Archivum Mathematicum

Václav Kudláček

Lineare Erweiterungen der teilweisen Anordnung in Ringen

Archivum Mathematicum, Vol. 8 (1972), No. 1, 35--44

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104756

ARCH. MATH. 1, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS,
VIII: 35—44, 1972

LINEARE ERWEITERUNGEN DER TEILWEISEN ANORDNUNG IN RINGEN

VÁCLAV KUDLÁČEK

(Eingegangen am 13. September 1971)

In dieser Arbeit wollen wir Erweiterungen der teilweise geordneten Ringe betrachten. Das bedeutet, wir wollen solche lineare Anordnungen der teilweise geordneten Ringe suchen, welche die Eigenschaft haben, dass jedes positive Element in der teilweisen Anordnung auch in der linearen Anordnung positiv ist. Einige Resultate sind Verallgemeinerungen der Ergebnisse, welche für nicht geordnete Ringe abgeleitet wurden. Weitere Resultate nützen den Begriff der subdirekten Summe aus. Speziell wird die Aufmerksamkeit den teilweise geordneten Ringen ohne Nullteiler gewidmet.

Im ersten Abschnitt werden die Grundbegriffe der Theorie der teilweise geordneten Ringe analog zur Theorie der teilweise geordneten Gruppen definiert. Im zweiten Abschnitt werden einige Ergebnisse über verschiedene Arten von Abbildungen der teilweise geordneten Ringen hergeleitet, die auf meiner Arbeit (5) basieren. Im dritten Abschnitt werden die eigenen Ergebnisse über die Erweiterungen der teilweisen Anordnung in Ringen bewiesen.

1.1 Der teilweise geordnete Ring.

Wir nennen einen Ring R teilweise geordnet, wenn eine Relation der teilweisen Anordnung ($\leqq$) unter ihren Elementen definiert wird, welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

(*1*) *Wenn $a, x, y \in R$, $x \leqq y$, so $a + x \leqq a + y$.*

(2) *Wenn $a, b \in R$, $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, so $a \,.\, b \geqq 0$. Den teilweise geordneten Ring mit der Relation der teilweisen Anordnung $\leqq$ bezeichnet man auch R ($\leqq$).*

Bemerkung: In der Arbeit (1) wird gefordert, dass das Element a aus der Bedingung (1) grösser als das Nullelement sein muss.

1.2. Die positiven Elemente des teilweise geordneten Ringes. *Sei R ($\leqq$) ein teilweise geordneter Ring. Ist $x \in E$ und $x \geqq 0$, dann nennen wir x ein positives Element des Ringes R ($\leqq$). Die Menje aller positiven Elemente bezeichnen wir mit R^+.*

Es gilt also:

$$R^+ = \{x \mid x \in R, x \geqq 0\}.$$

1.3. Lemma: *Die Menge R^+ der positiven Elemente des teilweise geordneten Ringes erfüllt folgende Bedingungen:*

(1) $0 \in R^+$.
(2) Wenn $s \in R^+$, $-a \in R^+$, *so* $a = 0$.
(3) Wenn $a, b \in R^+$, *so* $a + b \in R^+$ *und* $a \,.\, b \in R^+$.

Wenn eine Untermenge P des Ringes R die Bedingungen (1) — (3) erfüllt, so wird eine Anordnung in R durch die Relation (4) bestimmt:
(4) $a - b \in P$ *genau dann, wenn* $a \geqq b$.

1.4 Definition: *Diese Untermenge P werden wir die teilweise Anordnung des Ringes R nennen und statt $R(\leqq)$ werden wir (R, P) schreiben.*
Der Beweis dieses Lemmas ist in der Arbeit (1) ausgeführt.

Bemerkung: Die Menge P der positiven Elemente des teilweise geordneten Ringes (R, P) bildet einen Halbring.

1.5 Linear geordnete Ringe: *Ein teilweise geordneter Ring (R, P) heisst linear geordnet, wenn es gilt:*
(1) Wenn $x \in (R, P)$, *dann* $x \in P$ *oder* $-x \in P$. *In diesem Falle nennen wir die Menge P der positiven Elemente eine lineare Anordnung.*

1.6 Vollständige direkte Summe von teilweise geordneten Ringen. *Sein $\{(R_\alpha, P_\alpha)\}$ ein System von teilweise geordneten Ringen. Wir bezeichnen mit $x(.)$ eine solche Funktion auf der Menge $\{\alpha\}$ aller Indizes α, für welche $x(\alpha) \in R_\alpha$. Die Menge aller diesen Funktionen bildet einen teilweise geordneten Ring $(\mathfrak{R}, \mathfrak{P})$, wenn wir die Operationen (Addition und Multiplikation) folgendermassen definieren:*

$$(x + y)(\alpha) = x(\alpha) + y(\alpha), \quad (x \,.\, y)(\alpha) = x(\alpha) \,.\, y(\alpha);$$

und wenn die teilweise Anordnung $\mathfrak{P}$ so gegeben wird:

$$\mathfrak{P} = \{x(.) \mid x(\alpha) \in P_\alpha \,, \text{ für alle } \alpha\}.$$

Diesen teilweise geordneten Ring nennen wir die vollständige oder komplette direkte Summe von teilweise geordneten Ringen und wir führen die Bezeichnung $(\mathfrak{R}, \mathfrak{P}) = \widetilde{\sum}(R_\alpha, P_\alpha)$ ein.

