Archivum Mathematicum

Oldřich Kopeček

Das Produkt von Hüllenstrukturen

Archivum Mathematicum, Vol. 7 (1971), No. 2, 87--98

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104742

SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS, ARCH. MATH. 2,
VII: 87—98, 1971

DAS PRODUKT VON HÜLLENSTRUKTUREN

OLDŘICH KOPEČEK, Brno

(Eingegangen am 7. Juli 1969)

In dieser Arbeit werden Hüllenoperatoren auf einer Menge betrachtet, besonders — vom zweiten Absatz an — im Fall, daß die Menge ein kartesisches Produkt von Mengen ist. In der Menge aller Hüllenoperatoren auf einer solchen Menge beschränken wir uns auf die sogenannten Produkthüllenoperatoren, durch die wir das sogenannte Produkt von Hüllenstrukturen definieren.

In den letzten drei Absätzen untersuchen wir ferner speziell ein Produkt von Hüllenstrukturen im Zusammenhang mit einem direkten Produkt von Ω-Algebren, mit einem Kardinalprodukt von vollständigen Verbänden und mit einem Produkt von topologischen Räumen.

1. DIE HÜLLENOPERATOREN AUF EINER MENGE

Es sei A eine Menge. Wir bezeichnen mit $\mathscr{B}(A)$ die Menge aller Teilmengen der Menge A. Wir werden eine Abbildung $J: \mathscr{B}(A) \to \mathscr{B}(A)$ mit folgenden Eigenschaften betrachten:

J1.: $X \subseteq J(X)$ für beliebiges $X \subseteq A$;

J2.: aus $X \subseteq Y$ folgt $J(X) \subseteq J(Y)$ für beliebige $X, Y \subseteq A$.

Wenn ferner für J die Eigenschaft

J3.: $JJ(X) = J(X)$ für jedes $X \subseteq A$

erfüllt wird, nennen wir J einen *Hüllenoperator* auf A.

Wir bezeichnen die Mengen $\mathscr{I} = \{ J \mid J: \mathscr{B}(A) \to \mathscr{B}(A)$ mit den Eigenschaften J1, J2$\}$, $\mathscr{J} = \{J \in \mathscr{I} \mid$ es gilt J3$\}$.

1.1. Definition: Es seien $J_1, J_2 \in \mathscr{I}$ beliebig. Wir definieren

$$J_1 \leqq J_2 \Leftrightarrow J_1(X) \subseteq J_2(X) \text{ für jedes } X \subseteq A.$$

1.2. Lemma: *$\leqq$ ist eine Ordnung auf der Menge $\mathscr{I}$.*

1.3. Definition: Wir bezeichnen mit $J_{\mathrm{I}} \in \mathscr{J}$ den Hüllenoperator, für den $J_{\mathrm{I}}(X) = A$ für beliebiges $X \subseteq A$ gilt und mit $J_0 \in \mathscr{J}$ den Hüllenoperator, für den $J_0(X) = X$ für beliebiges $X \subseteq A$ gilt; J_0 nennen wir *trivial.*

1.4. Lemma: *$\mathscr{I}$, $\mathscr{J}$ sind geordnete Mengen, für die J_{I} bzw. J_0 ein größtes bzw. ein kleinstes Element ist.*

1.5. Lemma: *Es sei $(S, ., \leq)$ eine geordnete Halbgruppe mit einem kleinsten Element e, das auch ein Einselement ist. Es seien $a, b \in S$ idempotent. Das Element ab ist idempotent genau dann, wenn $ba \leq ab$ gilt.*

Beweis: Wir zeigen erstens die Notwendigkeit von Bedingung. Weil $e \leq a$ gilt, gilt $ba \leq aba$ und weil $e \leq b$ gilt, gilt $aba \leq abab = ab$. Wir bekommen also die Beziehung $ba \leq ab$. Wir zeigen noch, daß die Bedingung auch hinreichend ist. Es genügt leicht die Beziehung zu $abab \leq ab$ zu zeigen. Aus der Voraussetzung $ba \leq ab$ folgt $abab \leq aabb = ab$ und das ist zu beweisen.

