) in die Differentialgleichung (37) ein, so ergibt sich, wenn wir durch die Striche die Ableitungen nach der jeweiligen unabhängigen Veränderlichen kennzeichnen und voraussetzen, dass $a^2v''(t) + c^2v(t) \neq 0$ gilt, die Beziehung

$$\frac{v''(t)}{a^2v''(t) + c^2v(t)} = \frac{y''(x)}{y(x)} .$$

Es folgt, da die linke Seite von x, die rechte von t unabhängig ist, dass beide Seiten einer Konstanten gleich sein müssen. Wenn wir diese mit $-\lambda^2$ bezeichnen, ergeben sich die gewöhnlichen Differentialgleichungen

(39) $$y''(x) + \lambda^2 y(x) = 0,$$

(40) $$v''(t) + \frac{c^2\lambda^2}{1 + a^2\lambda^2} v(t) = 0 .$$

In Verbindung mit den Randbedingungen

(41) $$y(0) = 0, \quad y'(L) = 0$$

stellt die Differentialgleichung (39) die homogene Eigenwertaufgabe von Sturm dar. Man kann leicht zeigen, dass die Konstante λ^2 positiv sein muss, damit die Eigenwertaufgabe untriviale Lösung besitzt.

Diese Lösung erhalten wir nur dann, wenn die Eigenwerte die Werte

(42) $$\lambda_n = \frac{(2n + 1)\pi}{2L} , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

annehmen, und die zugehörigen normierten Eigenfunktionen die Form

(43) $$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \lambda_n x \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

haben. Aus der Theorie der Eigenfunktionen folgt, dass, unter den gegebenen Voraussetzungen über die Funktion $f(x)$, genau ein System von Koeffizienten

(44) $$c_n = \frac{2}{L} \int\limits_0^L f(x) \sin \lambda_n x\,\mathrm{d}x, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

existiert, so dass die Funktion $f(x)$ in dem abgeschlossenen Intervalle $\langle 0, L \rangle$ in die Reihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin \lambda_n x \tag{45}$$

entwickelbar ist, wobei diese Reihe in dem Intervalle $\langle 0, L \rangle$ absolut und gleichmässig konvergiert.

Zu jedem Eigenwert λ_n gehört die Differentialgleichung

$$v''(t) + \frac{c^2 \lambda^2_n}{1 + a^2 \lambda^2_n} v(t) = 0\,,$$

deren allgemeine Lösung die Form

$$v_n(t) = A_n \cos \frac{c\lambda_n t}{\sqrt{1 + a^2 \lambda^2_n}} + B_n \sin \frac{c\lambda_n t}{\sqrt{1 + a^2 \lambda^2_n}}\,,$$

hat. Da, sowohl die Differentialgleichung (37) als auch die Randbedingungen (35) linear und homogen sind, stellt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin \lambda_n x \left[A_n \cos \frac{c\lambda_n t}{\sqrt{1 + a^2 \lambda^2_n}} + B_n \sin \frac{c\lambda_n t}{\sqrt{1 + a^2 \lambda^2_n}} \right]\,, \tag{46}$$

soweit sie und die zugehörigen partiellen Ableitungen in dem abgeschlossenen Gebiete D: $0 \leqq x \leqq L$, $0 \leqq t \leqq T$ gleichmässig konvergieren, eine Partikularlösung der Randwertaufgabe (37), (35) dar.

Wir nehmen an, dass die Reihe die wir durch Differenzieren nach t aus der Reihe (46) bekommen, gleichmässig konvergiert. Dann gelten mit Rücksicht auf die Anfangsbedingungen (34) folgende Beziehungen

$$u(0, x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \lambda_n x = 0, \quad x \in \langle 0, L \rangle \tag{47}$$

$$\frac{\partial u(0, x)}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c\lambda_n}{\sqrt{1 + a^2 \lambda^2_n}} B_n \sin \lambda_n x = f(x), \quad x \in \langle 0, L \rangle \tag{48}$$

Aus der Beziehung (47) folgt, dass $A_n = 0$ gelten muss.