1.7 Subdirekte Summen von teilweise geordneten Ringen. *Einen Unterring in der kompletten direkten Summe von teilweise geordneten Ringen $\widetilde{\sum}(R_\alpha, P_\alpha)$ nennen wir eine subdirekte Summe dieser teilweise geordneten Ringen, wenn mindestens ein solches Element $x(.) \in \mathfrak{Q}$ zu jedem Element $x_\alpha \in R_\alpha$ mit $x(\alpha) = x_\alpha$ existiert. Die teilweise Anordnung $\mathfrak{A}$ von R wird durch die Anordnung $\mathfrak{P}$ in $\Sigma(R_\alpha, P_\alpha)$ induziert, d.h. $\mathfrak{A} = \mathfrak{Q} \cap \mathfrak{P}$. Die subdirekte Summe von teilweise geordneten Ringen bezeichnen wir mit $(\mathfrak{Q}, \mathfrak{P}) = \sum_s(R_\alpha, P_\alpha)$.*

1.8 Direkte Summe von teilweise geordneten Ringen. *Die Untermenge jener Elemente der vollständigen direkten Summe von teilweise geordneten Ringen $\widetilde{\sum}(R_\alpha, P_\alpha)$, für welche die Bedingung:*

(1) $x(\alpha) = 0$ *für fast alle* α,

gilt, bildet eine subdirekte Summe. Wir nennen sie die direkte Summe von teilweise geordneten Ringen $\{(R_\alpha, P_\alpha)\}$ *und diese Summe bezeichnen wir mit* $\dot{\sum}\,(R_\alpha, P_\alpha)$.

1.9 Bemerkung: Wenn das System der teilweise geordneten Ringe $\{(R_\alpha, P_\alpha)\}$ endlich ist, dann fallen der Begriff der vollständigen direkten Summe und der direkten Summe zusammen. Für beide benützen wir die Bezeichnung:

$$(R_1, P_1) + (R_2, P_2) + \ldots + (R_n, P_n)$$

2.1 o-Homomorphismen von teilweise geordneten Ringen. *f sei eine Abbildung eines teilweise geordneten Ringes* (R_1, P_1) *auf einen teilweise geordneten Ring* (R_2, P_2). *f sei ein Homomorphismus in bezug auf die algebraischen Operationen. Wir nennen eine solche Abbildung f:*

a) einen schwachen o-Homomorphismus, wenn es gilt:

(1) ist $a \in P_1$, *so* $f(a) \in P_2$:

b) einen o-Homomorphismus, wenn die Bedingung (1) und gleichzeitig

(2) ist $a \in P_2$, *so* $f^{-1}(a) \cap P_1 \neq \emptyset$ *gilt;*

c) einen starken o-Homomorphismus, wenn die Bedingung (1) *und gleichzeitig*

(3) wenn $a \in P_2$, $a \neq 0$, *so* $f^{-1}(a) \subset P_1$ *erfüllt ist.*

2.2 Beispiele: a) R_1 sei ein Ring, in dem die triviale Anordnung definiert ist. Es sei (R_2, P_2) ein teilweise geordneter Ring und es existiere eine homomorphe Abbildung f von dem Ring R_1 auf den Ring R_2. Dann ist die Abbildung f von dem teilweise geordneten Ringe (R_1, P_1) (wo $P_1 = \{0\}$) auf den teilweise geordneten Ring (R_2, P_2) ein schwacher o-Homomorfismus.

b) Es sei (R, P) ein teilweise geordneter Ring. Ferner sei (Q, S) ein konvexes Ideal im teilweise geordneten Ringe (R,P) (wobei „konvex" bedeutet: wenn $a, b \in Q$, $x \in R$, $a \leqq x \leqq b$, so $x \in Q$). Den Faktorring R/Q können wir teilweise anordnen: $a + Q \in R/Q$ ist positiv, wenn mindestens ein Element $x \in a + Q$ positiv in (R, P) ist. Die natürliche Abbildung f des teilweise geordneten Ringes (R, P) auf seinen teilweise geordneten Faktorring $(R, P)/(Q, S)$ ist ein o-Homomorphismus.

c) (R, L) sei ein linear geordneter Ring. (Q, S) sei ein konvexes Ideal im linear geordneten Ring (R, L), dann ist die natürliche Abbildung f des einfach geordneten Ringes (R, L) auf seinen einfach geordneten Faktorring $(R, L)/(Q, S)$ ein starker o-Homomorphismus.

