Archivum Mathematicum

František Šik

Verbandsgruppen, deren Komponentenverband kompakt erzeugt ist

Archivum Mathematicum, Vol. 7 (1971), No. 3, 101--121

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104745

SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS, ARCH. MATH. 3,
VII: 101—121, 1971

VERBANDSGRUPPEN, DEREN KOMPONENTENVERBAND KOMPAKT ERZEUGT IST

F. ŠIK, Brno

Eingegangen am 9. März 1971

Die Arbeit ist dem Studium des Verbandes der Komponenten $\Gamma(G)$ einer Verbandsgruppe (kurz: l-Gruppe) G, grösstenteils dem Studium der Bedingungen, unter welchen dieser Verband kompakt erzeugt ist, gewidmet. Kompakte Elemente des Verbandes $\Gamma(G)$ sind die Hauptkomponenten der l-Gruppe G (Hilfssatz 3). Die Umkehrung gilt allgemein nicht und deshalb werden zum Gegenstand der Untersuchung die Bedingungen, unter welchen ist es so. Der Verband $\Gamma(G)$ einer kompakt erzeugten l-Gruppe G ist kompakt erzeugt und die Atome in $\Gamma(G)$ sind diskret geordnete Gruppen (Satz 10). Dem Einfluss der zweiten von diesen zweien Bedingungen auf die Struktur der l-Gruppe G wird in dieser Arbeit systematische Aufmerksamkeit gewidmet. Ähnlich wird es mit weiteren Bedingungen sein. Für eine bessere Übersicht werden wir sie aufzählen und bezeichnen:

I. Der Verband $\Gamma(G)$ ist kompakt erzeugt.
II. Die Hauptkomponenten der l-Gruppe G sind kompakte Elemente des Verbandes $\Gamma(G)$.
III. Atome des Verbandes $\Gamma(G)$ sind diskret geordnete Gruppen.
IV. Atome des Verbandes $\Gamma(G)$ sind direkte Faktoren der l-Gruppe G.
V. Die l-Gruppe G enthält ein schwaches Einselement.

Wir werden die Charakterisierung der l-Gruppen finden, die die Eigenschaft I und ausserdem jede beliebige Auswahl der Eigenschaften II, III, IV, V haben. Es werden nur die Kombinationen I, V; I, III, V und I, IV, V ausgelassen sein — siehe die Bemerkung 9.

Führen wir übersichtlich einige Ergebnisse ein, und zwar so, dass wir zuerst die Gruppe der Eigenschaften, welche die l-Gruppe G ausser der Eigenschaft I hat, dann eine von den Charakteristiken solcher l-Gruppe und in der Klammer den betreffenden Satz der vorliegenden Arbeit angeben.

I — Der Verband $\Gamma(G)$ ist atomar (Sätze 3 und 5).
II — $\mathfrak{P}(G) = \Gamma(G)$ (Satz 4).
III — Die l-Gruppe G ist kompakt erzeugt (Satz 10).
IV — Die l-Gruppe G ist isomorph zu einer vollständig subdirekten Summe linear geordneter Gruppen (Satz 13).
II, III — Die Charakteristik ist in Satz 11 eingeführt.
II, IV — Die l-Gruppe G ist isomorph zu einer direkten Summe linear geordneter Gruppen (Satz 14).
II, V — Der Verband $\Gamma(G)$ ist endlich (Sätze 7 und 8, Bemerkung 8).
III, IV (II, III, IV) — Die l-Gruppe G ist isomorph zu einer direkten Summe diskret geordneter Gruppen (Satz 16).

II, IV, V — Die l-Gruppe G ist isomorph zu einer direkten Summe endlich vieler linear geordneter Gruppen (Satz 15).

III, IV, V (II, III, IV, V) — Die l-Gruppe G ist isomorph zu einer direkten Summe endlich vieler diskret geordneter Gruppen (Satz 18).

Ein Element a eines Verbandes Γ wird kompakt genannt, wenn für beliebige $A \subseteq \Gamma$ mit der Eigenschaft $a \leqq \bigvee A$ eine endliche Untermenge $B \subseteq A$ existiert, so dass $a \leqq \bigvee B$. Ein Verband wird kompakt erzeugt genannt, wenn jedes seiner Elemente ein Supremum kompakter Elemente ist. Von einer l-Gruppe G sagt man, dass sie kompakt erzeugt ist, wenn der Verbnd G kompakt erzeugt ist. Es sei bemerkt, dass wir unter der Algebra eine universelle Algebra mit finitären Operationen verstehen.

G. Birkhoff und O. Frink charakterisierten in der Arbeit [1] die Verbände aller Subalgebren der universellen Algebra mit finitären Operationen. Von ihren Ergebnissen ausgehend charakterisieren wir kompakt erzeugte vollständige Verbände, besonders kompakt erzeugte Komponentenverbände von l-Gruppen. Hilfssatz 1 und Satz 2 der vorliegenden Arbeit sind im wesentlichen in der Behandlung [1] bewiesen. Es war bequemer, diese Sätze hier direkt zu beweisen als sich auf die Ergebnisse in [1] zu berufen. Dies verursacht die Verschiedenheit der benutzten Begriffe und die Struktur der Arbeit [1]. Ausser den Ergebnissen ist uns auch der Beweis zu Satz 2 nützlich.

Satz 1. *Der Verband aller Subalgebren einer Algebra ist kompakt erzeugt und jede Hauptunteralgebra ist ein kompaktes Element dieses Verbandes. Das Supremum einer von oben gerichteten Menge von Subalgebren ist ihre Vereinigung.*

Beweis. Sei $\mathfrak{A}$ eine von oben gerichtete Menge von Subalgebren einer gegebenen Algebra. Die Menge $A = \bigcup \mathfrak{A}$ ist eine Unteralgebra. In der Tat, A ist offenbar bezüglich der nullaren Operationen abgeschlossen. Sei f eine n-äre Operation, $n \geqq 1$, $x_1, \ldots, x_n \in A$. Jedes x_i ist in einem $A_i \in \mathfrak{A}$ und alle A_i in einem $A_0 \in \mathfrak{A}$ enthalten, so dass $f(x_1, \ldots, x_n) \in A_0 \subseteq \bigcup \mathfrak{A}$. Damit ist die letzte Behauptung des Satzes bewiesen.

Sei $\langle a \rangle$ eine durch das Element a erzeugte Hauptsubalgebra $\langle a \rangle \subseteq \bigvee \mathfrak{A}$, wobei $\mathfrak{A}$ ein System von Subalgebren ist. Sei A die Menge aller Unteralgebren, jede von denen Supremum irgendeines endlichen Subsystems in $\mathfrak{A}$ ist. Es gilt $\bigvee \mathfrak{A} = \bigvee A = \bigcup A$; die letzte Gleichheit folgt daraus, dass A eine von oben gerichtete Menge der Subalgebren ist. Die Beziehung $\langle a \rangle \subseteq \bigcup A$ impliziert dann die Existenz eines endlichen Subsystems $\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}$ mit der Eigenschaft $a \in \bigvee \mathfrak{A}_0$. Die Relation $\langle a \rangle \subseteq \bigvee \mathfrak{A}_0$ bestätigt, dass $\langle a \rangle$ ein kompaktes Element des Verbandes der Subalgebren ist. Abschliessend ist es ersichtlich, dass jede Subalgebra B Supremum der Hauptsubalgebren $\langle b \rangle$, $b \in B$, ist.

Hilfssatz 1. *Sei K ein $\vee$-Halbverband. Der Verband der Ideale in K ist identisch mit dem Verband aller Subalgebren einer geeigneten Algebra, die auf der Menge K definiert ist.*

Beweis. Die verlangte Eigenschaft hat offensichtlich eine auf der Menge K definierte Algebra, deren System der Operationen aus der binären Operation $\vee$ und aus allen unären Operationen besteht, die jedem $x \in K$ ein beliebiges Element $y \in K$, $x \geqq y$ zuordnen.

Sei Γ ein Verband. Mit dem Symbol $K(\Gamma)$ bezeichnen wir die Menge aller kompakten Elemente in Γ.

Bemerkung 1. a) $K(\Gamma)$ ist ein $\vee$-Unterhalbverband in Γ.

In der Tat: $x, y \in K(\Gamma)$, $x \vee y \leqq \bigvee A$ für eine Untermenge $A \subseteq \Gamma \Rightarrow x, y \leqq \leqq \bigvee A \Rightarrow$ es existieren endliche Untermengen $B, C \subseteq A$, so dass $x \leqq \bigvee B$, $y \leqq \leqq \bigvee C \Rightarrow x \vee y \leqq \bigvee(B \cup C)$ und $B \cup C$ ist eine endliche Untermenge in A. (Die Operationen und die Anordunung bezogen sich auf den Verband Γ.)

b) Das kleinste Element in Γ (wenn vorhanden) ist kompakt. Für einen vollständigen Verband Γ gilt also $K(\Gamma) \neq \emptyset$.

Satz 2. *Sei Γ ein vollständiger Verband. Folgende Bedingungen sind äquivalent.*
(1) *Γ ist kompakt erzeugt;*
(2) *Γ ist isomorph zu dem Verband aller Ideale eines $\vee$-Halbverbandes.*
(3) *Γ ist isomorph zu dem Verband aller Subalgebren einer Algebra.*

Beweis. $1 \Rightarrow 2$: Wir beweisen, dass der Verband Γ zu dem Verband aller Ideale des $\vee$-Halbverbandes $K(\Gamma)$ isomorph ist. Sei S ein Ideal in $K(\Gamma)$. Definieren wir $x(S) = \bigvee S$ (die Operationen $\vee$, $\wedge$ und die Relation $\leqq$ beziehen sich auf den Verband Γ). Für $a \in K(\Gamma)$ beweisen wir die Beziehung $a \in S \Leftrightarrow a \leqq x(S)$. Für $a \in K(\Gamma)$ gilt nämlich: $a \leqq x(S)(= \bigvee S) \Rightarrow a \leqq a_1 \vee \ldots \vee a_n$ für eine bestimmte endliche Untermenge $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq S \Rightarrow a \in S$, da S ein Ideal ist. Damit ist die Implikation $\Leftarrow$ bewiesen; die umgekehrte ist evident.

Für $x \in \Gamma$ definieren wir die Menge $S(x) = \{a \in K(\Gamma) : a \leqq x\}$. $S(x)$ ist offenbar ein Ideal in $K(\Gamma)$ und aus dem vorangehenden folgt $S[x(S)] = S$. Da der Verband Γ nach Voraussetzung kompakt erzeugt it, ist jedes $x \in \Gamma$ Supremum kompakter Elemente, also für jedes $x \in \Gamma$ ist $x[S(x)] = x$. Wir haben bewiesen, dass die Abbildungen $x \to S(x)$, $S \to x(S)$ des Verbandes Γ und des Verbandes aller Ideale in $K(\Gamma)$ eineindeutig, gegenseitig invers, isoton und „auf" sind.

$2 \Rightarrow 3$ folgt direkt aus Hilfssatz 1.

$3 \Rightarrow 1$ folgt aus Satz 1.

Satz A ([1], Theorem 3). *Wenn der Verband aller Subalgebren einer Algebra eine Boolesche Algebra ist, so ist er isomorph zu der atomaren Booleschen Algebra aller Untermengen einer geeigneten Menge.*

Aus diesem Satz und aus Satz 2 folgt unmittelbar.

Folgerung. *Die vollständige kompakt erzeugte Boolesche Algebra ist isomorph zu der Booleschen Algebra aller Untermengen einer geeigneten Menge.*

Es gilt auch die Umkehrung:

Hilfssatz 2. *Die Boolesche Algebra Γ aller Untermengen einer Menge M ist kompakt erzeugt und vollständig. Es gilt weiter:*

die Menge aller kompakten Elemente in $\Gamma =$
$=$ die Menge aller endlichen Untermengen in M.

Beweis. Das Atom der vollständigen Booleschen Algebra ist offenbar ein kompaktes Element und der Bemerkung gemäss ist das Supremum von endlich vielen Atomen ein kompaktes Element.

Sei eine unendliche Untermenge $A \subseteq M$ ein kompaktes Element in Γ. Dann $A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$ und es existiert kein endliches Teilsystem in $\{\{a\} : a \in A\}$, dessen Supremum (Vereinigung) dem A gleich wäre. Also ist nicht das Element $A \in \Gamma$ kompakt erzeugt. Damit ist die Gleichheit aus der Behauptung des Satzes bestätigt.

Jedes von Null verschiedene Element in Γ ist Supremum eines Atomsystems (die Vereinigung eines Systems der einelementigen Untermengen) — also der kompakten Elemente, das Nullelement ist selbst kompakt. Hieraus entnimmt man direkt, dass der Verband Γ kompakt erzeugt ist.