1.6. Lemma: *Es sei $(S, ., \leq)$ eine geordnete Halbgruppe mit einem kleinsten Elemente, das auch ein Einselement ist. Es seien $a, b \in S$ idempotent. Dann gilt $ab = ba = b$ genau dann, wenn $a \leq b$.*

Beweis: Die Notwengigkeit ist klar: aus $e \prec b$ folgt $a \prec ab = b$. Aus $e \prec a \prec b$ folgt umgekehrt $b \prec ab \prec bb = b$ und $b \prec ba \prec bb = b$. Also gilt $ab = ba = b$.

Wir definieren auf $\mathscr{J}$ auf übliche Weise ein Produkt: wir setzen für beliebiges $X \subseteq A$ $(J_1 J_2)(X) = J_1(J_2(X))$, wobei $J_1, J_2 \in \mathscr{J}$ sind.

1.7. Lemma: *$\mathscr{J}$ ist eine geordnete Halbgruppe (bezüglich . und $\leqq$) mit Einselement J_0.*

Beweis: Wenn $J_1, J_2 \in \mathscr{J}$ gilt, dann gilt $J_1 J_2 \in \mathscr{J}$, weil die Eigenschaften J1, J2 für das Produkt enthalten werden. Wenn $J \in \mathscr{J}$ ferner beliebig ist, ist $JJ_0 = J_0 J = J$ die allgemeine Eigenschaft des Produktes einer Abbildung mit der identischen Abbildung. Für $J_1, J_2, J \in \mathscr{J}$ mit $J_1 \leqq J_2$ gilt endlich $JJ_1 \leqq JJ_2$, $J_1 J \leqq JJ_2$: es sei $X \subseteq A$ beliebig, dann folgt aus $J_1(X) \subseteq J_2(X)$ stets $JJ_1(X) \subseteq JJ_2(X)$ nach J2; ferner folgt für beliebiges $X \subseteq A$ aus der Bedingung $J_1 \leqq J_2$ stets $J_1 J(X) \subseteq J_2 J(X)$ (siehe 1.1).

1.8. Satz: *Für beliebige $J_1, J_2 \in \mathscr{J}$ gilt $J_1 J_2 \in \mathscr{J}$ genau dann, wenn $J_2 J_1 \leqq J_1 J_2$ in $\mathscr{J}$ gilt.*

In der Tat folgt die Behauptung aus 1.5, 1.7 und 1.4.

1.9. Satz: *Es seien $J_1, J_2 \in \mathscr{J}$ beliebig. Dann gilt $J_1 J_2 = J_2 J_1 = J_2$ dann und nur dann, wenn $J_1 \leqq J_2$ gilt.*

Die Behauptung folgt aus 1.6, 1.7 und 1.4.

1.10. Folgerung: *In der Menge der Hüllenoperatoren $\mathscr{J}$ ist ein beliebiges Element J_1 ein Einselement für alle $J \in \mathscr{J}$ mit $J \geqq J_1$.*

2. DIE PRODUKTHÜLLENOPERATOREN AUF EINER MENGE

Es sei $A = \underset{\iota \in G}{\times} A_\iota$, wobei G, A_ι $(\iota \in G)$ Mengen sind.

Für die Menge $A = \underset{\iota \in G}{\times} A_\iota$ erklären wir für beliebiges $\iota \in G$ die Abbildung pr_ι: $A \to A_\iota$ auf übliche Weise: $\mathrm{pr}_\iota x = x(\iota)$ für beliebiges $x \in A$. Für eine beliebige Abbildung $f\colon B \to C$ und für beliebiges $X \subseteq B$ bezeichnet fX ferner wie üblich die Menge $\{fx \mid x \in X\}$.

2.1. Satz: *Es sei $A = \underset{\iota \in G}{\times} A_\iota$ und für beliebiges $\iota \in G$ K_ι ein Hüllenoperator auf A_ι. Dann ist die Abbildung J: $\mathscr{B}(A) \to \mathscr{B}(A)$, für die die Gleichung*

$$J(X) = \underset{\iota \in G}{\times} K_\iota(pr_\iota X) \tag{*}$$

für beliebiges $X \subseteq A$ gilt, ein Hüllenoperator auf der Menge A.