2.3 o-Isomorphismen teilweise geordneter Ringe. *f sei eine Abbildung von einem teilweiwe geordneten Ring* (R_1, P_1) *auf einen teilweise geordneten Ring* (R_2, P_2). *f sei ein Isomorphismus in bezug auf die algebraischen Operationen. Wir nennen eine derartige Abbildung f:*

a) einen schwachen o-Isomorphismus, wenn es gilt:

(1) wenn $a \in P_1$, *so* $f(a) \in P_2$;

b) einen o-Isomophismus, wenn die Bedingung (1) und gleichzeitig die Bedingung (2) *gelten, wobei*

(2) $a \in P_1$ *genau dann, wenn* $f(a) \in P_2$.

2.4 Beispiele: a) Die identische Abbildung von einem teilweise geordneten Ring (R, P) auf seine o-Erweiterung*) (R, E) (wobei $P \subset E$) ist ein schwacher o-Isomorphismus.

*) Siehe Abs. 3.1

b) Es existiere ein schwacher o-Isomorphismus f von einem teilweise geordneten Ring (R_1, P_1) auf einen teilweise geordneten Ring $(R_2. P_2)$. Wir definieren eine o-Erweiterung E der teilweisen Anordnung P_1 des Ringes R_1 folgendermassen: $E = \{x \mid x \in R_1, f(x) \in P_2\}$. Es gilt offenbar $P_1 \subset E$ und die Abbildung f von dem teilweise geordneten Ringe (R_1, E) auf den teilweise geordneten Ring (R_2, P_2) ist ein o-Isomorphismus.

2.5 Bemerkung: Die Definitionen 2.1 und 2.3 sind analog zu den Definitionen für teilweise geordnete Gruppen in den Arbeiten (5) und (6) gewählt. Diese Bezeichnungen unterscheiden sich von den Bezeichnungen in den Arbeiten (2) und (3).

2.6 Satz über schwache o-Homomorphismen. *Eine Abbildung f eines teilweise geordneten Ringes (R_1, P_1) auf einen teilweise geordneten Ring (R_2, P_2) ist genau dann ein schwacher o-Homomorphismus mit dem Kern (Q, S), wenn der teilweise geordnete Ring (R_2, P_2) ein schwach o-isomorphes Bild des teilweise geordneten Faktorringes $(R_1, P_1)/(Q, S)$ ist.*

2.7 Satz über o-Homomorphismen. *Eine Abbildung f eines teilweise geordneten Ringes (R_1, P_1) auf einen teilweise geordneten Ring (R_2, P_2) ist genau dann ein o-Homomorphismus mit dem Kern (Q, S), wenn der teilweise geordnere Faktorring $(R_1, P_1)/(Q, S)$ mit dem teilweise geordneten Ring (R_2, P_2) o-isomorph ist.*

2.8 Satz über starke o-Homomorphismen. *Eine Abbildung f eines teilweise geordneten Ringes (R_1, P_1) auf einen teilweise geordneten Ring (R_2, P_2) ist genau dann ein starker o-Homomorphismus mit dem Kern (Q, S), wenn der teilweise geordnete Ring (R_2, P_2) ein o-isomorphes Bild des teilweise geordneten Faktorringes $(R_1, P_1)/(Q, S)$ ist und gleichzeitig gilt:*

(1) *wenn* $a + Q \in ((R_1, P_1)/(Q, S))^+$, $a + Q \neq Q$, so gilt für alle $x \in a + Q : x > 0$.

Definition: *Wenn die Bedingung (1) für einen teilweise geordneten Faktorring erfüllt wird, so nennen wir ihn stark geordnet.*

2.9 Erster Satz über schwache o-Isomorphismen. *f sei eine Abbildung einem teilweise geordneten Ringes (R_1, P_1) auf einen teilweise geordneten Ring (R_2, P_2). Sei (Q_2, S_2) ein konvexes Ideal im teilweise geordneten Ring (R_2,P_2). Dann ist der Unterring $(Q_1, S_1) = f^{-1}[(Q, S)]$ ein konvexes Ideal im teilweise geordneten Ring (R_1, P_1) und der teilweise geordnete Faktorring $(R_1, P_1)/(Q_1, S_1)$ ist ein schwach o-isomorphes Bild des teilweise geordneten Faktorringes $(R_2, P_2)/(Q_2, S_2)$.*

2.10 Zweiter Satz über schwache o-Isomorphismen. *Es sei Q_1 ein konvexes und O_2 ein beliebiges Ideal in einem teilweise geordneten Ring (R, P). Dann ist $Q_1 \cap Q_2$ ein konvexes Ideal im Ideal Q_2 und der teilweise geordnete Faktorring $(Q_1 + Q_2)/Q_1$ ist ein schwach o-isomorphes Bild des teilweise geordneten Faktorringes $Q_2/(Q_1 \cap Q_2)$.*

2.11 Bemerkung: Die Beweise der Sätze 2.6—2.10 sind zum Teil in meiner Arbeit (5) durchgeführt. Die übrigen Sätze beweist man analogerweise.