Die unmittelbare Folgerung für den Verband der Komponenten wird eingeführt werden. Einleitend seien einige bekannte Begriffe und Ergebnisse zitiert, z. B. aus [11], Abs. 3.1. Zwei Elemente a, b einer l-Gruppe G heissen *disjunktiv*, im Zeichen $a \, \delta \, b$, wenn $|a| \wedge |b| = 0$ gilt. Das Symbol $A \, \delta \, B$ (A, $B \subseteq G$) drückt aus, dass $a \, \delta \, b$ für alle $a \in A$ und alle $b \in B$ gilt. Die Menge $A' = \{b \in G : b \, \delta \, A\}$ wird *das disjunktive Komplement* der Menge $\emptyset \neq A \subseteq G$ genannt. Jede Menge $(A')'(\equiv A'')$, wobei $\emptyset \neq A \subseteq G$, ist *eine Komponente* (in G). Das disjunktive Komplement A' der Menge $\emptyset \neq A \subseteq G$ ist gewiss eine Komponente, da $A' = A'''$ und die Komponente B ist das disjunktive Komplement der Menge B'. Die beliebige Komponente ist eine konvexe l-Untergruppe der l-Gruppe G und ein abgeschlossener Teilverband des Verbandes G. Die Menge aller Komponenten in G, $\Gamma(G)$, ist eine vollständige Boolesche Algebra, die Menge $\Pi(G) = \{a'' : a \in G\}$ der sog. *Hauptkomponenten* a'' und die Menge $\Pi'(G) = \{a' : a \in G\}$ der sog. *dualen Hauptkomponenten* a' sind Teilverbände in $\Gamma(G)$. Die Operationen im Verband $\Pi(G)$ sind, wie folgt, realisiert: $a'' \vee b'' = (|a| \vee |b|)'' = (|a| + |b|)''$, $a'' \wedge b'' = (|a| \wedge |b|)''$, im Verband $\Pi'(G)$ dann auf folgende Weise: $a' \vee b' = (|a| \wedge |b|)'$, $a' \wedge b' = (|a| \vee |b|)' = (|a| + |b|)'$. Das Infimum eines beliebigen Systems der Komponenten in $\Gamma(G)$ ist ihr Durchschnitt. Es wird leicht bestätigt, dass Supremum eines beliebigen — nicht nur endlichen — Systems der Hauptkomponenten $\{a''_\alpha : \alpha \in A\}$, wobei $\bigvee_{\alpha \in A} |a_\alpha|$ existiert, eine Hauptkomponente ist und dass $\bigvee_{\alpha \in A} a''_\alpha = (\bigvee_{\alpha \in A} |a_\alpha|)''$ gilt. In der Tat, aus der Relation $|c| \geqq |d|$ folgt $c'' \supseteq d''$, also $(\bigvee_{\alpha \in A} |a_\alpha|)'' \supseteq \bigvee_{\alpha \in A} a''$. Anderseits aus der Tatsache, dass die Komponente $\bigvee_{\alpha \in A} a''_\alpha$ ein abgeschlossener Teilverband des Verbandes G ist und aus den Relationen $a_\beta \in a''_\beta \subseteq \bigvee_{\alpha \in A} a''_\alpha$ für ein beliebiges $\beta \in A$, folgt $\bigvee_{\beta \in A} |a_\beta| \in \bigvee_{\alpha \in A} a''_\alpha$, $(\bigvee_{\beta \in A} |a_\beta|)'' \subseteq \bigvee_{\alpha \in A} a''_\alpha$. Daher die verlangte Gleichheit. Unter *minimalen* Komponenten in G verstehen wir Atome in $\Gamma(G)$. Die *maximale* Komponente ist dual definiert. Die minimale Komponente ist linear geordnet und gehört in $\Pi(G)$, die maximale gehört in $\Pi'(G)$. Die l-Gruppe G heisst *die l-Gruppe der Gattung* α, wenn für jedes $0 \neq K \in \Gamma(G)$ eine minimale Komponente M in G mit der Eigenschaft $K \supseteq M$ existiert. Ein Element $a \in G$ heisst ein *schwaches Einselement* in G falls $a'' = G$.

Bemerkung 2. Auf Grund des [11], 1.6 lässt sich die Kompaktheit eines Elementes A im Komponentenverband $\Gamma(G)$ der l-Gruppe G äquivalent folgendermassen ausdrücken:

Wenn $A = \bigvee \mathfrak{A}$, wobei $\mathfrak{A} \subseteq \Gamma(G)$, existiert eine endliche Teilmenge $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$, so dass $A = \bigvee \mathfrak{B}$.

Für den Komponentenverband $\Gamma(G)$ der l-Gruppe G — da $\Gamma(G)$ eine vollständige Boolesche Algebra ist — folgt daher

Satz 3. *Sei G eine l-Gruppe. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) *Der Verband $\Gamma(G)$ ist kompakt erzeugt.*
(2) *Der Verband $\Gamma(G)$ ist isomorph zum Verband aller Ideale eines $\vee$-Halbverbandes.*
(3) *Der Verband $\Gamma(G)$ ist isomorph zum Verband aller Subalgebren einer Algebra.*
(4) *Der Verband $\Gamma(G)$ ist atomare Boolesche Algebra (und ist daher isomorph zum Verband 2^M aller Untermengen einer geeigneten Menge M).*
(5) *Die l-Gruppe G ist der Gattung α.*
(6) *Es existiert eine l-Untergruppe H in G, die isomorph zu einer direkten Summe linear geordneter Gruppen ist und $\Gamma(G) \simeq \Gamma(H)$.*

In diesem Fall ist jedes kompakte Element in $\Gamma(G)$ Supremum endlich vieler minimaler Komponenten und umgekehrt. Der Beweis der Äquivalenz der Bedingungen 1 bis 4 folgt direkt aus Satz 2, aus der oben genannen Folgerung zu Satz A und aus Hilfssatz 2. Die Implikation $4 \Rightarrow 5$ ist evident.

Beweis der Implikation $5 \Rightarrow 4$: Sei $A \in \Gamma(G)$, $\{M_\alpha : \alpha \in I\}$ das System aller minimalen Komponenten in G, die in A enthalten sind. Nach Voraussetzung ist $I \neq \emptyset$ und es gilt evident $\bigvee_{\alpha \in I} M_\alpha \subseteq A$. Ist $\bigvee_{\alpha \in I} M_\alpha \neq A$, so gilt $K = (\bigvee_{\alpha \in I} M_\alpha)' \cap A \neq 0$, also existiert eine minimale Komponente M unter K, also auch unter A. Aus der Beziehung $M \subseteq (\bigvee_{\alpha \in I} M_\alpha)'$ folgt nun $0 = M \wedge \bigvee_{\alpha \in I} M_\alpha = \bigvee_{\alpha \in I}(M \wedge M_\alpha)$, also $M \wedge M_\alpha = 0$, $M \neq M_\alpha (\alpha \in I)$ und daher ein Widerspruch.

$5 \Rightarrow 6$: Die Untergruppe H, die in der additiven Gruppe G durch die Menge aller minimalen Komponenten der l-Gruppe G erzeugt ist, ist eine (konvexe) l-Untergruppe in G [10], II, 5.1. Jede minimale Komponente M in G ist ein Normalteiler in H. Für $x \in M$, $y \in H$ gilt nämlich $a = \sum_{i=1}^{n} y_i$, wobei $y_i \in M_i$ = minimale Komponente in G für alle $i = 1, 2, \ldots, n$, $\sum_{i=1}^{n} y_i + x - \sum_{i=1}^{n} y_i = y_1 + \ldots + (y_{n-1} + (y_n + x - y_n) - y_{n-1}) + \ldots + y_1 \in M$, da $y_n + x - y_n \in M$ wie im Falle $y_n \in M_n = M$, als auch im Falle $y_n \in M_n \neq M$, denn die Elemente der disjunktiven Mengen M_n und M sind vertauschbar. Es ist ähnlich für $n - 1, \ldots, 2, 1$. Die Untergruppe H ist also die Summe der minimalen Komponenten in G und da für beliebige zwei disjunkte Mengen der minimalen Komponenten $\{M_\alpha\}$ und $\{M_\beta\}$ $0 = \bigvee M_\alpha \cap \bigvee M_\beta \supseteq \sum M_\alpha \cap \sum M_\beta$ gilt, ist diese Summe direkt.

Die Menge $\Gamma(G)$ sowie die Menge $\Gamma(H)$ ist in einer 1-1-deutigen Korrespondenz mit dem System aller Untermengen der Menge aller minimalen Komponenten in G. Im ersten Falle ordnen wir der beliebigen Menge der minimalen Komponenten ihr Supremum, im zweiten Falle ihre Summe zu. Daraus folgende 1-1-deutige Abbildung von $\Gamma(G)$ auf $\Gamma(H)$ ist evident ein Isomorphismus dieser Verbände.

$6 \Rightarrow 5$ folgt unmittelbar daraus, dass die direkte Summe linear geordneter Gruppen einen atomaren und deshalb nach $1 \Leftrightarrow 4$ einen kompakt erzeugten Komponentenverband hat.

Hilfssatz 3. *Sei G eine l-Gruppe. Das kompakte Element des Verbandes $\Gamma(G)$ ist eine Hauptkomponente in G.*

Beweis. Sei A ein kompaktes Element in $\Gamma(G)$. Dann ist $A = \bigvee\{a'' : a \in A\}$, und somit existiert eine endliche Untermenge $A_1 \subseteq A$, so dass $A = \bigvee\{a'' : a \in A_1\}$. Daher die Komponente $A = (\bigvee\{|a| : a \in A_1)''$ ist eine Hauptkomponente.

Die Umkehrung der Implikation im Hilfssatz 3 braucht nicht allgemein gelten, nicht einmal in dem Fall, dass der Verband $\Gamma(G)$ kompakt erzeugt ist. Als Beispiel dient eine vollständige direkte Summe unendlich vieler linear geordneter Gruppen. Der Verband $\Gamma(G)$ ist atomar, also ist er kompakt erzeugt (Satz 3), während die Hauptkomponente, welche durch ein Element erzeugt ist, dessen unendlich viele Koordinaten von Null verschieden sind, ist kein Supremum endlich vieler minimaler Komponenten.

Widmen wir uns jetzt der Frage, unter welchen Bedingungen es möglich ist, die Implikation im Hilfssatz 3 umzukehren.

Bemerkung 3. Ist jede Hauptkomponente einer l-Gruppe G ein kompaktes Element des Verbandes $\Gamma(G)$, so ist der Verband $\Gamma(G)$ kompakt erzeugt.

In der Tat, ein beliebiges $A \in \Gamma(G)$ ist Supremum kompakter Elemente in $\Gamma(G)$, $A = \bigvee\{a'' : a \in A\}$.

Definieren wir $\mathfrak{P}(G)$ als das System aller Untermengen der l-Gruppe G, jede von denen Vereinigung der Elemente eines Ideales in $\Pi(G)$ ist.

Hilfssatz 4. *Sei G eine l-Gruppe. $\mathfrak{P}(G)$ ist das System aller Subalgebren einer gewissen auf G definierten Algebra. Die Menge aller Hauptsubalgebren dieser Algebra ist $\Pi(G)$.*

Bemerkung 4. Solche Algebra ist z. B. eine Ω-Gruppe, deren additive Gruppe die additive Gruppe der l-Gruppe G ist, zwei von den Ω-Operationen $\vee$ und $\wedge$ und die übrigbleibenden Ω-Operationen alle unären Operationen sind, die einem beliebigen $a \in G$ ein beliebiges Element $b \in a''$ zuordnen.

Beweis. Es sei eine Ω-Gruppe G definiert, wie sie in Bemerkung 4 beschrieben ist. Ein beliebiges Element aus $\mathfrak{P}(G)$ ist eine l-Untergruppe der l-Gruppe G und ist bezüglich aller unären Ω-Operationen abgeschlossen, also ist eine Ω-Untergruppe. Umgekehrt, wenn A eine Ω-Untergruppe der Ω-Gruppe G ist, $a \in A$, dann $a'' \subseteq A$ und daher $A = \bigcup\{a'' : a \in A\}$. Die Menge $\{a'' : a \in A\}$ ist ein Ideal in $\Pi(G)$. Es gilt in der Tat: $a, b \in A \Rightarrow |a| \vee |b| \in A \Rightarrow A \supseteq (|a| \vee |b|)''$. Die übriggebliebene Eigenschaft des Ideales ist evident gültig.