Beweis: a) $X \subseteq J(X)$ gilt offenbar für beliebiges $X \subseteq A$; b) aus $X \subseteq Y$ folgt $J(X) \subseteq J(Y)$ für beliebige $X, Y \subseteq A$; in der Tat folgt aus der Voraussetzung $\mathrm{pr}_\iota X \subseteq \mathrm{pr}_\iota Y$ für alle $\iota \in G$, also gilt $K_\iota(\mathrm{pr}_\iota X) \subseteq K_\iota(\mathrm{pr}_\iota Y)$ $(\iota \in G)$ und daraus ergibt sich schließlich $J(X) \subseteq J(Y)$; c) es gilt $JJ(X) = J(X)$ für beliebiges $X \subseteq A$, denn $JJ(X) = J(\underset{\varkappa \in G}{\times} K_\varkappa(\mathrm{pr}_\varkappa X)) = \underset{\iota \in G}{\times} K_\iota(\mathrm{pr}_\iota \underset{\varkappa \in G}{\times} K_\varkappa(\mathrm{pr}_\varkappa X)) = \underset{\varkappa \in G}{\times} K_\iota K_\iota(\mathrm{pr}_\iota X) = J(X)$.

2.2. Definition: Es sei $A = \underset{\iota \in G}{\times} A_\iota$ und sei $\mathscr{K}_\iota$ die Menge aller Hüllenoperatoren auf A_ι für beliebiges $\iota \in G$. Dann nennen wir die Abbildung J: $\mathscr{B}(A) \to \mathscr{B}(A)$, für die ein $K_\iota \in \mathscr{K}_\iota$ für alle $\iota \in G$ so existiert, daß es für beliebiges $X \subseteq A$ (*) gilt, den durch die Hüllenoperatoren $K_\iota(\iota \in G)$ bestimmten *Produkthüllenoperator*.

Wir bezeichnen ferner die Menge aller Produkthüllenoperatoren auf der Menge A mit $\mathscr{P}$.

2.3. Beispiel: Es sei $A = \bigtimes_{\iota \in C} A_\iota$ und K_I^ι das größte Element der Menge $\mathscr{K}_\iota$ für beliebiges $\iota \in G$. Dann gilt für beliebiges $X \subseteq A$ $\bigtimes_{\iota \in G} K_I^\iota(\mathrm{pr}_\iota X) = \bigtimes_{\iota \in G} A_\iota = A = J_\mathrm{I}(X)$. Also ist der durch die Hüllenoperatoren $K_I^\iota(\iota \in G)$ bestimmte Produkthüllenoperator das größte Element der Menge $\mathscr{J}$.

Für den folgenden Satz führen wir die folgende Bezeichnung ein: wenn P, Q geordnete Mengen und $\{A_\iota \mid \iota \in G\}$ ein System von geordneten Mengen sind, dann bezeichnet $P \simeq Q$, daß P und Q isomorph sind, und $\prod_{\iota \in G}^c A_\iota$ bezeichnet das Kardinalprodukt der geordneten Mengen A_ι.

2.4. Satz: *Es sei* $A = \bigtimes_{\iota \in G} A_\iota$ *und* $\mathscr{K}_\iota$ *die Menge aller Hüllenoperatoren auf* A_ι *für jedes* $\iota \in G$. *Dann gilt* $\mathscr{P} \simeq \prod_{\iota \in G}^c \mathscr{K}_\iota$.

Beweis: Wir definieren die Abbildung $\varphi\colon \prod_{\iota \in G}^c \mathscr{K}_\iota \to \mathscr{P}$ auf folgende Weise: für beliebiges $f \in \prod_{\iota \in G}^c \mathscr{K}_\iota$, für das $f(\iota) = K_\iota$ für jedes $\iota \in G$ ist, setzen wir $\varphi(f) = J$, wobei J der durch die Hüllenoperatoren K_ι $(\iota \in G)$ bestimmte Produkthüllenoperator auf der Menge A ist. φ ist nach Definition surjektiv; wir zeigen, daß φ sogar bijektiv ist.