3.1 o-Erweiterung eines teilweise geordneten Ringes. *Sei R ein Ring in welchem zwei Anordnungen P, Q gegeben sind. Wenn $P \subset Q$ gilt, so nennen wir die teilweise Anordnung Q eine Erweiterung der teilweise Anordnung P und den teilweisen geordneten Ring (R, Q) eine o-Erweiterung des teilweise geordneten Ringes (R, P). Ist die Anordnung Q linear, so heisst auch die Erweiterung linear.* Die Menge aller Anordnungen eines Ringes kann also als teilweise geordnet und zwar bezüglich der mengentheoretischen Inklussion angesehen werden. Es ist offenbar, dass ein linear geordneter Ring (R, L) eine maximale o-Erweiterung des teilweise geordneten Ringes (R, P) darstellt, wenn $P \subset L$. Solch eine lineare o-Erweiterung braucht nicht existieren.

Bemerkung: Eine analoge Definition wird in der Arbeit (2) für die teilweise geordneten Gruppen eingeführt.

3.2 Satz: *Wenn ein teilweise geordneter Ring die Eigenschaft besitzt, dass es zu jedem Element $a \in (R, P)$, $a \neq 0$, eine ganze Zahl n derart gibt, dass $n \cdot a > 0$ ist, dann können wir den teilweise geordneten Ring auf genau eine Weise linear erweitern.*

Beweis: Bezeichnen wir mit S die Menge aller Elemente $a \in (R, P)$, für welche eine natürliche Zahl n gibt, dass $n \cdot a \geqq 0$ gilt. Die Menge S besitzt folgende Eigenschaften:

(1) $0 \in S$.

(2) Aus $a, b \in S$, $a + b = 0$ folgt $a = 0 = b$.
Sei zum Beispiel $a \neq 0$, dann gibt es natürliche Zahlen p, r so dass $p \cdot a > 0$ und $r \cdot b \geqq 0$ gilt. Ferner gilt $p \cdot r \cdot a > 0$, $p \cdot r \cdot b \geqq 0$, Daraus bekommen wir $pr \cdot (a + b) > 0$ und also $a + b \neq 0$. Das ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung $a + b = 0$; also gilt $a = b = 0$.

(3) Es sei $a, b \in S$, dann gibt es natürliche Zahlen p, r, so dass $p \cdot a \geqq 0$, $r \cdot b \geqq 0$ ist. Wir erhalten damit $r \cdot p \cdot a \geqq 0$ und $p \cdot r \cdot b \geqq 0$, woraus $pr \cdot (a + b) \geqq 0$ folgt. Also gilt $(a + b) \in S$. Weiter gilt $p \cdot a \cdot r \cdot b = pr \cdot ab \geqq 0$, also gilt $(a \cdot b) \in S$.

Die Menge S erfüllt die Bedingungen (1) — (3) des Lemmas 1.3, also ist sie eine teilweise Anordnung des Ringes R.

Wir zeigen nun, dass die Menge S eine lineare Anordnung ist. Wenn $x \in R$, $x \notin S$, dann gibt es eine negative ganze Zahl n so dass $n \cdot x > 0$ und also auch $(-n) \cdot (-x) > 0$ ist. Damit erhalten wir $-x \in S$, und die Bedingung (4) des Lemmas 1.3 ist erfüllt; S ist also eine lineare Anordnung.

Die lineare Anordnung S des Ringes R ist offenbar eine Erweiterung der teilweisen Anordnung P des Ringes R, weil $1 \cdot x \geqq 0$ für jedes Element $x \in P$ gilt und also $x \in S$, $P \subset S$.

3.3 Schlichte subdirekte Summen. *Eine subdirekte Summe $(\mathfrak{R}, \mathfrak{P}) = \Sigma_s (R_\alpha, P_\alpha)$ von teilweise geordneten Ringen (R_α, P_α) heisst schlicht, wenn es für ein beliebiges $x(.) \in (\mathfrak{R}, \mathfrak{P})$, $x(.) \neq 0$, $x(\alpha) \neq 0$ für alle α gilt.*

3.4 Satz: *Ein teilweise geordneter Ring (R, P) lässt sich genau dann linear erweitern, wenn es einen schwachen o-Isomorphismus des teilweisen geordneten Ringes (R, P) auf eine schlichte subdirekte Summe $(\mathfrak{R}, \mathfrak{P})$ von linear geordneten Ringen gibt.*

Beweis: a) Der teilweise geordnete Ring (R, P) möge sich linear erweitern lassen. Seine lineare Erweiterung bezeichnen wir mit L. Wenn wir jedem Element $x \in (R, P)$ das Element $x \in (R, L)$ zuordnen, dann ist diese Abbildung ein schwacher o-Isomorphismus. Den linear geordneten Ring (R, L) können wir als eine schlichte subdirekte Summe $(\mathfrak{R}, \mathfrak{P})$ betrachten, die nur eine Komponente (R, L) besitzt.