Für den Beweis der Schlussbehauptung bemerken wir zuerst, dass jede Hauptkomponente ein Element in $\mathfrak{P}(G)$ ist. Daher ist die durch ein Element a erzeugte Hauptsubalgebra $\langle a\rangle$ in der Hauptkomponente a'' enthalten. Da $\langle a\rangle$ Vereinigung der Elemente eines Ideales in $\Pi(G)$ ist, existiert eine Hauptkomponente b'' mit der Eigenschaft $a \in b''$. Zum Schluss haben wir $b'' \subseteq \langle a\rangle \subseteq a'' \subseteq b''$, $\langle a\rangle = a''$ bewiesen, daher ist a'' die Hauptsubalgebra $\langle a\rangle$. Wir haben die Gleichheit $\{a'' : a \in G\} = \{\langle a\rangle : a \in G\}$ bewiesen und damit ist der Beweis des Satzes abgeschlossen.

Satz 4. *Sei G eine l-Gruppe. Folgende Bedingungen sind äquivalent:*

(1) $\mathfrak{P}(G) = \Gamma(G)$.

(2) *Die Vereinigung einer beliebigen von oben gerichteten Komponentenmenge ist eine Komponente.*

(3) *Die Vereinigung einer beliebigen von oben gerichteten Menge der Hauptkomponenten ist eine Komponente.*

(4) *Der Verband $\Gamma(G)$ ist kompakt erzeugt und jede Hauptkomponente in G ist ein kompaktes Element in $\Gamma(G)$.*

(5) *Der Verband $\Gamma(G)$ ist atomar und jede Hauptkomponente in G ist Supremum endlich vieler minimaler Komponenten in G.*

(6) *Es existiert eine l-Untergruppe H in G, die zu einer direkten Summe linear geordneter Gruppen isomorph ist und es existiert ein $\Pi(G)$ auf $\Pi(H)$ abbildender Isomorphismus φ: $\Gamma(G)$ auf $\Gamma(H)$.*

Bemerkung 5. Mit Hinsicht auf Hilfssatz 3 kann man die zweite Aussage in der Bedingung (4) und (5) äquivalent auf folgende Weise formulieren: Die Menge aller kompakten Elemente in $\Gamma(G)$ ist gleich $\Pi(G)$.

Beweis. $1 \Rightarrow 4$: Nach Satz 1 und Hilfssatz 4 ist $\mathfrak{P}(G)$ als der Verband aller Subalgebren gewisser Algebra kompakt erzeugt und alle Hauptsubalgebren sind kompakte Elemente in $\mathfrak{P}(G)$. Wiederum nach Hilfssatz 4 sind die Hauptkomponenten in G kompakte Elemente in $\mathfrak{P}(G)$.

$4 \Rightarrow 1$: Es genügt $\mathfrak{P}(G) \subseteq \Gamma(G)$ zu beweisen, denn die umgekehrte Inklusion ist evident. Sei also $\mathfrak{A}$ ein Ideal in $\Pi(G)$, $L = \bigvee \mathfrak{A}$. Sei $\mathfrak{B}$ die Menge aller in L enthaltenen

Hauptkomponenten. Nach Voraussetzung ist ein beliebiges $b'' \in \mathfrak{B}$ ein kompaktes Element in $\Gamma(G)$. Aus der Relation $b'' \subseteq \bigvee \mathfrak{A}$ folgt also die Existenz einer endlichen Untermenge $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}$ mit der Eigenschaft $b'' \subseteq \bigvee \mathfrak{C}$. Da $\bigvee \mathfrak{C} \in \mathfrak{A}$, ist $b'' \in \mathfrak{A}$, also $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$. Die umgekehrte Inklusion ist evident, also $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$. Weil $\bigcup \mathfrak{B} = L$ gilt, ist auch $\bigcup \mathfrak{A} = L \in \Gamma(G)$. Daher $\mathfrak{P}(G) \subseteq \Gamma(G)$.

$1 \Rightarrow 2$; $3 \Rightarrow 2$: Sei $\mathfrak{A}$ eine von oben gerichtete Komponentenmenge. Die Menge $\mathfrak{B} = \{a'' : a \in \bigcup \mathfrak{A}\}$ ist ein Ideal in $\Pi(G)$. Für beliebige a'', $b'' \in \mathfrak{B}$ existieren nämlich $A, B \in \mathfrak{A}$, so dass $a \in A$, $b \in B$. Dann ist $a'' \vee b'' \subseteq A \vee B \subseteq C$ für ein gewisses $C \in \mathfrak{A}$, also $a'' \vee b'' = (|a| \vee |b|)'' \in \mathfrak{B}$, denn $|a| \vee |b| \in \bigcup \mathfrak{A}$. $\mathfrak{B}$ hat auch die zweite Idealeneigenschaft, denn: $b'' \subseteq a'' \in \mathfrak{B} \Rightarrow b \in b'' \subseteq a'' \subseteq A$ für ein $A \in \mathfrak{A} \Rightarrow$ $\Rightarrow b \in \bigcup \mathfrak{A} \Rightarrow b'' \in \mathfrak{B}$. Wenn wir jetzt aus der Bedingung (1) ausgehen, schliessen wir, dass $\bigcup \mathfrak{B}$ als ein Element in $\mathfrak{P}(G)$ $(= \Gamma(G))$ eine Komponente ist. Wenn wir im zweiten Falle die Gültigkeit (3) anstatt (1) voraussetzen, ist $\bigcup \mathfrak{B}$ ebenfall seine Komponente.

$2 \Rightarrow 3$ gilt evident.

$3 \Rightarrow 1$: Wenn die Bedingung (3) erfüllt ist, ist die Vereinigung der Elemente des Ideales in $\Pi(G)$ eine Komponente, also $\mathfrak{P}(G) \subseteq \Gamma(G)$, was zusammen mit der evident gültigen umgekehrten Inklusion die gesuchte Gleichheit ergibt.

$4 \Leftrightarrow 5$ folgt aus Satz 3.

Wenn wir auf den Satz 3 Rücksicht nehmen, genügt es für den Beweis $5 \Leftrightarrow 6$ nur folgendes zu beweisen:

$5 \Rightarrow 6$: Da nach Voraussetzung die Hauptkomponente in G Supremum endlich vieler Atome in $\Gamma(G)$ ist, so ist ihr φ-Bild in $\Gamma(H)$ Summe endlich vieler Atome in $\Gamma(H)$, also eine Hauptkomponente in H.

$6 \Rightarrow 5$: φ-Bild einer Hauptkomponente K in G ist nach Voraussetzung eine Hauptkomponente in H, d. h. die Summe endlich vieler Atome in $\Gamma(H)$, so dass K Supremum endlich vieler Atome in $\Gamma(G)$ (φ-Vorbilder der zuletzt genannten Atome in $\Gamma(H)$) ist.

Der Satz 3 führt als eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Eigenschaft des Komponentenverbandes $\Gamma(G)$ einer l-Gruppe G „kompakt erzeugt zu sein" die Existenz eines Isomorphismus des Verbandes $\Gamma(G)$ zu dem Idealenverband eines geeigneten $\vee$-Halbverbandes ein. Nach dem Beweis zu Satz 2 kann als solcher $\vee$-Halbverband die Menge $K(\Gamma)$ aller kompakten Elemente in $\Gamma(G)$ dienen.

Um die Ausdrucksweise zu erleichtern, bezeichnen wir mit dem Symbol $J(L)$ den Verband aller Ideale im Verband L. Bezeichnen wir weiterhin mit $E(N)$ den durch die Inklusion geordneten Verband aller endlichen Teilmengen der Menge N (einschliesslich der leeren). Abschliessend, wenn N eine Untermenge eines Verbandes ist, bezeichnen wir mit dem Symbol $S(N)$ die Menge der Suprema aller endlichen Teilmengen der Menge N (einschliesslich der leeren). Im folgenden Satz wollen wir zeigen, dass der Verband $J(K(\Gamma))$ im Satz 3 durch jeden beliebigen der Verbände $J(E(N))$ und $J(S(N))$ vertreten werden kann, wobei N die Menge aller minimalen Komponenten in G bedeutet.

Satz 5. *Sei G eine l-Gruppe. Der Verband $\Gamma(G)$ ist kompakt erzeugt genau dann, wenn er zu einem (und dann zu jedem) von den Verbänden $J(K(\Gamma))$, $J(E(N))$ und $J(S(N))$ isomorph ist, wobei $K(\Gamma)$ den $\vee$-Halbverband aller kompakten Elemente in $\Gamma(G)$ und N die Menge aller minimalen Komponenten in G bezeichnet.*

Es genügt zu beweisen, dass die Bedingung notwendig ist. Sie ist nämlich auch hinreichend nach Satz 3, denn alle drei angeführten Objekte sind Idealenverbände eines $\vee$-Halbverbandes.

Notwendigkeit. Nach Satz 2 (mit Berücksichtigung des Beweises zu Satz 2) ist der vollständige kompakt erzeugte Verband isomorph zu dem Verband $J(K(\Gamma))$.

Wenn der Verband $\Gamma(G)$ kompakt erzeugt ist, ist nach Satz 3 $J(K(\Gamma)) = J(S(N))$ und es gilt offenbar $J(S(N)) \simeq J(E(N))$.

Satz 6: *Zu einer beliebigen Menge N existiert eine l-Gruppe G, so dass $\Gamma(G)$ isomorph zu $J(E(N))$ ist.*

Beweis. Solche l-Gruppe wird z. B. die direkte Summe der von Null verschiedenen linear geordneten Gruppen $\{G_\alpha : \alpha \in N\}$ sein. Die Menge $\mathfrak{N}$ der minimalen Komponenten in G ist offenbar äquivalent mit N, so dass der Verband $J(E(\mathfrak{N}))$ zu dem Verband $J(E(N))$ isomorph ist. Die l-Gruppe G ist kompakt erzeugt und deshalb ist nach Satz 5

$$\Gamma(G) \simeq J(E(\mathfrak{N})) \simeq J(E(N)).$$

Betrachtungen über kompakte Erzeugung unterbrechen wir mit dem folgenden Vorbereitungsabsatz.

In der Arbeit [5] wurden Ergebnisse für die Räume der Ultrafilter in einem $\wedge$-Halbverband L abgeleitet, welche nach gewisser einfacher Bearbeitung interessante Verwendung in den Fragen haben, die zum Gegenstand unseres Studiums werden. Wie es gleich ersichtlich ist, kann man nach Vertauschung der geordneten Menge L durch die dual geordnete Menge $\breve{L}$ die für den Ultrafilterraum in L gültige Behauptung auch für den Ultraantifilterraum in $\breve{L}$ bestätigen. Ich führe diese Ergebnisse in der speziellen Form ein, in welcher sie hier verwendet werden sein. Unter einem *Antifilter* in einem $\vee$-Halbverband Δ verstehen wir ein nichtleeres Ideal in Δ, welches das Einselement des Halbverbandes Δ (sofern Δ es hat) nicht enthält. Maximale Elemente der durch die Inklusion geordneten Menge aller Antifilter in Δ heissen *Ultraantifilter*.

Sei Δ ein distributiver Verband mit dem grössten Element 1. Sei $\mathfrak{U}(\Delta)$ die Menge aller Ultraantifilter in Δ. Die Menge $\mathfrak{U}(\Delta)$ versehen wir mit einer Topologie, so dass wir als Basis der offenen Mengen in $\mathfrak{U}(\Delta)$ das System aller Mengen $\mathfrak{U}K = \{\xi \in \in \mathfrak{U}(\Delta) : K \in \xi\}$ nehmen, wobei K ein beliebiges Element in Δ ist.

Satz B. *Der Raum $\mathfrak{U}(\Delta)$ hat folgende Eigenschaften:*

a) $\mathfrak{U}(\Delta)$ ist ein Hausdorffscher vollständig regulärer Raum.

b) Jede Menge $\mathfrak{U}K$ ist offen und abgeschlossen.

[5], Theorem 1.

Auf Grund dieser und weiterer Behauptungen in [5] wurde in [9], Teor. 6, der Satz bewiesen, welchen wir jetzt einführen und in vervollkommener Form beweisen.

Satz C. *Sei G eine l-Gruppe. Folgende Bedingungen sind äquivalent:*

(1) *Der Raum $\mathfrak{U}(\Pi'(G))$ ist kompakt.*
(2) *Der Raum $\mathfrak{U}(\Pi(G))$ ist kompakt und G erfüllt die (unten angeführte) Bedingung* (H)
(3) *$\Pi'(G)$ ist eine Boolesche Algebra.*
(4) *$\Pi(G)$ ist eine Boolesche Algebra.*
(5) *$\Pi(G) = \Pi'(G)$.*

Die Bedingung (H) lautet: *Zu jedem Element $a > 0$, das kein schwaches Einselement ist, existiert ein Element $b > 0$, das kein schwaches Einselement ist, so dass $a \vee b$ ein schwaches Einselement ist.*

Beweis. Teor. 6 aus der Arbeit [9] hat dieselbe Fassung wie der vorgelegte Satz bis darauf, dass er die um die Forderung $0 \in \Pi'(G)$ erweiterte Bedingung (1) hat. Wir werden beweisen, dass der kompakte Raum $\mathfrak{U}(\Pi')$ die Forderung $0 \in \Pi'(G)$ erfüllt und damit wird unser Satzt bestätigt sein.