Es seien f, $g \in \prod_{\iota \in G}^c \mathscr{K}_\iota$, so daß es $\varphi(f) = \varphi(g)$ gilt und es sei $f(\iota) = K_\iota$, $g(\iota) = K'_\iota$ für jedes $\iota \in G$. Es sei ferner $\iota_0 \in G$ und $Y \subseteq A_{\iota_0}$ beliebig. Dann gilt $\mathrm{pr}_{\iota_0}^{-1} Y = Y \times \bigtimes_{\iota \in G - \{\iota_0\}} A_\iota$ und nach Definition 2.1 bekommen wir $J(\mathrm{pr}_{\iota_0}^{-1} Y) = K_{\iota_0}(Y) \times \bigtimes_{\iota \in G - \{\iota_0\}} A_\iota = K'_{\iota_0}(Y) \times \bigtimes_{\iota \in G - \{\iota_0\}} A_\iota$. Das heißt aber, daß $K_{\iota_0}(Y) = K'_{\iota_0}(Y)$ gilt; $K_\iota = K'_\iota$ gilt also für alle $\iota \in G$ und wir bekommen $f = g$. φ ist bijektiv.

Es seien ferner f, $g \in \prod_{\iota \in G}^c \mathscr{K}_\iota$ mit $f \leqq g$ und $J = \varphi(f)$, $J' = \varphi(g)$. Dann gilt $f \leqq g$ genau dann, wenn für alle $\iota \in G$ $K_\iota \leqq K'_\iota$ gilt, wobei $K_\iota = f(\iota)$, $K'_\iota = g(\iota)$ ist; und das gilt ferner genau dann, wenn für beliebige $\iota \in G$ und $X_\iota \subseteq A_\iota$ $K_\iota(X_\iota) \subseteq K'_\iota(X_\iota)$ gilt. Daraus folgt dann für J, J' und für beliebiges $X \subseteq A$ $J(X) = \bigtimes_{\iota \in G} K_\iota(\mathrm{pr}_\iota X) \subseteq$ $\subseteq \bigtimes_{\iota \in G} K'_\iota(\mathrm{pr}_\iota X) = J'(X)$ und das gilt genau dann, wenn $J \leqq J'$ ist.

Wenn umgekehrt für J, J' die Beziehung $J \leqq J'$, d. h. für belieges $X \subseteq A$ $J(X) \subseteq$ $\subseteq J'(X)$ gilt, so auch $J(\mathrm{pr}_\iota^{-1} X_\iota) \subseteq J'(\mathrm{pr}_\iota^{-1} X_\iota)$ für beliebige $\iota \in G$ und $X_\iota \subseteq A_\iota$; also gilt $K_\iota(X_\iota) \times \bigtimes_{\varkappa \in G - \{\iota\}} A_\varkappa \subseteq K'_\iota(X_\iota) \times \bigtimes_{\varkappa \in G - \{\iota\}} A_\varkappa$ und damit $K_\iota(X_\iota) \subseteq K'_\iota(X_\iota)$. Also ist $K_\iota \leqq K'_\iota$ für jedes $\iota \in G$ und wir bekommen die Beziehung $f \leqq g$.

Schließlich sehen wir, daß $f \leqq g$ genau dann gilt, wenn $\varphi(f) \leqq \varphi(g)$, also ist φ ein Isomorphismus.

2.5. Definition: Es sei $A = \bigtimes_{\iota \in G} A_\iota$. Dann nennen wir den durch die trivialen Hüllenoperatoren auf allen $A_\iota (\iota \in G)$ bestimmten Produkthüllenoperator $\bar{J} \in \mathscr{P}$ einen *kartesischen Hüllenoperator* auf der Menge A.

2.6. Lemma: *Für den kartesischen Hüllenoperator* $\bar{J}$ *auf* A *gilt* $\bar{J}(X) = \bigtimes_{\iota \in G} \mathrm{pr}_\iota X$ *für beliebiges* $X \subseteq A$.