b) Es möge ein schwacher o-Isomorphismus φ vom teilweise geordneten Ring (R, P) auf eine schlichte subdirekte Summe $(\mathfrak{R}, \mathfrak{P})$ von linear geordnet Ringen $\{(R_\alpha, P_\alpha)\}$ existieren. Wir wählen nun ein festes α und definieren die Abbildung ψ von dem teilweise geordneten Ringe (R, P) auf den linear geordneten Ring (R_α, P_α) folgendermassen: $\psi(x) = \varphi(x)(\alpha)$. Diese Abbildung ist schlicht, weil es gilt: wenn $\psi(x) = \psi(y)$, so $\varphi(x)(\alpha) = \varphi(y)(\alpha)$; auch Grund der Voraussetzung, dass die subdirekte Summe $(\mathfrak{R}, \mathfrak{P})$ schlicht ist, gilt $\varphi(x) = \varphi(y)$; und also $x = y$.

Nun ist — wie man leicht einsieht — die Menge $L = \{x \in R : \psi(x) \in L_\alpha\}$ eine lineare Anordnung des Ringes R und $P \subset L$. Nur zum Beweis der Bedingung (2), Lemma 1.3, sei folgendes bemerkt: Ist $a, —a \in L$, so gilt $\psi(a), \psi(—a) \in L_\alpha$ und $\psi(a) + \psi(—a) = [\varphi(a)](\alpha) + [\varphi(—a)](\alpha) = [\varphi(a) + \varphi(—a)](\alpha) = [\varphi(a — a)](\alpha) = 0$, deshalb $\psi(a) = 0$. Aus der Eineindeutigheit von ψ folgt dann $a = 0$.

3.5 Scharfe Anordnung. Im Weiteren werden wir teilweise geordnete Ringe ohne Nullteiler behandeln. Für diese Ringe gilt die Bedingung:

(1) *Wenn $a > 0$, $b > 0$, so $a \,.\, b > 0$.*

Wir nennen eine teilweise Anordnung, welche die Bedingung (1) erfüllt, eine scharfe teilweise Anordnung und eine Erweiterung, die eine scharfe Anordnung darstellt, heisst eine scharfe Erweiterung.

Das Nullelement gehört nicht zur Menge der scharf positiven Elemente. Offenbar gilt: *Ein scharf linear geordneter Ring hat keine Nullteiler und eine lineare Anordnung eines Ringes ohne Nullteiler ist scharf.*

3.6 Satz: *(R, P) sei ein teilweise geordneter Ring ohne Nullteiler. (I, K) sei ein linear geordnetes Ideal im (R, P), wobei $(I, K) \neq \{0\}$, $K \subset P$. Dann lässt sich (R, P) auf genau eine Weise linear erweitern.*

Beweis: Wir zeigen, dass die Menge $L = \{x \mid x \in R, Kx \subset K\}$ die einzige lineare Erweiterung der teilweisen Anordnung P des Ringes R ist.

Die Bedingung (1), Lemma 1.3, ist sicher erfüllt. Wenn $x \in L \cap —L$ gilt, dann ist $Kx \subset K \cap —K = \{0\}$ und also $x = 0$ und die Bedingung (2) des Lemmas 1.3 ist auch erfüllt. Jetzt zeigen wir, dass die Bedingung (3), Lemma 1.3, gilt. Wenn $x, y \in L$, so $Kx \subset K$, $Ky \subset K$ und es gilt: $K(x + y) = Kx + Ky \subset K + K = K$ und also $x + y \in L$. Ebenso erhalten wir auch $Kxy \subset Ky \subset K$ und damit $xy \in L$.

Offenbar gilt auch $KP \subset K$, damit $P \subset L$ und L ist eine Erweiterung der teilweisen Anordnung P.

Wir zeigen nun $L' = \{x \mid x \in R, xK \subset K\}$. Wenn $x \in L'$, $x \neq 0$, $a \in K$, $a \neq 0$, so $xa \neq 0$, $xa \in K$. Für jedes $b \in K$, $b \neq 0$ gilt $bxa \in K$, $bxa \neq 0$, weil der Ring (R, P) ohne Nullteiler ist. Wenn $x \in L'$, $x \neq 0$, so gilt für jedes $b \in K$, $b \neq 0$ stets $bx \in K$. Wenn $—bx \in K$ gälte, so würde auch für $a \in K$, $a \neq 0$, $—bxa\ K$ gelten und wir erhalten so gleichzeitig $bxa \in K$ und $—bxa \in K$, nach der Bedingung (2), Lemma 1.3, gilt dann $bxa = 0$ und das ist ein Widerspruch, weil der Ring (R, P) ohne Nullteiler ist. Es gilt also $bx \in K$ für alle $b \in K$, $b \neq 0$ und $L' \subset L$. Auf eine analoge Weise können wir auch $L \subset L'$ beweisen. Also ist die Bedingung $Kx \subset K$ äquivalent mit der Bedingung $xK \subset K$.