Da die Abschliessung der leeren Menge in $\mathfrak{U}(\Pi')$ die leere Menge und $\{\mathfrak{U}(\Pi') \setminus \mathfrak{U}f' : f \in G^+\}$ eine Basis der abgeschlossenen Mengen des Raumes $\mathfrak{U}(\Pi')$ ist, so gilt $\bigcap \{\mathfrak{U}(\Pi') \setminus \mathfrak{U}f' : f \in G^+\} = \emptyset$. Daher $\mathfrak{U}(\Pi') = \bigcup \{\mathfrak{U}f' : f \in G^+\}$. Die Menge $\{\mathfrak{U}f' : f \in G^+\}$ ist eine offene Überdeckung des Raumes $\mathfrak{U}(\Pi')$. Aus der Kompaktheit des Raumes folgt die Möglichkeit der Auswahl einer endlichen Überdeckung $\{\mathfrak{U}f'_i : i = 1, \ldots, n\} \subseteq$ $\subseteq \{\mathfrak{U}f' : f \in G^+\}$. Es muss $\bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{U}f'_i \subseteq \mathfrak{U} \bigwedge_{i=1}^{n} f'_i = \mathfrak{U}(\bigvee_{i=1}^{n} f_i)'$ gelten, so dass wir $\mathfrak{U}(\Pi') =$ $= \mathfrak{U}(\bigvee_{i=1}^{n} f_i)'$ haben, d. h. jeder Ultraantifilter in $\Pi'(G)$ enthält $(\bigvee_{i=1}^{n} f_i)'$. $\bigvee_{i=1}^{n} f_i$ wird ein schwaches Einselement in G sein, wenn wir beweisen, dass $(\bigvee_{i=1}^{n} f_i)' = 0$ gilt. Das ergibt sich aber aus [9], Hilfssatz 2. Damit ist der Satz bewiesen.

Für den weiteren Gebrauch führen wir ausdrücklich eine äquivalente Form des Hilfssatzes 2 aus [9] als die folgende Bemerkung 6 an.

Bemerkung 6. Es gilt $\bigcap \{\xi : \xi \in \mathfrak{U}(\Pi')\} = 0$.

Noch einige Zitate aus [10]. Für $\xi \in \mathfrak{U}(\Pi'(G))$, $a \in G$, gelten folgende wichtige Relationen: $a \mathrel{\bar{\in}} \bigcup \xi \Leftrightarrow a' \in \xi \Leftrightarrow a' \subseteq \bigcup \xi \Leftrightarrow a'' \not\subseteq \bigcup \xi$ [10], III, 7. 10. Wenn P eine konvexe l-Untergruppe der l-Gruppe G ist, kann man die Zerlegung $G/_l P$ (ähnlich $G/_r P$), und zwar durch kanonische Vorschrift, anordnen: $a + P \geqq b + P$, wenn $c \in P$ existiert, so dass $a + c \geqq b$, [10], III, 6. P heisst *einfache Untergruppe* in G, wenn die Zerlegung $G/_l P$ kanonisch linear geordnet ist. Minimale Elemente der (durch die Inklusion) geordneten Menge der einfachen Untergruppen heissen *minimale einfache Untergruppen* in G. Insofern $G \neq 0$, ist die Menge aller minimalen einfachen Untergruppen in G gleich $\{\bigcup \xi : \xi \in \mathfrak{U}(\Pi'(G))\}$, [10], III, 7. 2. Eine subdirekte Summe G der l-Gruppen $\{G_\alpha\}$ heisst *vollständig subdirekt*, wenn für beliebige α und $x_\alpha \in G_\alpha$ stets $f \in G$ mit $f(\alpha) = x_\alpha$ und $f(\beta) = 0$ für alle $\beta \neq \alpha$ existiert. Elemente des genannten Types in G sind eigene Spitzen der l-Gruppe G im Sinne der folgenden Definition: Ein Element x einer (beliebigen) l-Gruppe G heisst *eigene Spitze* in G, wenn das Intervall $(0, x)$ eine Kette ist [4]. Eine l-Gruppe G heisst *r-Gruppe*, wenn sie isomorph zu einer subdirekten Summe linear geordneter Gruppen ist oder äquivalent dazu, wenn jede Komponente in G eine normale Untergruppe der Gruppe G ist, [3] V 8, Teorema 15.

Ist schliesslich P ein topologischer Raum, bezeichnen wir mit $\mathfrak{N}(P)$ die Menge aller in P abgeschlossenen Mengen, und mit $\mathfrak{M}(P)$ das System aller Untermengen in P, die Abschliessung offener Menge ($\equiv$ Abschliessung ihres Interieurs) sind.

Hilfssatz 5. *Sei G eine l-Gruppe $\neq 0$. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) *Der Raum $\mathfrak{U}(\Pi')$ ist diskret.*

(2) *Minimale einfache Untergruppen in G sind maximale Komponenten in G.*

(3) *Jeder Ultraantifilter in $\Pi'(G)$ ist ein Hauptantifilter.*

(4) $\mathfrak{N}(\mathfrak{U}(\Pi')) = \mathfrak{M}(\mathfrak{U}(\Pi'))$.

Beweis. $1 \Leftrightarrow 4$: Wir beweisen, dass für einen beliebigen topologischen Raum P gilt:

(p) $\mathfrak{M}(P) = \mathfrak{N}(P) \Leftrightarrow \bar{x}$ ist eine offene Menge in P für ein beliebiges $x \in P$, was im Falle des Raumes $P = \mathfrak{U}(\Pi')$ mit abgeschlossenen Punkten das verlangte beweist.

Sei $x \in P$. Wenn $\mathfrak{x}$ keine offene Menge ist, existiert ein $y \in \mathfrak{x} \setminus \operatorname{Int} \mathfrak{x}$. Da die Menge $\mathfrak{x} \setminus \operatorname{Int} \mathfrak{x}$ abgeschlossen ist, gilt $\operatorname{Int} \bar{\mathfrak{y}} \subseteq \bar{\mathfrak{y}} \subseteq \mathfrak{x} \setminus \operatorname{Int} \mathfrak{x}$, also $\operatorname{Int} \bar{\mathfrak{y}} \cap \operatorname{Int} \mathfrak{x} = \emptyset$. Aus der Relation $\bar{\mathfrak{y}} \subseteq \mathfrak{x}$ ergibt sich aber $\operatorname{Int} \bar{\mathfrak{y}} \subseteq \operatorname{Int} \mathfrak{x}$ und daher $\operatorname{Int} \bar{\mathfrak{y}} = \emptyset$. Das ist aber im Widerspruch mit $\emptyset \neq \bar{\mathfrak{y}} = \overline{\operatorname{Int} \bar{\mathfrak{y}}}$ (die Gleichheit folgt aus der Voraussetzung $\bar{\mathfrak{y}} \in \mathfrak{N}(P) = \mathfrak{M}(P)$). Infolgedessen $\operatorname{Int} \mathfrak{x} = \mathfrak{x}$, also $\mathfrak{x}$ ist offen.

$1 \Rightarrow 3$: Nach Voraussetzung ist die einelementige Menge $\{\xi\}$ offen, es existiert also $a' \in \Pi'(G)$, $a' \neq G$, so dass $\mathfrak{U}a' \subseteq \{\xi\}$. Wenn a' keine maximale Komponente in G ist, so ist $a''(\neq 0)$ keine minimale Komponente in G. Es existiert also ein $b \in G$ mit der Eigenschaft $0 \neq b'' \not\supseteq a''$. Für die Komponente $K = b' \wedge a''$ gilt $K \neq G$ und $K \wedge b''$ $(= a'' \wedge b' \wedge b'') = 0$. Aus dieser Gleichheit erhalten wir $K' \vee b' = G$. Wenn wir ein Element $0 \neq c \in K'$ $(\neq 0)$ erwählen, so ist $c' \supseteq K$, und daher $c' \vee \vee b' = G$. Diese Beziehung zusammen mit den Beziehungen $c' \supseteq a'$, $b' \supseteq a'$ gewährleistet uns dabei, dass die Mengen $\{c', a'\}$, $\{b', a'\}$ verschiedene Ultraantifilter in Π' erzeugen, die beide in $\mathfrak{U}a'$ gehören — im Widerspruch damit, dass $\mathfrak{U}a' = \{\xi\}$ einziges Element ξ enthält. Die Komponente a' ist also das grösste Element in ξ und der Antifilter ξ ist ein Hauptantifilter.

$3 \Rightarrow 2$: Jede minimale einfache Untergruppe ist gleich $\bigcup \xi$ für ein geeignetes $\xi \in \in \mathfrak{U}(\Pi')$. Da ξ ein Hauptantifilter in $\Pi'(G)$ ist, ist er durch ein duales Atom a' in $\Pi'(G)$ erzeugt. Die Komponente a' ist in G maximal. Würde nämlich $K \in \Gamma(G)$, $G \neq K \supsetneqq a'$, existieren, dann $K' \neq 0$ und für ein beliebiges $0 \neq b \in K'$ gilt $G \neq b' \supseteq K'' = = K \supsetneqq a'$ im Widerspruch zur Voraussetzung, dass a' ein duales Atom in $\Pi'(G)$ ist. Wir schliessen damit, dass $\bigcup \xi = a'$ eine maximale Komponente ist.

$2 \Rightarrow 1$: Jeder Ultraantifilter $\xi \in \mathfrak{U}(\Pi')$ ist ein Hauptantifilter, denn nach Voraussetzung ist die minimale einfache Untergruppe $\bigcup \xi$ eine maximale Komponente in G und diese gehört in $\Pi'(G)$, also $\xi = \{b' \in \Pi'(G) : b' \subseteq a'\}$. Daher $\mathfrak{U}a' = \{\xi\}$, also jeder Punkt in $\mathfrak{U}(\Pi')$ ist eine offene Menge und $\mathfrak{U}(\Pi')$ ist ein diskreter Raum.

Satz 7. *Sei G eine l-Gruppe. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) $\mathfrak{P}(G) = \Gamma(G)$ *und G enthält ein schwaches Einselement.*
(2) *Der Verband $\Gamma(G)$ ist kompakt erzeugt, jede Hauptkomponente in G ist ein kompaktes Element in $\Gamma(G)$ und G enthält ein schwaches Einselement.*
(3) *Die Menge $\Gamma(G)$ ist endlich.*
(4) *Im Verband $\Gamma(G)$ ist jedes Element kompakt.*
(5) *Der Raum $\mathfrak{U}(\Pi'(G))$ ist kompakt und diskret.*
(6) *Es existiert eine l-Untergruppe H in G, welche isomorph zu einer direkten Summe endlich vieler linear geordneter Gruppen ist und es existiert ein Isomorphismus φ: $\Gamma(G)$ auf $\Gamma(H)$, der $\Pi(G)$ auf $\Pi(H)$ abbildet.*

Bemerkung 7. Gilt in einer l-Gruppe G die Beziehung $\Gamma(G) = \Pi'(G)$ oder $\Gamma(G) = = \Pi(G)$, so ist $\Gamma(G) = \Pi'(G) = \Pi(G)$.

Beweisen wir z. B. die erste Behauptung: Für ein beliebiges $K \in \Gamma$ ist $K' \in \Pi$, also $K = K'' \in \Pi'$, d. h. $\Gamma \subseteq \Pi'$. Evident ist $\Gamma \supseteq \Pi'$ also $\Gamma = \Pi'$. Die zweite Behauptung wird ähnlich bewiesen.

Beweis: $1 \Leftrightarrow 2$ folgt aus Satz 4.

$2 \Rightarrow 3$: Nach Satz 4 ist die Hauptkomponente G gleich $\bigvee_{i=1}^{n} a_i''$, wobei a_i'' minimale

Komponenten sind. Daher für jedes $K \in \Gamma(G)$ gilt $K = K \cap G = K \cap \bigvee_{i=1}^{n} a_i'' = \bigvee_{i=1}^{n} (K \cap a_i'') = \bigvee \{a_i'' : K \supseteq a_i''\}$ (für die übrigbleibenden a_i'' gilt nämlich $K \cap a_i'' = 0$). Daher die Endlichkeit des Verbandes $\Gamma(G)$.