2.7. Satz: *Es sei* $A = \bigtimes_{\iota \in G} A_\iota$. *Dann gilt* $\mathscr{P} \subseteq [\bar{J}, J_\mathrm{I}]$, *wobei* $[\bar{J}, J_\mathrm{I}]$ *das durch die Elmente* $\bar{J}$, J_I (siehe 1.3) *bestimmte Intervall in der geordneten Menge* $\mathscr{J}$ *ist.*

Beweis: Aus der Voraussetzung $J \in \mathscr{P}$ folgt die Existenz eines $K_\iota \in \mathscr{K}_\iota$ für beliebiges $\iota \in G$, so daß $J(X) = \bigtimes_{\iota \in G} K_\iota(\mathrm{pr}_\iota X)$ für jedes $X \subseteq A$ gilt. Daraus folgt aber $\overline{J}(X) \subseteq J(X)$ nach Lemma 2.6; also gilt $\mathscr{P} \subseteq [\overline{J}, J_\mathrm{I}]$.

2.7'. Beispiel: Wir zeigen, daß im allgemeinen $\mathscr{P} = [\overline{J}, J_\mathrm{I}]$ nicht gilt.*) Es sei $A = A_1 \times A_2$, wobei $A_1 = \{a', b'\}, A_2 = \{a'', b''\}, a' \neq b', a'' \neq b''$ gilt. Wir setzen $a = (a', a''), b = (a', b''),\ c = (b', a''),\ d = (b', b'')$ und erklären $J\colon\ \mathscr{B}(A) \to \mathscr{B}(A)$ auf folgende Weise:

$$J(X) = \begin{cases} \{a, c\} & \text{für } X = \{a\} \\ X & \text{für } X = \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, c\}; \\ A & \text{sonst} \end{cases}$$

man kann sich leicht davon überzeugen, daß J ein Hüllenoperator ist. Ferner ist $\overline{J} \leqq J$, denn es ist $\overline{J}(X) = X$ für $X = \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, c\}$ und $\overline{J}(X) \subseteq A$ sonst. Wenn aber $\overline{J} \leqq J$ ist, dann muß nach Satz 1.9 $J(X) = \overline{J}J(X) = \bigtimes_{\iota \in G} \mathrm{pr}_\iota\, J(X)$ für jedes $X \subseteq A$ gelten.

Es seien jetzt K_1, K_2 geeignete Hüllenoperatoren auf den Mengen A_1, A_2, so daß J der durch K_1, K_2 bestimmte Produkthüllenoperator ist. Es gilt also für jedes $X \subseteq A$ die Gleichung $J(X) = K_1(\mathrm{pr}_1 X) \times K_2\,(\mathrm{pr}_2 X)$. Also muß $K_i(\mathrm{pr}_i X) = \mathrm{pr}_i J(X)$ $(i = 1, 2)$ für jedes $X \subseteq A$ gelten. Dann gilt aber $K_1(\{a'\}) = K_1(\mathrm{pr}_1\{a\}) = \mathrm{pr}_1 J(\{a\}) = \mathrm{p}_1\{a, c\} = A_1$ und gleichzeitig $K_1(\{a'\}) = K_1(\mathrm{pr}_1\{b\}) = \mathrm{pr}_1 J(\{b\}) = \mathrm{pr}_1\{b\} = \{a'\}$. So bekommen wir einen Widerspruch. Das heißt, daß J kein Produkthüllenoperator ist.