Da die Funktion $f(x)$ nur auf einzige Weise in die Reihe der Eigenfunktionen entwickelbar ist, folgt aus (45) und (48) die Formel

$$B_n = \frac{2 \,.\, \sqrt{1 + a^2 \lambda^2_n}}{L c \lambda_n} \int_0^L f(x) \sin \lambda_n x \,\mathrm{d}x, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{49}$$

Weil die Reihe (45) in dem Intervalle $\langle 0, L \rangle$ gleichmässig konvergiert, die Funktion $\sin \frac{c\lambda_n t}{\sqrt{1 + a^2 \lambda^2_n}}$ und der Ausdruck $\frac{\sqrt{1 + a^2 \lambda^2_n}}{c\lambda_n}$ beschränkt sind, konvergiert auch die Reihe

$$u(t, x) = \frac{2}{L} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{1 + a^2 \lambda^2_n}}{c\lambda_n} \sin \lambda_n x \sin \frac{c\lambda_n t}{\sqrt{1 + a^2 \lambda^2_n}} \int_0^L f(\xi) \sin \lambda_n \xi \,\mathrm{d}\xi \tag{50}$$

gleichmässig in dem abgeschlossenen Gebiete D: $0 \leqq x \leqq L$; $0 \leqq t \leqq T$, und bietet eine partikuläre Lösung der Randwertaufgabe (37), (34), (35). Wenn wir die Bezeichnung (44) benützen, können wir diese Lösung in der Form

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{\sqrt{1 + a^2\lambda^2{}_n}}{c\lambda_n} \sin \lambda_n x \sin \frac{c\lambda_n t}{\sqrt{1 + a^2\lambda^2{}_n}} \tag{51}$$

schreiben. Wenn wir die Reihenentwicklung (45) in die Lösung (36) einführen, erhalten wir eine partikuläre Lösung der betrachteten Randwertaufgabe in der Form

$$u(t, x) = \frac{a}{c} \sin \frac{ct}{a} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sin \lambda_k x + \tag{52}$$
$$+ \frac{a}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^{2n}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda^{2n}} \sin \lambda_k x \right) \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \binom{n+k-1}{n} \left(\frac{ct}{a} \right)^{2k+1} \right\}.$$

Wir nehmen nun an, dass die Differentialgleichung (2) die Form

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\, \partial t^2} = A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{53}$$

hat, wobei $A(x)$ und $B(x)$ der Klasse C^0 in dem abgeschlossenen Intervalle $\langle 0, L \rangle$ gehören, und dass die Anfangs- und Randbedingungen sich in der Form

$$u(0, x) = 0, \quad \frac{\partial u(0, x)}{\partial t} = f(x), \quad x \in \langle 0, L \rangle \tag{54}$$

$$u(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial^3 u(t, b)}{\partial x\, \partial t^2} - A(b) \frac{\partial u(t, b)}{\partial x} = h(t), \quad t \in \langle 0, T \rangle \tag{55}$$

schreiben können, wobei die Funktionen $f(x)$ und $h(t)$ in den zugehörigen Intervallen der Klasse C^2 gehören, dass die Beziehung $f(0) = 0$ gilt und für die Konstante b entweder $b = 0$ oder $b = L$ gilt.

Wenn wir das Iterationsverfahren, das wir in dem ersten Teil benützt haben, anwenden, erhalten wir, dass die erste Annäherung die Form

$$u_0(t, x) = tf(x) + x\varphi(t) - tx\varphi'(0) \tag{56}$$

annimmt, wobei die Funktion $\varphi(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\varphi''(t) - A(b)\varphi(t) = h(t), \tag{57}$$

ist, die den Anfangsbedingungen $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = f'(b)$ genügt.

Für die Funktionen $u_n(t, x)$ bekommen wir die Formel

$$u_n(t, x) = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^x dx_1 \int_b^{x_1} \left\{ A(x_2) \frac{\partial^2 u_{n-1}(t_2, x_2)}{\partial x_2^2} + \right. \tag{58}$$
$$\left. + B(x_2) \frac{\partial^2 u_{n-1}(t_2, x_2)}{\partial t_2^2} \right\} dx_2.$$

Wir können leicht zeigen, dass die Reihe $u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t, x)$ in dem abgeschlossenen Gebiete D: $0 \leqq x \leqq L$, $0 \leqq t \leqq T$ gleichmässig konvergiert, so dass sie die Partikularlösung der Randwertaufgabe (53), (54), (55) darstellt.