$3 \Rightarrow 5$: $\Gamma(G)$ als endliche Menge ist eine atomare Boolesche Algebra und deshalb ist die Komponente $K \in \Gamma(G)$ Supremum (endlich vieler) minimaler Komponenten. Minimale Komponenten sind Hauptkomponenten und Supremum ihrer endlichen Menge, also auch K ist wieder eine Hauptkomponente. Damit ist $\Gamma(G) \subseteq \Pi(G)$ und infolgedessen auch $\Gamma(G) = \Pi(G)$ bewiesen. Aus der Bemerkung 7 erhalten wir dann $\Pi(G) = \Pi'(G)$ und diese Gleichheit bedeutet, dass der Raum $\mathfrak{U}(\Pi')$ kompakt ist (Satz C). Jedes Element $\xi \in \mathfrak{U}(\Pi')$ ist ein Hauptantifilter und ist durch eine maximale Komponente a' erzeugt, also ist $\mathfrak{U}a' = \{\xi\}$ eine offene Menge. Der Raum $\mathfrak{U}(\Pi')$ ist daher diskret.

$5 \Rightarrow 4$: Zuerst werden wir beweisen: Sobald $\bigwedge \{a_\alpha' : \alpha \in A\} = 0$ gilt, dann überdeckt das System der offenen Mengen $\{\mathfrak{U}a_\alpha' : \alpha \in A\}$ den Raum $\mathfrak{U}(\Pi')$. Im entgegengesetzten Fall existiert ein $\xi \in \mathfrak{U}(\Pi')$, welches zu keinem $\mathfrak{U}a_\alpha'$, $\alpha \in A$, gehört. Die Beziehung $a_\alpha' \bar{\in} \xi$ impliziert $a_\alpha'' \subseteq \bigcup \xi$ für alle $\alpha \in A$. Da der Raum $\mathfrak{U}(\Pi')$ diskret ist, ist nach Hilfssatz 5 der Antifilter ξ ein Hauptantifilter (der durch eine maximale Komponente a' erzeugt ist) und daher $a_\alpha'' \subseteq \bigcup \xi = a'$, $\alpha \in A$. Daher erhalten wir $a_\alpha' \supseteq a''$ ($\neq 0$), $\bigwedge \{a_\alpha' : \alpha \in A\} \supseteq a'' \neq 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Weiterhin beweisen wir folgendes: Ist $\bigwedge_\alpha a_\alpha' = 0$, dann für eine endliche Teilmenge $\{a_{\alpha_i}'\} \subseteq \{a_\alpha'\}$ gilt $\bigwedge_i a_{\alpha_i}' = 0$. Sei also $\bigwedge_\alpha a_\alpha' = 0$. Aus der Kompaktheit des Raumes $\mathfrak{U}(\Pi')$ folgt, dass man aus dem System $\{\mathfrak{U}a_\alpha'\}$, welches nach dem vorangehenden eine offene Überdeckung des Raumes $\mathfrak{U}(\Pi')$ ist, eine endliche Überdeckung $\{\mathfrak{U}a_{\alpha_i}'\}$ auswählen kann. Daher folgt $\bigwedge_i a_{\alpha_i}' = 0$. Jedes $\xi \in \mathfrak{U}(\Pi')$ muss nämlich eine duale Hauptkomponente $a' = \bigwedge_i a_{\alpha_i}'$ enthalten, was eben bedeutet, dass $a' \in \bigcap \{\xi : \xi \in \mathfrak{U}(\Pi')\} = 0$ (Bemerkung 6) gilt. Daher $a' = 0$.

Abschliessend beweisen wir, dass jedes Element in $\Gamma(G)$ kompakt ist. Es gelte $K = \bigvee_\gamma K_\gamma$ für K_γ, $K \in \Gamma(G)$. Da jede Komponente Supremum von Hauptkomponenten ist, existieren Untermengen $\{a_\alpha'' : \alpha \in A\}$, $\{b_\beta'' : \beta \in B\} \subseteq \Pi(G)$, so dass $K = \bigvee_\beta b_\beta''$, $\bigvee_\gamma K_\gamma = \bigvee_\alpha a_\alpha''$. Es sei noch bemerkt, dass zu jedem α ein $\gamma(\alpha)$ existiert mit $K_{\gamma(\alpha)} \supseteq a_\alpha''$. Aus den hervorgehenden Gleichungen ergibt sich sukzessiv

$$\bigvee_\alpha a_\alpha'' = \bigvee_\beta b_\beta'', \quad \bigwedge_\alpha a_\alpha' = \bigwedge_\beta b_\beta',$$

$$0 = (\bigwedge_\beta b_\beta') \wedge (\bigwedge_\beta b_\beta')' = (\bigwedge_\alpha a_\alpha') \wedge (\bigvee_\beta b_\beta'') = \bigwedge_\alpha \bigvee_\beta (a_\alpha' \wedge b_\beta'').$$

Nach dem vorigen gilt für eine bestimmte Untermenge der Menge $\{\bigvee_\beta (a_{\alpha_i}' \wedge b_\beta'') : \alpha \in A\}$, sagen wir $\{\bigvee_\beta (a_{\alpha_i}' \wedge b_\beta'') : i = 1, 2, \ldots, n\}$,

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_\beta (a_{\alpha_i}' \wedge b_\beta'') = 0.$$

Daher erhalten wir sukzessiv

$$0 = \bigwedge_{i=1}^{n} (a'_{\alpha_i} \wedge \bigvee_{\beta} b''_{\beta}) = (\bigwedge_{i=1}^{n} a'_{\alpha_i}) \wedge K,$$

$$\bigwedge_{i=1}^{n} a'_{\alpha_i} \subseteq K', \quad \bigvee_{i=1}^{n} a''_{\alpha_i} \supseteq K.$$

Daher

$$\bigvee_{i=1}^{n} a''_{\alpha_i} \supseteq K = \bigvee_{\alpha} a''_{\alpha} \supseteq \bigvee_{i=1}^{n} a''_{\alpha_i},$$

d. h.

$$K = \bigvee_{i=1}^{n} a''_{\alpha_i} = \bigvee_{i=1}^{n} K_{\gamma(\alpha_i)},$$

demnach ist K ein kompaktes Element in $\Gamma(G)$.

$4 \Rightarrow 2$: Die ersten zwei Aussagen in (2) gelten offenbar. Weiterhin ist die Komponente $G = \bigvee\{a'' : a \in G\}$ kompakt in $\Gamma(G)$, also gilt $G = \bigvee_{i=1}^{n} a''_i = (\bigvee_{i=1}^{n} | a_i |)''$, was eben bedeutet, dass $\bigvee_{i=1}^{n} | a_i |$ ein schwaches Einselement in G ist.

Mit Rücksicht auf Satz 3 ($1 \Leftrightarrow 6$) wird der Beweis der Implikation $2 \Leftrightarrow 6$ auf Grund folgender Betrachtung durchgeführt werden:

$2 \Rightarrow 6$: Da G eine Hauptkomponente in G ist, ist H als ihr φ-Bild eine Hauptkomponente in H. Deshalb enthält die direkte Summe der linear geordneten Gruppen, deren H ein isomorphes Bild ist, ein schwaches Einselement, d.h. ein Element, dessen alle Koordinaten von Null verschieden sind. Dann hat diese direkte Summe nur endlich viele direkte Summanden.

$6 \Rightarrow 2$: Die direkte Summe S endlich vieler linear geordneter Gruppen, zu der die l-Gruppe H nach Voraussetzung isomorph ist, enthält ein schwaches Einselement, nämlich ein Element, dessen alle Koordinaten > 0 sind. Dieses Element ist offenbar Supremum endlich vieler eigener Spitzen der l-Gruppe S, sagen wir $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Die in S durch einzelne Elemente x_i erzeugten Komponenten sind Atome in $\Gamma(S)$ und ihr Supremum ist S. Daher folgt, dass H Summe endlich vieler Atome in $\Gamma(H)$ ist, sagen wir $H = \sum_{i=1}^{n} M_i$. Da für beliebige $0 < x_i \in M_i$ stets $x''_i = M_i$ ist, so gilt $H = \sum_{i=1}^{n} x''_i = (\sum_{i=1}^{n} x_i)''$ (der Strich bezeichnet diesmal das disjunktive Komplement in der l-Gruppe H), so dass H eine Hauptkomponente in H ist. G als φ-Vorbild der Hauptkomponente H ist eine Hauptkomponente der l-Gruppe G, also enthält G ein schwaches Einselement.

Satz 8. *Sei G eine l-Gruppe. Folgende Bedingungen sind äquivalent:*

(1) *Der Verband $\Gamma(G)$ ist endlich.*
(2) *Die l-Gruppe G ist der Gattung α und es existieren nur endlich viele maximale Komponenten in G.*
(3) *In G existieren nur endlich viele minimale einfache Untergruppen.*
(4) *Es existieren nur endlich viele Ultraantifilter in $\Pi'(G)$.*

Beweis. $1 \Rightarrow 2$ ist evident.

$2 \Rightarrow 4$: Wenn keine von den maximalen Komponenten M_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, in einen Ultraantifilter $\xi \in \mathfrak{U}(\Pi')$ gehört, dann für jedes i existiert ein $a'_i \in \xi$ mit der Eigenschaft $M_i \vee a'_i = G$. Daher für jedes $j = 1, 2, \ldots, n$ ist $M_j \vee \bigvee_{i=1}^{n} a'_i = G$, also ist $\bigvee_{i=1}^{n} a'_i$ in keiner maximalen Komponente enthalten und dabei $\bigvee_{i=1}^{n} a'_i \neq G$, da $\bigvee_{i=1}^{n} a'_i \in \xi$. Das ist im Widerspruch zur Voraussetzung über die Gattung der l-Gruppe G. Daraus schliessen wir ab, dass jedes $\xi \in \mathfrak{U}(\Pi')$ durch eine maximale Komponente erzeugt ist und ist daher ein Hauptantifilter. Die Menge $\mathfrak{U}(\Pi')$ enthält deshalb so viele Elemente wie die Menge der maximalen Komponenten in G, d.h. ist endlich.

$4 \Leftrightarrow 3$: Es existiert eine 1-1-deutige Korrespondenz zwischen der Menge aller minimalen einfachen Untergruppen in G und der Menge $\mathfrak{U}(\Pi')$ aller Ultraantifilter in $\Pi'(G)$. Die Zuordnung der minimalen einfachen Untergruppe A und $\xi \in \mathfrak{U}(\Pi')$ ist durch die Relation $A = \bigcup \xi$ gegeben.

$4 \Rightarrow 1$: Der Raum $\mathfrak{U}(\Pi')$ ist endlich und daher kompakt. Für ein $\xi \in \mathfrak{U}(\Pi')$ ist die einelementige Menge $\{\xi\}$ abgeschlossen und ist daher Durchschnitt eines Systems $\mathfrak{A}$ der Mengen $\mathfrak{U}(\Pi') \setminus \mathfrak{U}a'$ (welche in die Basis der abgeschlossenen Mengen in $\mathfrak{U}(\Pi')$ gehören). Jede Menge $\mathfrak{U}a'$ ist offen und abgeschlossen (Satz B), das System $\mathfrak{A}$ ist endlich, weil $\mathfrak{U}(\Pi')$ endliche Menge ist, also ist die Menge $\{\xi\}$ offen. Daher folgt, dass der Raum $\mathfrak{U}(\Pi')$ diskret ist. Es gilt also die Bedingung (5), Satz 7, und somit auch die Bedingung (3) desselben Satzes. Daher (1), Satz 8.

Der Satz ist bewiesen.

Satz 9. *Sei G eine l-Gruppe, sei der Raum $\mathfrak{U}(\Pi'(G))$ diskret. Dann ist die Gleichheit $\Gamma(G) = \Pi(G) = \Pi'(G)$ äquivalent mit der Gleichheit zwischen irgendwelchen zweien von den Objekten $\Gamma(G), \Pi(G), \Pi'(G)$, d.h. $\Gamma = \Pi = \Pi' \Leftrightarrow \Pi = \Pi' \Leftrightarrow \Gamma = \Pi \Leftrightarrow \Gamma = \Pi'$.*

Beweis. Sei der Raum $\mathfrak{U}(\Pi')$ diskret und $\Pi(G) = \Pi'(G)$. Dann nach Satz C ist $\mathfrak{U}(\Pi')$ kompakt und diskret, so dass nach Satz 7 jedes Element in $\Gamma(G)$ kompakt ist. Ist jetzt $K \in \Gamma(G)$, so ist $K = \bigvee\{a'' : a \in K\}$, also $K = \bigvee a''_i$ für eine gewisse endliche Untermenge $\{a''_i\} \subseteq \{a'' : a \in K\}$. Daher $K = (\bigvee |a_i|)'' \in \Pi(G)$. Aus der gerade bewiesenen Inklusion $\Gamma(G) \subseteq \Pi(G)$ folgt nun $\Gamma(G) = \Pi(G)$.

Übrigbleibende Teile der Behauptung des Satzes folgen aus Bemerkung 7.