Es sei jetzt $x \in R$, $x \notin L$, $x \neq 0$. Es gibt ein Element $a \in K$, $a \neq 0$ derart dass $ax \in I$, $ax \in K$; dann gilt aber $—ax = a(—x) \in K$, und für jedes $b \in K$, $b \neq 0$ es gilt $a(—x)\,b \in K$. Nun für jedes $b \in K$ ($b \neq 0$ muss es $(—xb) \in K$ gelten. Wenn es solches $b \in K$ gäbe, dass $(—xb) \in K$, dann für $a \in K$, $a(—x)\,b \notin K$, was ein Widerspruch mit $a(—x)\,b \in K$ ist. Wir haben also $(—x\ )\,K \subset K$. Auf eine analoge Weise können wir zeigen, dass $K(—x) \subset K$ gilt. Also bekommen wir: wenn $x \in R$, $x \neq 0$, $x \in L$, so $—x \in L$ und L ist eine lineare Erweiterung der teilweisen Anordnung P des Ringes R.

Wir zeigen nun, dass die lineare Erweiterung L die einzige ist. L_1 sei eine andere lineare Erweiterung der teilweisen Anordnung P des Ringes R. Weil die einfache Anordnung K im Ideal I maximal ist, bekommen wir $I \cap L_1 = K$ und dann $K \,.\, L_1 \subset \subset L_1 \cap K = K$. Also gilt $L_1 \subset$ L. Aus der Maximalität von L_1 folgt $L \subset L_1$ und so gilt $L = L_1$.

Bemerkung: Ein analoge Satz für ungeordnete Ringe wird in der Arbeit (3) bewiesen.

Satz 3.7: *Ein teilweise geordneter Ring* (R, P) *ohne Nullteiler lässt sich genau dann linear erweitern, wenn keine Summe von Produkten von Null verschiedener Elemente, gleich Null ist, wenn dabei die Produkte in der Summe so gebildet werden, dass ein Element, welches nicht in P liegt in jedem Produkt in einer geraden Anzahl (oder überhaupt nicht) vorkommt.*

Beweis: a) Notwendigkeit: Wenn L eine lineare Erweiterung der teilweisen Anordnung P des Ringes R ohne Nullteiler ist, so ist jedes Produkt, das gemäss der Voraussetzung dieses Satzes gebildet wird, grösser als Null (in bezug auf die Anordnung L) und die Summe solcher Produkte ist sicher von Null verschieden.

b) Mit M_0 bezeichnen wir die Menge aller Elemente des teilweise geordneten Ringes (R, P) ohne Nullteiler, die sich als eine Summe jener Produkte von Null verschiedener Elemente, in denen jedes nichtpositive Element in einer geraden Anzahl oder überhaupt nicht vorkommt, ausdrücken lassen. Es sei P^* die Menge der scharf positiven Elemente, $P^* = \mathrm{Pu}\{0\}$. Offenbar nicht $P^* \subset M_0$.

Nun konstruieren wir zu jedem Unterhalbring H des teilweise geordneten Ringes (R, P), der die Bedingung

$$(1) \qquad H \supset M_0$$

erfüllt, einen Unterhalbring H', der der Bedingung

$$(2) \qquad H' \supset H$$

genügt, folgendermassen: Wir betrachten die Menge aller Produkte von Null verschiedener Elemente, in denen die Elemente, die nicht zu H gehören, in einer geraden Anzahl (oder überhaupt nicht) vorkommen. H' ist der Halbring, der durch diese Produkte erzeugt wird. Offenbar gillt die Bedingung (2), weil jedes Element $\neq 0$ aus dem Halbring H solch ein Produkt ist.

Wir bezeichnen mit G die Menge der Unterhalbringe H, welche die Bedingung (1) erfüllen und für die $0 \in H'$ gilt. Die Menge G ist nicht leer, weil M_0 nach Definition in G liegt, $\{H_\alpha\}$ sei eine durch Inklusion geordnete Kette von Elementen aus G. Es sei $S = \bigcup_\alpha H_\alpha$ und $K = \bigcup_\alpha H'_\alpha$. Weil $0 \in K$ gilt, ist $K = S'$ und $S \in G$. Nach dem ZORNschen Lemma besitzt G mindestens ein maximales Element, welches wir mit M bezeichnen. M ist offenbar ein Unterhalbring im Ring (R, P), für den: $M \cap -M = \emptyset$.

Wir beweisen nun, dass $a \in M \cup -M$ für jedes $a \in (R, P)$, $a \neq 0$, gilt. Wir setzen voraus, dass ein $a \in (R, P)$, $a \neq 0$ so existiert, dass $a \in M \cup -M$ und damit also auch $a \in M$ und $a \in -M$ gilt.

Wir erzeugen einen Unterhalbring $M_1 = \{M, a\}$, für welchen $M \subset M_1$, $M \neq M_1$ offenbar gilt, also $0 \in M'_1$. Mit π_0 bezeichnen wir ein Produkt von Null verschiedener Elemente aus dem Ring (R, P), das die Eigenschaft besitzt, dass jedes nicht in M liegende Faktor in diesem Produkte π_0 in einer geraden Anzahl vorkommt. Es sei π_1 ein Produkt, welches wir erhalten, wenn wir das Element a an eine beliebige Stelle in das Produkt π_0 einschieben, Es ist offenbar, dass der Halbmodul, der durch aller so zu erhaltenen Elemente π_0 und π_1 erzeugt wird, gleich $M'_1(+)$ ist (wobei wir unter $M_1'(+)$ den Halbmodul des Halbringes M_1' in bezug auf seine Addition verstehen).