Wenn wir nunmehr den Sonderfall: die Differentialgleichung (33) und die Bedingungen (54), (55), wobei $A(b) = -\frac{c^2}{a^2}$ und $b = L$ angenommen ist, betrachten, erhalten wir für die Funktionen $u_n(t, x)$ die Beziehungen

$$u_0(t, x) = tf(x) + x\varphi(t) - txf'(L)$$

$$u_1(t, x) = -\frac{c^2}{a^2}\frac{t^3}{3!}f(x) + \frac{1}{a^2}\left(\frac{x^3}{3!} - H_2 x\right)\varphi(t) - \frac{1}{a^2}f'(L)\left[-c^2\frac{t^3}{3!}x + \right.$$

$$\left. + \frac{x^3}{3!}t - H_2 tx\right],$$

(59)

$$u_2(t, x) = \frac{c^4}{a^4}\frac{t^5}{5!}f(x) - \frac{c^2}{a^4}\frac{t^3}{3!}\int_0^x\int_L^{x_1} f(x_2)\,dx_2\,dx_1 + \frac{1}{a^4}\left(\frac{x^5}{5!} - H_2\frac{x^3}{3!} - \right.$$

$$\left. - H_4 x\right)\varphi(t) - \frac{c^2}{a^4}\left(\frac{x^3}{3!} - H_2 x\right)\int_0^t\int_0^{t_1}\varphi(t_2)\,dt_2\,dt_1 -$$

$$-\frac{1}{a^4}f'(L)\left[c^4\frac{t^5}{5!}x - 2c^2\frac{t^3}{3!}\left(\frac{x^3}{3!} - H_2 x\right) + t\left(\frac{x^5}{5!} - H_2\frac{x^3}{3!} - H_4 x\right)\right],$$

usw.,
wobei die Funktion $\varphi(t)$ die Lösung der Differentialgleichung

$$\varphi''(t) + \frac{c^2}{a^2}\varphi(t) = h(t) \tag{60}$$

mit den Anfangsbedingungen $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = f'(L)$ darstellt, und $H_2 = \frac{L^2}{2!}$, $H_4 = \frac{L^4}{4!} - H_2\frac{L^2}{2!}$ ist.

Wenn wir so gewonnene Funktionen in die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t, x)$ einführen, erhalten wir die Lösung der betrachteten Randwertaufgabe in der Form:

(61)

$$u(t, x) = \frac{a}{c}f(x)\sin\frac{ct}{a} + a\varphi(t)\sinh\frac{x}{a} - \varphi(t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^{2n}}\left\{\sum_{k=1}^{n} H_{2k}\frac{x^{2n-2k+1}}{(2n-2k+1)!}\right\} +$$

$$+ \frac{a}{c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^{2n}}\int_{2n} f(x)\,dx\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\binom{n+k-1}{n}\left(\frac{ct}{a}\right)^{2k+1}\right\} +$$

$$+ a\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{c}{a}\right)^{2n}\int_{2n}\varphi(t)\,dt\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}\binom{n+k-1}{n}\left(\frac{x}{a}\right)^{2k+1}\right\} -$$

$$
-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{c}{a}\right)^{2n}\int_{2n}\varphi(t)\,\mathrm{d}t\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a^{2k}}\binom{n+k-1}{n}\left[\sum_{i=1}^{k}H_{2i}\frac{x^{2k-2i+1}}{(2k-2i+1)!}\right]\right\}-
$$

$$
-f'(L)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a^{2n}}\left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}c^{2k}\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\frac{x^{2n-2k+1}}{(2n-2k+1)!}\right\}-
$$

$$
-f'(L)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^{2n}}\left\{\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}c^{2n-2k}\frac{t^{2n-2k+1}}{(2n-2k+1)!}\left[\sum_{i=1}^{k}H_{2i}\frac{x^{2k-2i+1}}{(2k-2i+1)!}\right]\right\},
$$

wobei wir folgende Bezeichnungen benützt haben:

$$
H_0=0,\ H_2=\frac{L}{2!};\qquad H_{2n}=\frac{L^{2n}}{(2n)!}-\sum_{k=1}^{n-1}H_{2k}\frac{L^{2n-2k}}{(2n-2k)!},\qquad n=2,3,4,\ldots
$$

$$
\int_{2n}\varphi(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^t\int_0^{t_1}\ldots\int_0^{t_{2n-1}}\varphi(t_{2n})\,\mathrm{d}t_{2n}\,\mathrm{d}t_{2n-1}\ldots\mathrm{d}t_2\,\mathrm{d}t_1,\qquad n=1,2,3,\ldots
$$

$$
\int_{2n}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^x\int_L^{x_1}\ldots\int_0^{x_{2n-2}}\int_L^{x_{2n-1}}f(x_{2n})\,\mathrm{d}x_{2n}\,\mathrm{d}x_{2n-1}\ldots\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1,\qquad n=1,2,3,\ldots
$$