Bemerkung 8. Die Reihe der Aussagen aus Satz 7 ist um einige weitere in Satz 8 verbreitet. Überdies erlaubt die Aussage (5), Satz 7, einige äquivalente Varianten, wenn wir den Satz C und den Hilfssatz 5 ausnützen. Den Schlussbeitrag, welcher die Menge der Charakteristiken der die Forderungen I, II und V erfüllenden Verbände $\Gamma(G)$ verbreitet, bietet der Satz 9.

In der Bedingung (1) und (2), Satz 7, kann man die Forderung der Existenz des schwachen Einselements in G nicht auslassen. Dies beweist das folgende

Beispiel 1. Sei l-Gruppe G eine direkte Summe unendlich vieler linear geordneter Gruppen $\neq 0$. G hat kein schwaches Einselement, aber $\Gamma(G)$ ist eine vollständige atomare Boolesche Algebra; deshalb ist der Verband $\Gamma(G)$ nach Satz 3 kompakt erzeugt. Da jede Hauptkomponente Supremum endlich vieler Atome ist, ist sie ein kompaktes Element in $\Gamma(G)$. Die ersten zwei Forderungen aus der Bedingung (2), Satz 7, sind daher erfüllt, während die dritte ist nicht und offensichtlich ist auch nicht die Bedingung (3) dieses Satzes erfüllt. Damit ist bestätigt, dass man in der Bedingung (2), Satz 7, die Forderung der Existenz eines schwachen Einselements in G nicht auslassen kann, d.h. die Eigenschaft V folgt nicht aus den Eigenschaften I, II.

Dagegen erfüllt die direkte Summe endlich vieler linear geordneter Gruppen die Bedingungen, Satz 7.

F. Fiala studiert in seiner Arbeit [2] einen gewissen Typ der Kompaktheit der Elemente des Komponentenverbandes, welche in der folgenden Definition angegeben sein wird.

Sei S ein Verband, $A \subseteq S$. Bezeichnen wir mit A^* die Menge aller oberen Beschränkungen der Menge A.

Der Verband S heisst *o-kompakt*, wenn zu einer beliebigen von oben beschränkten Untermenge $A \subseteq S$ eine endliche Teilmenge $A_1 \subseteq A$ mit $A_1^* = A^*$ existiert. Wir wollen eine l-Gruppe G *o-kompakt* heissen, wenn der Verband G o-kompakt ist.

Es ist offenbar, dass ein o-kompakter Verband von oben bedingt vollständig ist und eine o-kompakte Gruppe eine vollständige l-Gruppe ist.

Mit Rücksicht auf diese Tatsache kann man die vorige Definitionsbedingung äquivalent, wie es ersichtlich ist, in folgender Weise ausdrücken:

(*) Ist $a = \bigvee A$ für ein $a \in S$ und eine Untermenge $A \subseteq S$, existiert eine endliche Teilmenge $A_1 \subseteq A$, so dass $a = \bigvee A_1$.

Aus dieser Formulierung ist es offenbar, dass ein Verband S gerade dann o-kompakt ist, wenn jedes seiner Elemente von unten unerreichbar ist. Der Begriff des von unten unerreichbaren Elementes wurde in [1], S. 301, angeführt und in [11], 1.5 wurde es bewiesen, dass seine Definition die oben genannte Form (*) haben kann.

Es sei bemerkt, dass unter Verwendung des Begriffes der o-Kompaktheit die Bedingung (4), Satz 7, in folgender Weise geschrieben werden kann: Der Verband $\Gamma(G)$ ist o-kompakt.

Unter einer *diskret geordneten Gruppe* verstehen wir eine linear geordnete Gruppe, deren jedes Element einen unmittelbaren Vorgänger und einen unmittelbaren Nachfolger hat.

Unter einer *Gruppe des Typus C* verstehen wir die linear geordnete additive Gruppe der ganzen Zahlen.

Eine archimedische diskret geordnete Gruppe ist offenbar eine Gruppe des Typus G.

Mit $\mathfrak{k}(G)$ sei die Menge aller minimalen Komponenten der l-Gruppe G bezeichnet.

Satz 10. *Sei G eine l-Gruppe. Der Verband $\Gamma(G)$ ist kompakt erzeugt und minimale Komponenten in G sind genau dann diskret geordnete Gruppen, wenn die l-Gruppe G kompakt erzeugt ist, oder äquivalent damit, wenn eine l-Untergruppe H in G existiert, welche isomorph zu einer direkten Summe diskret geordneter Gruppen ist, und $\Gamma(G) \simeq \simeq \Gamma(H)$, $\mathfrak{k}(G) = \mathfrak{k}(H)$ gilt.*

Beweis. Im Falle $G = 0$ gilt der Satz offenbar. Sei $G \neq 0$. Es habe die l-Gruppe G die Eigenschaften I und III. Wir wollen beweisen, dass jeder Ultraantifilter in $\Pi'(G)$ ein Hauptantifilter ist. Damit wird nach Hilfssatz 5 bewiesen, dass jede minimale einfache Untergruppe in G maximale Komponente in G ist. Diese Bedingung, zusammen mit der Tatsache, dass minimale Komponenten in G diskret geordnete Gruppen sind, impliziert nach Satz 3.3.3 in [11] die kompakte Erzeugung der l-Gruppe G.

Sei also $\xi \in \mathfrak{U}(\Pi')$. Dann ist die Menge der Hauptkomponenten $\mathfrak{A} = \{K' : K \in \xi\}$ ein Ultrafilter in $\Pi(G)$. Jedes K' ist nach Voraussetzung Supremum endlich vieler Atome in $\Gamma(G)$, so dass jede absteigende Kette der Elemente in $\mathfrak{A}$ endlich ist. $\mathfrak{A}$

enthält daher minimale Elemente und weil $\mathfrak{A}$ ein Filter ist, ist das einzige minimale Element in $\mathfrak{A}$ das kleinste Element des Filters $\mathfrak{A}$. Also ist $\mathfrak{A}$ ein Hauptfilter in $\Pi(G)$ und ξ ist ein Hauptantifilter in $\Pi'(G)$.

Umgekehrt, sei G eine kompakt erzeugte l-Gruppe. Nach Satz 3.3.3 in [11] ist jede minimale einfache Untergruppe in G eine maximale Komponente in G. Nach [10] III, 7.2 ist die Menge aller minimalen einfachen Untergruppen in G gleich $\{\bigcup \xi : \xi \in \mathfrak{U}(\Pi')\}$ und nach Bemerkung 6 ist $\bigcap \{\bigcup \xi : \xi \in \mathfrak{U}(\Pi')\} = 0$. Da also der Durchschnitt (einer gewissen Menge und daher aller) maximalen Komponenten in G Null ist, ist das Supremum ihrer disjunktiven Komplemente, d.h. der Atome in $\Gamma(G)$, gleich G. Daher folgt schon leicht, dass der Verband $\Gamma(G)$ atomar ist und aus Satz 3, dass er kompakt erzeugt ist. Für den Beweis, dass das Atom M in $\Gamma(G)$ eine diskret geordnete Gruppe ist, bemerken wir zuerst, dass M eine linear geordnete Gruppe ist. Weiter ist es ersichtlich, dass Supremum aller Elemente $a \in M$, $a < 0$, existiert und entweder der Null oder dem mit der Null bedeckten Elemente gleich ist. Wenn das erste gelten sollte, wäre die Null Supremum endlich vieler Elemente $a \in M$, $a < 0$, also gleich einem von ihnen — ein Widerspruch. Daher ist M eine diskret geordnete Gruppe.

Zum Beweis der Äquivalenz der zweiten Bedingung unseres Satzes mit den Eigenschaften I und III setzen wir zuerst voraus, dass G I und III erfüllt. Im Beweis zu Satz 3 wurde eine l-Untergruppe H in G als die direkte Summe der minimalen Komponenten in G konstruiert, also ist die l-Gruppe H eine direkte Summe der Gruppen des Typus C und $\mathfrak{k}(G) = \mathfrak{k}(H)$. Nach Satz 3 gilt $\Gamma(G) \simeq \Gamma(H)$.

Umgekehrt, wenn eine l-Gruppe H der verlangten Eigenschaften existiert, dann gilt I nach Satz 3 und aus der Bedingung $\mathfrak{k}(K) = \mathfrak{k}(H)$ folgt III.

Das folgende Beispiel beweist, dass eine l-Gruppe, welche die Eigenschaften I und III hat, braucht nicht II erfüllen. Im weiteren werden wir sehen, dass eine andere Situation zutrifft, wenn wir noch die Forderung IV beifügen. Es stellt sich heraus, dass I, III und IV $\Rightarrow$ II.

Beispiel 2. Sei G eine direkte Summe unendlich vieler diskret geordneter Gruppen. $\Gamma(G)$ ist kompakt erzeugt (nach Satz 3) und jede Hauptkomponente in G ist ein kompaktes Element in $\Gamma(G)$ — G erfüllt daher I, II und offenbar auch III. Weiterhin sei F eine Gruppe des Typus C. Konstruieren wir nach [10], 12.3 (S. 226) eine l-Gruppe $\mathfrak{G}$ wie folgt: Die additive Gruppe $\mathfrak{G}$ ist die direkte Summe der additiven Gruppen G und F. Die Anordnung in $\mathfrak{G}$ sei nach der Regel definiert: für $(f_i, g_i) \in \mathfrak{G} (i = 1, 2)$ ist $(f_1, g_1) \geqq (f_2, g_2)$, wenn $f_1 > f_2$ oder $f_1 = f_2, g_1 \geqq g_2$. Es gilt $\Gamma(\mathfrak{G}) \setminus \{\mathfrak{G}\} = \Gamma(G) \setminus \{G\}$, so dass die Verbände $\Gamma(\mathfrak{G})$ und $\Gamma(G)$ isomorph sind. $\mathfrak{G}$ ist Hauptkomponente in $\mathfrak{G}$, da alle Elemente (f, g), wobei $f \neq 0$, schwache Einselemente in $\mathfrak{G}$ sind (während G keine schwachen Einselemente hat) und $\mathfrak{G}$ ist Supremum aller Atome in $\Gamma(\mathfrak{G})$, deren es unendlich viele gibt und kann daher kein Supremum endlich vieler kompakte Elemente in $\Gamma(\mathfrak{G})$ sein (da jedes kompakte Element in $\Gamma(\mathfrak{G})$ und auch in $\Gamma(G)$ ein Supremum endlich vieler Atome in $\Gamma(\mathfrak{G})$ ist). Minimale Komponenten in $\mathfrak{G}$ und in G sind Gruppen des Typus C.

Demgegenüber ist die l-Gruppe $\mathfrak{G}$ kompakt erzeugt. Dies folgt unmittelbar aus Satz 10. Da die l-Gruppe G kompakt erzeugt ist, erfüllt der Verband $\Gamma(G)$, wie es sich aus Satz 10 ergibt, die Bedingungen I und III. Da die Verbände $\Gamma(G)$ und $\Gamma(\mathfrak{G})$ isomorph sind, so erfüllt $\Gamma(\mathfrak{G})$ die Bedingung I und da $\Gamma(G) \setminus \{G\} = \Gamma(\mathfrak{G}) \setminus \{\mathfrak{G}\}$, so erfüllt $\Gamma(\mathfrak{G})$ die Bedingung III. Wieder nach Satz 10 ist die l-Gruppe $\mathfrak{G}$ kompakt erzeugt.

Direkter Beweis ist, wie folgt.

Ist $(f, g) = \bigvee_A (a_\alpha, b_\alpha)$, dann existiert ein $(a_{\alpha_0}, b_{\alpha_0}) \in A$, so dass $a_{\alpha_0} = f$ (da F des Typus C ist) und es gilt $(f, g) = \bigvee_B (a_\alpha, b_\alpha)$, wobei sich Supremum nur auf die Menge B der Elemente aus A bezieht, deren erste Koordinate a_{α_0} ist. Dann ist natürlich

$$(f, g) = \bigvee_B (a_\alpha, b_\alpha) = (a_{\alpha_0}, \bigvee_C b_\alpha),$$

wobei C die Menge der zweiten Koordinaten der Elemente aus B ist. Daher $g = \bigvee_C b_\alpha$. Aus der kompakten Erzeugung der l-Gruppe G folgt die Existenz einer endlichen Teilmenge $D \subseteq C$ mit $g = \bigvee_D b_\alpha$. Daher $(f, g) = \bigvee_{b_\alpha \in D} (a_{\alpha_0}, b_\alpha)$, womit bestätigt ist, dass die l-Gruppe $\mathfrak{G}$ kompakt erzeugt ist. Damit ist der Beweis durch die Bestätigung der Definitionsforderung durchgeführt.