Aus Satz 2.4 und den Sätzen 1.9 und 2.7 folgt sofort die

2.8. Folgerung: *Es sei* $A = \bigtimes_{\iota \in G} A_\iota$. *Dann*

a) *sind* $\overline{J}$, J_I *das kleinste und das größte Element der Menge* $\mathscr{P}$,

b) *gilt* $J\overline{J} = \overline{J}J = J$, *wenn* $J \in \mathscr{P}$ *ist.*

Vor der Hauptdefinition erinnern wir an bekannte Begriffe:

2.9. Definition: a) Es sei A eine Menge, J ein Hüllenoperator auf A. Dann nennen wir das geordnete Paar (A, J) eine *Hüllenstruktur* (siehe [4]). b) Es sei (A, J) eine Hüllenstruktur. Dann heißt eine Menge $X \subseteq A$, für die $J(X) = X$ gilt, J-*abgeschlossen.*

2.10. Definition: Es sei $\{(A_\iota, J_\iota) \mid \iota \in G\}$ ein System von Hüllenstrukturen. Es sei $A = \bigtimes_{\iota \in G} A_\iota$ und J der durch die Hüllenoperatoren $J_\iota (\iota \in G)$ bestimmte Produkthüllenoperator. Dann heißt die Hüllenstruktur (A, J) das *Produkt der Hüllenstrukturen* (A_ι, J_ι) und wir bezeichnen es mit $(A, J) = \bigtimes_{\iota \in G} (A_\iota, J_\iota)$.

3. DIE ALGEBRAISCHEN HÜLLENOPERATOREN

3.1. Definition: Es sei (A, J) eine Hüllenstruktur. Dann nennen wir den Hüllenoperator J *idempotent*, wenn jede einelementige Teilmenge der Menge A J-abgeschlossen ist.**)

*) Für die Idee zu folgendem Beispiel möchte ich Herrn J. Karásek danken.

**) Unter der Idempotenz eines Hüllenoperators versteht man üblich die Eigenschaft J3. Wir wollen aber das Wort für den Gebrauch im Absatz 4 in unserem Sinne benutzen.

3.2. Definition: Es sei (A, J) eine Hüllenstruktur. Dann nennen wir den Hüllenoperator J *algebraisch*, wenn für beliebiges $X \subseteq A$ und beliebiges $x \in J(X)$ eine endliche Teilmenge $X_f \subseteq X$ existiert, so daß $x \in J(X_f)$ gilt. (Siehe [4].)

3.3. Lemma: *Es sei A eine Menge, $\mathcal{J}$ die Menge aller Hüllenoperatoren auf A, J_0, $J_{\mathrm{I}} \in \mathcal{J}$ das kleinste und das größte Element in $\mathcal{J}$.*

Dann

a) *sind J_0, J_{I} algebraisch,*

b) *ist J_0 idempotent.*

Beweis: a) Es seien $X \subseteq A$, $x \in J_0(X)$ beliebig. Dann ist $x \in X$, also gilt z. B. $x \in J_0(\{x\}), \{x\} \subseteq X$. Es seien ferner $X \subseteq A$, $x \in J_{\mathrm{I}}(X)$ beliebig. Dann ist $x \in A$ und weil $J_{\mathrm{I}}(X_f) = A$ für beliebige endliche Teilmenge X_f gilt, also $x \in J_{\mathrm{I}}(X_f)$ gilt, ist der Anspruch auf eine Existenz einer solchen Menge eher erfüllt. b) ist klar.

Es sei $A = \bigtimes_{\iota \in G} A_\iota$ ein kartesisches Produkt. Dann setzen wir für den weiteren Gebrauch $G' = \{\iota \in G \mid \operatorname{card} A_\iota \geqq 2\}$.

3.4. Lemma: a) *Es sei J ein algebraischer Hüllenoperator auf A. Dann existiert für beliebiges $X \subseteq A$ und für eine beliebige endliche Teilmenge $Y \subseteq J(X)$ eine endliche Teilmenge $X_f \subseteq X$ so, daß $Y \subseteq J(X_f)$ gilt.* b) *Es sei $A = \bigtimes_{\iota \in G} A_\iota$ und sei $\bar{J}$ der kartesische Hüllenoperator auf A. Wenn die Menge G' endlich ist, so ist $\bar{J}$ ein algebraischer Hüllenoperator.*