Wir nehmen nun an, dass die Randbedingungen (55) homogen sind, so dass die Funktion $h(t)$ gleich Null ist. Die Differentialgleichung (60) hat die Form

$$
\varphi''(t)+\frac{c^2}{a^2}\varphi(t)=0,
$$

und die Lösung, die die Anfangsbedingungen $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)=f'(L)$ erfüllt, hat die Form

$$
\varphi(t)=\frac{a}{c}f'(L)\sin\frac{c}{a}t. \tag{62}
$$

In dieser Lösung ist entweder $f'(L)=0$, oder $f'(L)\neq 0$. Wenn wir annehmen, dass $f'(L)=0$ gilt, ist $\varphi(t)\equiv 0$, und die Lösung (61) der Differentialgleichung (33) mit den Randbedingungen (55) stimmt mit der Lösung (36) überrein.

Wenn wir annehmen, dass $f'(L)\neq 0$ ist, erhalten wir die Lösung in der Form

$$
u(t,x)=\frac{a}{c}f(x)\sin\frac{ct}{a}+\frac{a^2}{c}f'(L)\sin\frac{ct}{a}\sinh\frac{x}{a}+
$$

$$
+\frac{a}{c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^{2n}}\int_{2n}f(x)\,\mathrm{d}x\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\binom{n+k-1}{n}\left(\frac{ct}{a}\right)^{2k+1}\right\}+
$$

$$
+\frac{a^2}{c}f'(L)\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sin\frac{ct}{a}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k-1)!}\left(\frac{ct}{a}\right)^{2k-1}\right\}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}\binom{n+k-1}{n}\left(\frac{x}{a}\right)^{2k+1}\right\}-
$$

$$
-\frac{a}{c}f'(L)\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sin\frac{ct}{a}+\right.
$$

$$
\left.+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(}{(2k-1)!}\left(\frac{ct}{a}\right)^{2k-1}\right\}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a^{2k}}\binom{n+k-1}{n}\left[\sum_{i=1}^{k}H_{2i}\frac{x^{2k-2i+1}}{(2k-2i+1)!}\right]\right\}-
$$

$$
-\frac{a}{c}f'(L)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^{2n}}\left\{\sum_{k=1}^{n}H_{2k}\frac{x^{2n-2k+1}}{(2n-2k+1)!}\right\}-
$$

$$-f'(L)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a^{2n}}\left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}c^{2k}\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\frac{x^{2n-2k+1}}{(2n-2k+1)!}\right\}-$$

$$-f'(L)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^{2n}}\left\{\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}c^{2n-2k}\frac{t^{2n-2k+1}}{(2n-2k+1)!}\left[\sum_{i=1}^{k}H_{2i}\frac{x^{2k-2i+1}}{(2k-2i+1)!}\right]\right\}.$$

Wenn wir für die Lösung der Randwertaufgabe (33), (54), (55), mit den Voraussetzungen $h(t) = 0$, $A(b) = -\frac{c^2}{a^2}$, $b = L$, die Methode von Bernoulli benützen, erhalten dieselbe Lösung wie für die Randbedingungen (35), so dass wir sagen können, dass bei dieser Methode die durchgeführte Veränderung in den Randbedingungen keinen Einfluss an die Lösung hat. Nur wenn wir das Iterationsverfahren benützen, erhalten wir für die veränderten Randbedingungen eine neue Lösung. In dieser Lösung ist die Funktion $\varphi(t)$, die die Differentialgleichung $\varphi''(t) + \frac{c^2}{a^2}\varphi(t) = 0$ erfüllen muss, enthalten, wogegen in der Methode von Bernoulli für die Funktion $v(t)$ die Beziehung $v''(t) + \frac{c^2}{a^2}v(t) \neq 0$ gelten muss.

LITERATUR

[1] Love A. E.: *Mathematical Theory of elasticity, 1953.*
[2] Goursat E.: *Lecons sur l'integration des équations aux derivées partielles de second ordre,* Tom II, 1926.
[3] Goursat E.: *Cours d'Analyse Mathématique,* Tom III, 1923.

V. Radochová

Mathematisches Institut der ČSAV
Mendlovo nám. 1
Brno, Tschechoslowakei