Dieselbe Behauptung kann man noch anders mittels des Satzes 3.3.3 in [11] beweisen, so dass wir bestätigen, dass minimale Komponenten in $\mathfrak{G}$ Gruppen des Typus C sind (und dies ist richtig, da es evident in G richtig ist) und dass minimale einfache Untergruppen in $\mathfrak{G}$ maximale Komponenten in $\mathfrak{G}$ sind. Das andere folgt direkt daraus, dass $\Pi'(\mathfrak{G})$ und $\Pi'(G)$ sich nur durch die grössten Elemente unterscheiden, so dass die Mengen $\mathfrak{U}(\Pi'(\mathfrak{G}))$ und $\mathfrak{U}(\Pi'(G))$ identisch sind und ebenfalls sind die Mengen maximaler Komponenten in $\mathfrak{G}$ und in G identisch. Es bleibt nur zu bemerken, dass jede minimale einfache Untergruppe Vereinigung der Elemente eines Ultraantifilters in Π' ist.

Bemerkung 9. Den Fall, in dem eine l-Gruppe G die Eigenschaften I, III, V hat, erledigen wir mit folgender Bemerkung. Im Beispiel 2 wurde mittels zwei l-Gruppen G und F solche l-Gruppe $\mathfrak{G}$ konstruiert, dass $\mathfrak{G}$ eine kompakt erzeugte l-Gruppe ist (sie erfüllt also I, III) und enthält ein schwaches Einselement (d.h. noch V), während die l-Gruppe G nur I und III erfüllt, doch erfüllt sie nicht V. Dabei sind die Verbände $\Gamma(G)$ und $\Gamma(\mathfrak{G})$ isomorph und $\Gamma(G) \setminus \{G\} = \Gamma(\mathfrak{G}) \setminus \{\mathfrak{G}\}$.

Definieren wir auf einer l-Gruppe G die der folgenden Äquivalenzrelation $\sim : a \sim b \equiv a'' = b''$ entsprechende Zerlegung $R(= G/\sim)$.

Satz 11. *Sei G eine l-Gruppe. Der Verband $\Gamma(G)$ ist kompakt erzeugt, die Hauptkomponenten sind kompakte Elemente in $\Gamma(G)$ und minimale Komponenten in G sind diskret geordnete Gruppen gerade dann, wenn die l-Gruppe G kompakt erzeugt ist und wenn zu einem beliebigen $0 < a \in G^+$ ein $b \sim a$ existiert, welches Supremum endlich vieler Atome in G^+ ist, oder äquivalent damit, wenn eine l-Untergruppe H in G existiert, die isomorph zu einer direkten Summe diskret geordneter Gruppen ist, die $\mathfrak{k}(G) = \mathfrak{k}(H)$ erfüllt und wenn ein $\Pi(G)$ auf $\Pi(H)$ abbildender Isomorphismus des Verbandes $\Gamma(G)$ auf $\Gamma(H)$ existiert.*

Beweis. Es gelte I, II, III. Nach Satz 10 ist die l-Gruppe G kompakt erzeugt. Für $0 < a \in G^+$ ist nach Satz 4 die Hauptkomponente a'' Supremum endlich vieler minimaler Komponenten, $a'' = \bigvee_i b_i''$ (i läuft eine endliche Menge der Indizes durch). Da b_i'' eine diskret geordnete Gruppe ist, das kleinste von den Elementen > 0 der Gruppe b_i'' ist ein Atom in G^+, sagen wir c_i. Es gilt $c_i'' = b_i''$, $a'' = \bigvee_i c_i'' = (\bigvee_i c_i)''$, so dass $\bigvee_i c_i = b \sim a$.

Umgekehrt, es gelte die Bedingung des Satzes. Nach Satz 10 gilt I und III. Für den Beweis der Gültigkeit von II sei a'' eine Hauptkomponente. Man kann $a \in G^+$ voraussetzen, da $a'' = |a|''$. Nach Voraussetzung existiert ein $b \sim a$, welches Supremum endlich vieler Atome in G^+, $b = \bigvee_i c_i$, ist. Dann gilt $a'' = b'' = (\bigvee_i c_i)'' = = \bigvee_i c_i''$. Damit ist es bewiesen, dass jede Hauptkomponente Supremum endlich vieler minimaler Komponenten in G ist, was nach Satz 4 II zur Folge hat.

Die Äquivalenz zwischen den Bedingungen (I, II und III) und der zweiten Bedingung im Satz folgt aus Satz 4 und Satz 10.

Satz 12. *Eine l-Gruppe G hat die Eigenschaften I, II, III und V genau dann, wenn eine von den folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:*

(i) *Der Verband $\Gamma(G)$ ist endlich und seine Atome sind diskret geordnete Gruppen.*

(ii) *Die l-Gruppe G ist kompakt erzeugt und jede Menge der Atome in G^+ hat ein Supremum.*

(iii) *Es existiert eine l-Untergruppe H in G, die isomorph zu einer direkten Summe endlich vieler diskret geordneter Gruppen ist, für die $\mathfrak{k}(G) = \mathfrak{k}(H)$ gilt und ein Isomorphismus $\Gamma(G)$ auf $\Gamma(H)$ existiert, der $\Pi(G)$ auf $\Pi(H)$ abbildet.*

Beweis. I, II, III, V $\Leftrightarrow$ (i) nach Satz 7. Den Beweis der Äquivalenz (i) $\Leftrightarrow$ (ii) führen wir mit dieser Bemerkung ein. Die Bedingung (i) impliziert (nach Satz 10) die kompakte Erzeugung der l-Gruppe G. Von dieser Tatsache ausgehend, werden wir leicht bestätigen, dass, wenn (i) oder (ii) gilt, die Abbildung $a \to a''$, wobei a ein Atom in G^+ ist, eine 1-1-deutige Korrespondenz zwischen der Menge aller Atome in G^+ und der Menge aller Atome in $\Gamma(G)$ darstellt. (Siehe [7], 1.10 und 2.2).

Wenn jetzt (i) erfüllt ist, ist der Verband $\Gamma(G)$ endlich und daher ist endlich auch die Menge aller Atome in G^+. Mit Rücksicht auf Satz 10 folgt daher (ii).

Es gelte nun (ii), es sei $\{c_\alpha\}$ die Menge aller Atome in G^+. $\bigvee c_\alpha$ existiert nach Voraussetzung, also aus der kompakten Erzeugung der l-Gruppe G folgt die Existenz einer endlichen Teilmenge $\{c_{\alpha_i}\} \subseteq \{c_\alpha\}$ mit der Eigenschaft $\bigvee_\alpha c_\alpha = \bigvee_i c_{\alpha_i}$. Wenn ein $c_0 \in \in \{c_\alpha\}$, $c_0 \overline{\in} \{c_{\alpha_i}\}$ existiert, so gilt $0 \neq c_0'' = c_0'' \wedge \bigvee_\alpha c_\alpha'' = c_0'' \wedge (\bigvee_\alpha c_\alpha)'' = c_0'' \wedge (\bigvee_i c_{\alpha_i})'' = = c_0'' \wedge \bigvee_i c_{\alpha_i}'' = \bigvee_i (c_0'' \wedge c_{\alpha_i}'') = 0$ — ein Widerspruch. Die Menge aller Atome in G^+ ist also endlich. Mit Rücksicht auf die erwähnte Korrespondenz zwischen den Atomen in G^+ und den Atomen in $\Gamma(G)$ existieren nur endlich viele Atome in $\Gamma(G)$. Da der Verband $\Gamma(G)$ nach Satz 10 kompakt erzeugt und nach Satz 3 atomar ist, ist er endlich. Nochmals nach Satz 10 sind die Atome in $\Gamma(G)$ diskret geordnet. Daher (i).

Die Äquivalenz zwischen den Bedingungen (I, II, III und V) und der Bedingung (iii) folgt aus Satz 7 und Satz 10.

Satz 13. *Sei G eine l-Gruppe. Der Verband $\Gamma(G)$ ist kompakt erzeugt und die minimalen Komponenten in G sind direkte Faktoren in G genau dann, wenn die l-Gruppe G isomorph zu einer vollständig subdirekten Summe linear geordneter Gruppen ist.*

Beweis. Der Satz gilt trivial, wenn $G = 0$. Sei $G \neq 0$. Die l-Gruppe G erfülle I und IV. Nach Satz 3 ist der Verband $\Gamma(G)$ atomar. Die Atome in $\Gamma(G)$ sind linear geordnete Gruppen und nach IV sind sie direkte Faktoren in G. Ein linear geordneter direkter Faktor in G ist ein minimaler direkter Faktor in G. Nach [6], Satz 3, ist die l-Gruppe G isomorph zu einer vollständig subdirekten Summe ihrer minimalen direkten Faktoren, also linear geordneter Gruppen.

Umgekehrt, sei die Bedingung erfüllt. Der Verband $\Gamma(G)$ ist kompakt erzeugt und seine Atome sind direkte Faktoren in G, da der Komponentenverband der l-Gruppe, die vollständig subdirekte Summe linear geordneter Gruppen ist, atomar ist und seine Atome (minimale) direkte Faktoren der l-Gruppe sind. Daher I und IV.

Satz 14. *Eine l-Gruppe G hat die Eigenschaften I, II und IV genau dann, wenn sie isomorph zu einer direkten Summe linear geordneter Gruppen ist.*

Beweis. Wenn $G = 0$, gilt der Satz trivial. Sei $G \neq 0$. Ist die Bedingung erfüllt, hat die l-Gruppe G offenbar die Eigenschaften I, II, IV.

Es habe eine l-Gruppe G die Eigenschaften I, II und IV. Nach Satz 13 ist die l-Gruppe G isomorph zu einer vollständig subdirekten Summe $\mathfrak{G}$ linear geordneter Gruppen $\{G_\nu : \nu \in N\}$. Sei $f \in \mathfrak{G}$, $A = \{\nu \in N : f(\nu) \neq 0\}$. Bezeichnen wir für $\alpha \in A$ mit f_α die eigene Spitze in $\mathfrak{G}$, für die $f_\alpha(\alpha) = f(\alpha)$, $f_\alpha(\nu) = 0$ für übrigbleibende $\nu \in N$, dann gilt $f = \bigvee_{\alpha \in A} f_\alpha$, $f'' = (\bigvee_{\alpha \in A} f_\alpha)'' = \bigvee_{\alpha \in A} f''_\alpha$, f''_α sind Atome in $\Gamma(\mathfrak{G})$ ([7], 2.2) und sind untereinander verschieden, da die Elemente f_α paarweise disjunktiv sind. Die Hauptkomponente f'' ist nach Voraussetzung ein kompaktes Element in $\Gamma(\mathfrak{G})$, also Supremum endlich vieler Atome in $\Gamma(\mathfrak{G})$. Daraus ergibt es sich leicht, dass die Menge A endlich ist und dass $\mathfrak{G}$ somit eine direkte Summe linear geordneter Gruppen $\{G_\nu : \nu \in N\}$ ist.

Satz 15. *Eine l-Gruppe G hat die Eigenschaften I, II, IV und V genau dann, wenn sie isomorph zu einer direkten Summe endlich vieler linear geordneter Gruppen ist.*

Beweis. Wenn $G = 0$, gilt die Behauptung trivial. Sei $G \neq 0$. Die l-Gruppe G mit den Eigenschaften I, II, IV und V erfüllt nach Satz 14 die Bedingung des Satzes, denn genau die Elemente ohne Nullkoordinaten sind schwache Einselemente der direkten Summe linear geordneter Gruppen.

Umgekehrt eine die Bedingung des Satzes erfüllende l-Gruppe erfüllt offenbar I, II, IV und V.

Bemerkung 10. Zum Beweis folgender Sätze benützen wir diese bekannten Fakten:

(i) G sei eine l-Gruppe $\neq 0$. Die l-Gruppe G ist isomorph zu einer direkten Summe der Gruppen des Typus C genau dann, wenn der Verband $\Gamma(G)$ atomar ist, Supremum in $\Gamma(G)$ durch die Summe realisiert wird und die Atome in $\Gamma(G)$ Gruppen des Typus C sind.

Es folgt aus Satz 16, [8].

(ii) Eine vollständige kompakt erzeugte l-Gruppe ist isomorph zu einer direkten Summe der Gruppen des Typus C.

(iii) Die direkte Summe der Gruppen des Typus C ist eine vollständige kompakt erzeugte l-Gruppe.

Die Sätze (ii) und (iii) kann man z. B. in [11], Abs. 2, (I) und (III) finden.

(iv) Eine l-Gruppe G ist kompakt erzeugt genau dann, wenn für jedes $a \in G$ aus der Relation $a = \bigvee A$, wobei $A \subseteq G$, die Existenz einer endlichen Teilmenge $A_1 \subseteq A$ folgt, so dass $a = \bigvee A_1$ gilt.