Beweis: a) Es seien $X \subseteq A$, $Y \subseteq J(X)$ beliebig, Y endlich. Nach Voraussetzung existiert für beliebiges $y \in Y \subseteq J(X)$ eine endliche Teilmenge $X_y \subseteq X$ so, daß $y \in J(X_y)$ ist. Also gilt $\{y\} \subseteq J(X_y)$ und damit folgt $Y \subseteq \bigcup_{y \in Y} J(X_y) \subseteq J(\bigcup_{y \in Y} X_y)$. $\bigcup_{y \in Y} X_y$ ist dann die gesuchte endliche Teilmenge der Menge X. b) Sei $A = \bigtimes_{\iota \in G} A_\iota$ und sei $X \subseteq A$ beliebig. Es sei ferner $x \in \bar{J}(X)$. Für jedes $\iota \in G$ gilt dann $\mathrm{pr}_\iota\, x \in \mathrm{pr}_\iota X$. Also existiert für jedes $\iota \in G'$ ein $y^{(\iota)} \in X$ so, daß $\mathrm{pr}_\iota\, y^{(\iota)} = \mathrm{pr}_\iota\, x$ ist. Wegen der Endlichkeit G' ist die Menge $\{y^{(\iota)} \mid \iota \in G'\}$ eine endliche Teilmenge X. Dabei gilt $\bar{J}(\{y^{(\iota)} \mid \iota \in G'\}) = \bigtimes_{\varkappa \in G} \mathrm{pr}_\varkappa \{y^{(\iota)} \mid \iota \in G'\}$ und $x \in \bar{J}(\{y^{(\iota)} \mid \iota \in G'\})$, weil $\mathrm{pr}_\varkappa\, x \in \mathrm{pr}_\varkappa \{y^{(\iota)} \mid \iota \in G'\}$ für alle $\varkappa \in G$ gilt.

3.5. Satz: *Es sei $(A, J) = \bigtimes_{\iota \in G} (A_\iota, J_\iota)$ ein Produkt von Hüllenstrukturen, wobei J_ι für jedes $\iota \in G$ ein algebraischer Hüllenoperator ist. Wenn die Menge G' endlich ist, ist J ein algebraischer Hüllenoperator.*

Beweis: Es seien $X \subseteq A, x \in J(X)$ beliebig. Dann gilt $\mathrm{pr}_\iota\, x \in J_\iota (\mathrm{pr}_\iota X)$ für jedes $\iota \in G$ und nach Voraussetzung existiert für beliebiges $\iota \in G$ eine endliche Menge $Y_\iota \subseteq \mathrm{pr}_\iota X$ so, daß $\mathrm{pr}_\iota\ x \in J_\iota(Y_\iota)$ gilt. Sei ferner $Y = \bigtimes_{\iota \in G} Y_\iota$; dann ist Y wegen der Endlichkeit der Menge G' endlich. Dabei ist $x \in \bigtimes_{\iota \in G} J_\iota(Y_\iota) = J(Y)$. Ferner gilt natürlich $Y \subseteq \bigtimes_{\iota \in G} \mathrm{pr}_\iota X = \bar{J}(X)$ (wobei $\bar{J}$ der kartesische Hüllenoperator auf A ist). Daher existiert nach Lemma 3.4 a) b) ein endliches $X_f \subseteq X$ so, daß $Y \subseteq \bar{J}(X_f)$ ist. Daraus folgt aber $J(Y) \subseteq J\bar{J}(X_f) = J(X_f)$ wegen der Folgerung 2.8 b), also gilt $x \in J(X_f)$. Wir haben damit eine endliche Teilmenge $X_f \subseteq X$ gefunden, so daß $x \in J(X_f)$ gilt, also ist J algebraisch.

3.6. Satz: *Es sei $(A, J) = \bigtimes_{\iota \in G} (A_\iota, J_\iota)$ ein Produkt von Hüllenstrukturen, wobei J_ι*

*für jedes $\iota \in G$ ein idempotenter Hüllenoperator ist. Wenn J ein algebraischer Hüllenoperator ist, ist die Menge G' endlich.**)