Weil $0 \in M_1$, so gilt mindestens eine Gleichung in der Form:

$$(3) \qquad \Sigma\, \pi_0 + \Sigma\, \pi_1 = 0,$$

wobei die Summenzeichen die Addition endlich vieler Elemente π_0 bzw. π_1 bedeuten. Die zweite Summe ist nicht leer, weil $\Sigma\pi_0 \in M'$, $0 \in M'$ gilt.

Wir können eine analoge Betrachtung für das Element $-a$ duchführen und wir bekommen die Gleichung

$$(4) \qquad \Sigma\pi_o' - \Sigma\pi_1'' = 0$$

dabei werden die Elemente π_o' und π_1' und die Summen Σ auf analoge Weise wie die entsprechenden Ausdrücke für das Element a definiert.

Jetzt multiplizieren wir die Gleichung (3) mit $\Sigma\pi_o'$ von rechts und die Gleichung (4) mit $-\Sigma\pi_1$ von links. Nach Addition dieser Gleichungen bekommen wir

$$(5) \qquad (\Sigma\pi_0)\,(\Sigma\pi_o') + (\Sigma\pi_1)\,(\Sigma\pi_1') = 0.$$

Jedes Produkt $\pi_0 \,.\, \pi_o'$ ist vom Typus π_0 und auch die Produkte $\pi_1 \,.\, \pi_1'$ sind vom Typus π_0. Also liegt die linke Seite der Gleichung (5) in M und damit ist auch $0 \in$ M', was im Widerspruch zu $0 \in M'$ ist. Also muss $a \in M \cup -M$ für jedes $a \in (R, P)$, $a \neq 0$, gelten.

Also ist M die Menge aller scharf positiven Elemente der linearen Anordnung L des Ringes R, wenn wir $L = M \cup \{0\}$ definieren. Weil $P \subset M \subset L$ gilt, ist L die gesuchte lineare Erweiterung der teilweisen Anordnung P des Ringes R und der linear geordnete Ring (R, L) ist die lineare Erweiterung des teilweise geordneten Ringes (R, P).

Bemerkung: Der Satz 3.7 ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Johnson und der Beweis dieses Satzes wird analog dem Beweise des Satzes von Johnson geführt (4).

3.8 Satz : *Eine subdirekte Summe* $(\mathfrak{R}, \mathfrak{P})$ *von linear geordneten Ringen* (R_α, P_α) *lässt sich genau dann scharf linear erweitern, wenn sie ohne Nullteiler ist.*

Beweis: a) Die Notwendigkeit folgt offenbar aus der Definition der scharfen Anordnung.

b) Es sei die subdirekte Summe $(\mathfrak{R}, \mathfrak{P})$ von einfach geordneten Ringen ohne Nullteiler. Wir setzen voraus, dass sie sich nicht linear erweitern lässt. Das existiert (nach 3.7) eine Summe der Produkte von Null verschiedener Elemente, welche gleich Null ist, z. B.

$$(1) \qquad \sum_{y=1}^{p} x_1^{(y)} \,.\, x_2^{(y)} \,\ldots\, x_{i_y}^{(y)} = 0$$

wobei jedes nichtpositive Element in jedem Produkt der Summe (1) in einer geraden Anzahl (oder überhaupt nicht) vorkommt. Für jedes α gilt

$$(2) \qquad \sum_{y=1}^{n} x_1^{(y)}(\alpha) \,.\, x_2^{(y)}(\alpha) \,.\, \ldots \,.\, x_{i_y}^{(y)}(\alpha) = 0,$$

Jeder Ring (R_α, L_α) ist linear geordnet und deshalb ist jedes Produkt in der Summe (2) grösser als Null. Wenn die Summe gleich Null ist, dann ist jedes Produkt in (2) gleich Null und auch α—Komponente des Elements $s = x_1^{(1)} . x_2^{(1)} . \ldots x_{i_1}^{(1)} . x_1^{(2)} . \ldots x_{i_n}^{(n)}$ ist für alle α gleich Null und damit auch $s = 0$. Das aber bedeutet, dass ein Produkt von Null verschiedener Elemente gleich Null ist, im Wiederspruch zur Voraussetzung, dass $(\mathfrak{R}, \mathfrak{P})$ ein Ring ohne Nullteiler ist. Wir können also die subdirekte Summe $(\mathfrak{R}, \mathfrak{P})$ von linear geordneten Ringen (R_α, L_α) erweitern und diese Erweiterung ist eine scharfe Anordnung, weil die subdirekte Summe $(\mathfrak{R}, \mathfrak{P})$ ohne Nullteiler ist.