Siehe [11], 1.7.

(v) Eine archimedische l-Gruppe $G \neq 0$ ist kompakt erzeugt genau dann, wenn sie isomorph zu einer direkten Summe der Gruppen des Typus C ist. Cf. [11], 3.5.

Satz 16. *G sei eine l-Gruppe. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) *Die l-Gruppe G hat die Eigenschaften I, III, IV.*
(2) *Die l-Gruppe G hat die Eigenschaften I, II, III, IV.*
(3) *Die l-Gruppe G ist isomorph zu einer direkten Summe der diskret geordneten Gruppen.*
(4) *Die l-Gruppe G ist kompakt erzeugt und ist isomorph zu einer vollständig subdirekten Summe diskret geordneter Gruppen.*

Beweis. $1 \Rightarrow 4 \Rightarrow 2$: Die Implikation $1 \Rightarrow 4$ folgt aus Sätzen 10 und 13. Aus denselben Gründen wird $4 \Rightarrow 2$ bewiesen sein, wenn wir zeigen, dass eine (2) erfüllende l-Gruppe die Eigenschaft II hat, d.h. (Satz 3) dass die Hauptkomponente a'' in G Supremum endlich vieler Atome in $\Gamma(G)$ ist. Man kann $a > 0$ voraussetzen. Wie es aus der Realisierung der l-Gruppe G in der Form einer vollständig subdirekten Summe diskret geordneter Gruppen ersichtlich ist, ist das Element a Supremum eigener Spitzen. Aus der kompakten Erzeugung der l-Gruppe G folgt, dass das Element a Supremum endlich vieler eigener Spitzen ist, also ist die Hauptkomponente a'' Supremum endlich vieler minimaler Komponenten in G (die durch eigene Spitzen erzeugt sind — siehe [7], 2.2).

$2 \Rightarrow 1$ ist evident.

Die Äquivalenz zwischen den Bedingungen 3 und 2 folgt unmittelbar aus Satz 14.

Satz 17. *G sei eine l-Gruppe. Jede beliebige aus Satz 16 um die Forderung der archimedischen Eigenschaft der l-Gruppe G erweiterte Aussage ist äquivalent mit jeder beliebigen aus den folgenden:*

(1) *Der Verband $\Gamma(G)$ ist atomar, Supremum in $\Gamma(G)$ wird durch die Summe realisiert und die Atome in $\Gamma(G)$ sind Gruppen des Typus C.*
(2) *Die l-Gruppe G ist isomorph zu einer direkten Summe der Gruppen des Typus C.*
(3) *Die l-Gruppe G ist vollständig und kompakt erzeugt.*
(4) *Die l-Gruppe G ist o-kompakt.*

Beweis. Wenn $G = 0$, gilt der Satz trivial. Sei $G \neq 0$. Wir beweisen, dass die um die Forderung der archimedischen Eigenschaft der l-Gruppe G erweiterte Bedingung (2) des Satzes 16 (es sei mit (2') bezeichnet) die Bedingung (4) des verliegenden Satzes impliziert.

$2' \Rightarrow 4$: Aus Satz 4 folgt, dass der Verband $\Gamma(G)$ atomar ist und jede Hauptkomponente ist Supremum endlich vieler Atome in $\Gamma(G)$. Sei $a = \bigvee B$, wobei $a \in G$, $B \subseteq G$.

Die Komponente a'' ist Supremum endlich vieler Atome in $\Gamma(G)$, also ihre Summe, $a'' = \sum_{i=1}^{n} c_i''$, denn die Atome in $\Gamma(G)$ sind direkte Faktoren der l-Gruppe G. Daher schliessen wir für beliebige $e \in a''$, wie folgt: $e = \sum_{i=1}^{n} n_i^{(e)} c_i$ für geeignete ganze Zahlen $n_i^{(e)}$.

Wählen wir jetzt einen Index i und betrachten das System der i-Koordinaten $n_i^{(b)} c_i$ aller Elemente $b \in B$. Das ist sinnvoll, denn $b \in a''(b \in B)$. Dieses System ist mit der i-Koordinate des Elementes a von oben begrenzt, also mit Rücksicht auf den Typ der geordneten Menge c_i'' enthält dieses System das grösste Element, sagen wir $m_i c_i$. Dann existiert in der Menge B ein Element, sagen wir b_i, welches $m_i c_i$ als i-Koordinate hat. Dann ist

$$a = \bigvee B = \bigvee_{b\in B} \sum_{i=1}^{n} n_i^{(b)} c_i = \sum_{i=1}^{n} \bigvee_{b\in B} n_i^{(b)} c_i = \sum_{i=1}^{n} m_i c_i == \bigvee_{1=i}^{n} b_i \leqq \bigvee B = a,$$

d.h. $a = \bigvee_{i=1}^{n} b_i$ ist Supremum einer endlichen Teilmenge der Menge B. Wenn wir beweisen, dass die l-Gruppe G vollständig ist, wird (4) bewiesen sein. Aus den Eigenschaften I und III folgt nach Satz 10 die kompakte Erzeugung der l-Gruppe G, welche zusammen mit der archimedischen Eigenschaft impliziert, dass die l-Gruppe G isomorph zu einer direkten Summe der Gruppen des Typus C ((v), Bemerkung 10) ist und solche direkte Summe ist eine vollständige l-Gruppe ((iii), Bemerkung 10).

$4 \Rightarrow 2'$: Aus der Bedingung (4) unseres Satzes folgt die Vollständigkeit und daher die archimedische Eigenschaft der l-Gruppe G; wir beweisen noch, dass daraus auch die Bedingung (2), Satz 16, folgt.

Es gelte $f'' = \bigvee \mathfrak{A}$, wobei $f \in G$, $\mathfrak{A} \subseteq \Gamma G$). Dann ist $f'' = \bigvee \{f''_\alpha : \alpha \in B\}$ für geeignete Menge der Hauptkomponenten $\{f''_\alpha : \alpha \in B\}$. Man kann $f \geqq f_\alpha \geqq 0$, $\alpha \in B$, voraussetzen, da $|f|'' = f''$, $(|f| \wedge |f_\alpha|)'' = f''_\alpha$ gilt. Es sei mit A die Menge der Suprema aller endlichen Untermengen der Menge $\{f_\alpha : \alpha \in B\}$ bezeichnet. Es ist $f \in A^*$. Nach Voraussetzung existiert eine endliche Untermenge $A_1 = \{g_1, \ldots, g_n\} \subseteq A$, so dass $A_1^* = A^*$. Bezeichnen wir $g = \bigvee \{g_1, \ldots, g_n\}$. Es gilt $g \in A_1^* = A^*$, also $g \geqq g_\beta$, $g'' \supseteq g''_\beta$ für alle $g_\beta \in A$. Daher

$$\bigvee_\beta g''_\beta \supseteq \bigvee_{i=1}^{n} g''_i = (\bigvee_{i=1}^{n} g_i)'' = g'' \supseteq \bigvee_\beta g''_\beta = \bigvee_{\alpha\in B} f''_\alpha = f'',$$

woraus

$f'' = g'' = \bigvee_{i=1}^{n} g''_i = \bigvee \{f''_\alpha : \alpha \in C\}$ für eine geeignete endliche Menge $C \subseteq B$ folgt und somit $f'' = \bigvee \mathfrak{A}_1$ für eine geeignete endliche Untermenge $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}$.

Wir schliessen so: Jede Hauptkomponente ist kompaktes Element in $\Gamma(G)$ und da jedes Element aus $\Gamma(G)$ Supremum der Hauptkomponenten ist, ist der Verband $\Gamma(G)$ kompakt erzeugt.

Beweis der übrigbleibenden Behauptung. Jeder abgeschlossene Unterverband des Verbandes G ist ein o-kompakter Verband und somit auch jede minimale Komponente M der l-Gruppe G. Infolgedessen ist die minimale Komponente kompakt erzeugt (Bemerkung 8 (iv)) und eine vollständige l-Gruppe. Aus der Bemerkung 10, (ii) schliessen wir dann, dass die linear geordnete Gruppe M — da sie nach (ii) isomorph zu einer direkten Summe der Gruppen des Typus C ist — eine Gruppe des Typus C ist. Da G eine vollständige l-Gruppe ist, sind alle ihren Komponenten, also auch die minimalen, direkte Faktoren in G.

Die obige Implikation $(4) \Rightarrow (2')$ kann man noch mit einer anderen Methode beweisen, und zwar so, dass wir die Kette der Implikationen $(4) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2) \Rightarrow$ $\Rightarrow (1) \Rightarrow (2')$ beweisen.

$4 \Rightarrow 3$ nach (iv)
$3 \Rightarrow 2$ nach (ii)
$2 \Rightarrow 1$ nach (i)

$1 \Rightarrow 2'$: Atome in $\Gamma(G)$ sind kompakte Elemente. In der Tat, wenn $A = \bigvee_\alpha K_\alpha$, A Atom in $\Gamma(G)$, $\{K_\alpha\} \subseteq \Gamma(G)$, $A \nsubseteq K_\alpha$ für jedes α, dann ist $0 = A \wedge K_\alpha$ für alle α und daher $0 = A \wedge \bigvee_\alpha K_\alpha = A \wedge A$, also $A = 0$ — ein Widerspruch. Infolgedessen ist der Verband $\Gamma(G)$ kompakt erzeugt. Minimale Komponenten in G sind Gruppen des Typus C, da Atome in $\Gamma(G)$ so sind. Aus der Forderung an Suprema folgt, dass jede Komponente, also auch die minimale, ein direkter Faktor in G ist. (In der Tat, aus den Relationen $K \in \Gamma(G)$, $a \in K$, $x \in G$ folgt $x = a_1 + a_2$, $a_1 \in K$, $a_2 \in K'$ und daher mit Rücksicht auf die Vertauschbarkeit der disjunktiven Elemente erhalten wir die Normalität der Untergruppe $K : x + a - x = a_1 + a_2 + a - a_2 - a_1 = a_1 + a - a_1 \in K$.)

Wir bewiesen, dass die l-Gruppe G die Eigenschaften I, III, IV hat. Aus Satz 16 folgt, dass G auch die Eigenschaft II hat. Schliesslich, die l-Gruppe G ist vollständig und daher archimedisch, denn nach (i), Bemerkung 10, ist sie isomorph zu einer direkten Summe der Gruppen des Typus C und nach (iii) derselben Bemerkung ist sie vollständig. Daher (2').

Satz 18. *G sei eine l-Gruppe. Folgende Bedingungen sind äquivalent:*

(1) *Die l-Gruppe G hat die Eigenschaften I, III, IV, V.*

(2) *Die l-Gruppe G hat die Eigenschaften I, II, III, IV, V.*

(3) *Die l-Gruppe G ist isomorph zu einer direkten Summe endlich vieler diskret geordneter Gruppen.*

Beweis. $1 \Leftrightarrow 2$ folgt aus Satz 16, $2 \Leftrightarrow 3$ aus Satz 16 und 15.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Birkhoff, G., Frink, O., Representations of lattices by sets. Trans. Am. Math. Soc. 64 (1948), 299—316.

[2] Fiala, F., Verbandsgruppen mit o-kompakten Komponentenverbänden. Archivum Math. 3 (1967), 177—184.

[3] Fuchs, L., Častično uporjadočennyje algebraičeskije sistemy. Moskva 1965.

[4] Jakubík, J., K teorii častično uporjadočennych grupp. Časopis pěst. mat. 86 (1961), 318—330.

[5] Papert, D., A representation theory of lattice-groups. Proc. London Math. Soc., 3. ser. 12 (1962), 100—120.

[6] Šik, F., Über Summen einfach geordneter Gruppen. Czechosl. Math. J. 8 (83), 1958, 22—53.

[7] Šik, F., Über die Beziehungen zwischen eigenen Spitzen und minimalen Komponenten einer l-Gruppe. Acta Math. Hung. XIII (1962), 171—178.

[8] Šik, F., Über direkte Zerlegungen gerichteter Gruppen. Math. Nachrichten 25 (1963), 95—110.

[9] Šik, F., Compacidad de ciertos espacios de ultraantifiltros. Memorias Fac. Cie.Univ. Habana, vol. 1, no 1 (1963), 19—25.

[10] Šik, F., Struktur und Realisierungen von Verbandsgruppen. Memorias Fac. Cie. Univ. Habana, I, II vol. 1, no 3 (1964), 1—11, 12—29, III vol. 1, no 4 (1966), 1—20, V Math. Nachrichten 33 (1967), 221—229.

[11] Šik, F., Archimedische kompakt erzeugte Verbandsgruppen. Math. Nachrichten 38 (1968), 323—340.

F. Šik

Mathematisches Institut
J. E. Purkyně Universität, Brno
Tschechoslowakei