3.9 Satz: *Ein teilweise geordneter Ring (R, P) ohne Nullteiler lässt sich genau dann linear erweitern, wenn ein schwacher o-Homomorphismus φ vom teilweise geordneten Ring (R, P) auf eine subdirekte Summe $(\mathfrak{R}, \mathfrak{P})$ von linear geordneten Ringen $\{(R_\alpha, L_\alpha)\}$ mit folgenden Eigenschaften existiert:*

a) *die subdirekte Summe $(\mathfrak{R}, \mathfrak{P})$ ist ohne Nullteiler;*

b) *$\varphi^{-1}(0) = H$ ist ein linear geordnetes Ideal im teilweise geordneten Ring (R, P);*

c) *sei $x \in P \cap H$, $y \in R$, $\varphi(y)(\alpha) > 0$ für ein α, so $xy \in P \cap H$.*

Beweis: a) Der teilweise geordneter Ring (R, P) lasse sich linear erweitern und L sei eine lineare Erweiterung seiner teilweisen Anordnung P, dann ist der linear geordnete Ring (R, L) eine direkte Summe mit einer Komponente, welche die Bedingungen bezüglich der identischen Abbildung φ von R erfüllt.

b) Nach Satz 2.6 ist die subdirekte Summe $(\mathfrak{R}, \mathfrak{P})$ von einfach geordneten Ringen $\{(R_\alpha, L_\alpha)\}$ ein schwach o-isomorphes Bild des teilweise geordneten Faktorringes $(R, \mathrm{P})/H$. Nach Satz 3.8 können wir die subdirekte Summe $(\mathfrak{R}, \mathfrak{P})$ linear geordneten Ringen $\{(R_\alpha, \mathrm{L}_\alpha)\}$ scharf linear erweitern. Diese scharfe lineare Erweiterung bezeichnen wir mit $\mathfrak{Q}$. Wir definieren nun eine lineare Erweiterung $\mathfrak{D}$ des teilweise geordneten Faktorringes $(R, P)/H$ folgendermassen: für eine Klasse $X \in (R, \mathrm{P})/H$ gilt $X \in \mathfrak{D}$ genau dann, wenn $\varphi(X) \in \mathfrak{Q}_0$; dabei ist $\mathfrak{Q}_0 = \mathfrak{Q} \cap \{0\}$. EineErweiterung L der teilweisen Anordnung P des Ringes R wird durch $L = (P \cap H) \cup \bigcup_{H \neq X \in D} X$ definiert.

Offenbar gelten die Bedingungen (1) und (2), Lemma 1.3, für die Menge L. Wir beweisen nun, dass die Bedingung (3), Lemma 1.3, ebenfalls erfüllt ist. Wir müssen drei Fälle für $a, b \in L$ betrachten:

1. wenn $a \in P \cap H$, $b \in P \cap H$, so ist offenbar $a + b \in P \cap H$, $a . b \in P \cap H$ und $a + b \in L$, $a . b \in L$;

2. wenn $a \in P \cap H, b \in X \neq H, X \in \mathfrak{D}$, so ist $a + b \in H + X = X$ und $a + b \in L$. Weiter gilt $\varphi(b)(\alpha) > 0$ für mindestens ein α, sonst ist $\varphi(b) \leqq 0$, und $X \in \mathfrak{D}$; nach der Bedingung c) dieses Satzes gilt $ab \in P \cap H$ und also $ab \in L$;

3. wenn $a \in Y \in \mathfrak{D}$, $Y \neq H$, $b \in X \in \mathfrak{D}$, $X \neq H$, so $X . Y = Z \neq H$, $Z \in \mathfrak{D}$, $a . b \in Z$ und $a . b \in L$. Analog gilt $a + b \in L$.

Offenbar ist die Bedingung (1), Lemma 1.5, erfüllt und L ist eine lineare Erweiterung der teilweisen Anordnung P des Ringes R.

LITERATUR

[1] G. Birkhoff, R. S. Pierce: *Lattices ordered Rings.* Anais da Acad. Brasil. de Ciencias, 28, 1956, 41—69.

[2] L. Fuchs: *On partially ordered groups.* Indag. Math. 28, 1950, 272—278.

[3] G. Grätzer, E. T. Schmidt: *Über die Anordnung von Ringen.* Acta mathematica. Hung., 8, 1957, 259—260.

[4] R. E. Johnson: *On ordered domains of integrity.* Proc. Amer. Math. Soc. 3, 1952, 414—416.

[5] V. Kudláček: *O tautomorfismech částečně uspořádaných okruhů.* Sborník III. vědecké konference VUT v Brně 1957, 43—45.

[6] F. Šik: *Erweiterungen teilweise geordneter Gruppen.* Publ. Fac. Sci. Univ. Brno, No 410, 1960, 65—80.

[7] E. P. Šimbireva: *K teorii častično uporjadočennych grupp.* Matem. sborník, 20(62), 1947, 145—178.

Václav Kudláček

Mathematisches Institut

Technische Hochschule, Brno

Tschechoslovakei