Beweis: Es seien die Voraussetzungen des Satzes erfüllt, G' jedoch eine unendliche Menge. Es sei $x_0 \in A$; wir setzen $X_{x_0} = \{x \in A \mid$ es gibt höchstens ein $\iota \in G'$ mit $\mathrm{pr}_\iota x \neq \mathrm{pr}_\iota x_0\}$. Dann gilt $J(X_{x_0}) = A$, denn $J(X_{x_0}) = \bigtimes_{\iota \in G} J_\iota(\mathrm{pr}_\iota X_{x_0}) = \bigtimes_{\iota \in G} J_\iota(A_\iota) = A$. Ferner setzen wir für beliebiges $Y \subseteq A$ $G_{Y,x_0} = \{\iota \in G' \mid$ es gibt ein $y \in Y$ mit $\mathrm{pr}_\iota \neq$ $\neq \mathrm{pr}_\iota x_0\}$. (Ist $Y = \{y\}$ einelementig, dann ist $G_{\{y\},x_0} = \{\iota \in G' \mid \mathrm{pr}_\iota y \neq \mathrm{pr}_\iota x_0\}$.)

Es sei $X_f \subseteq X_{x_0}$ endlich; dann ist G_{X_f,x_0} endlich.

Für ein beliebiges Element $y \in J(X_f)$ gilt $G_{\{y\},x_0} \subseteq G_{X_f,x_0}$. In der Tat: es gilt $J(X_f) = \bigtimes_{\iota \in G_{X_f,x_0}} J_\iota(\mathrm{pr}_\iota X_f) \times \bigtimes_{\iota \in G - G_{X_f,x_0}} J_\iota(\mathrm{pr}_\iota X_f)$; für jedes $\iota \in G - G_{X_f,x_0}$ ist ferner $\mathrm{pr}_\iota X_f = \{\mathrm{pr}_\iota x_0\}$ einelementig und nach Voraussetzung J_ι-abgeschlossen; daraus folgt $J(X_f) = \bigtimes_{\iota \in G_{X_f,x_0}} J_\iota(\mathrm{pr}_\iota X_f) \times \bigtimes_{\iota \in G - G_{X_f,x_0}} \{\mathrm{pr}_\iota x_0\}$; wenn $\varkappa \in G_{\{y\},x_0}$ beliebig ist, dann ist $\mathrm{pr}_\varkappa y \neq \mathrm{pr}_\varkappa x_0$ und nach der letzten Gleichung ist $\varkappa \in G_{X_f,x_0}$.

Sei $y_0 \in J(X_{x_0}) = A$ so gewählt, daß $G_{\{y_0\},x_0} = G'$ ist. Für alle endlichen Mengen $X_f \subseteq X_{x_0}$ gilt dann $y_0 \notin J(X_f)$: wenn nämlich $y_0 \in J(X_f)$ gelten würde, dann müßte nach obigen Betrachtungen die Menge $G_{\{y_0\},x_0}$ endlich sein, das wäre ein Widerspruch zur Unendlichkeit der Menge $G' = G_{\{y_0\},x_0}$.

Also gilt für X_{x_0} und $y_0 \in J(X_{x_0})$, daß für alle endlichen Teilmengen $X_f \subseteq X_{x_0}$ $y_0 \notin$ $\notin J(X_f)$ ist, das ist ein Widerspruch zu der Voraussetzung, daß J algebraisch ist. G' ist also eine endliche Menge.

3.7 Folgerung: *Es sei $(A, J) = \bigtimes_{\iota \in G} (A_\iota, J_\iota)$ ein Produkt von Hüllenstrukturen, wobei J_ι für jedes $\iota \in G$ ein algebraischer idempotenter Hüllenoperator ist. Dann ist J ein algebraischer Hüllenoperator dann und nur dann, wenn die Menge G' endlich ist.*

3.8. Folgerung: *Es sei $A = \bigtimes_{\iota \in G} A_\iota$ ein kartesisches Produkt. Dann ist der kartesische Hüllenoperator auf A algebraisch dann und nur dann, wenn G' eine endliche Menge ist.*

In der Tat ist der kartesische Hüllenoperator nach Definition der durch die trivialen Hüllenoperatoren auf A_ι $(\iota \in G)$ bestimmte Produkthüllenoperator und die trivialen Hüllenoperatoren sind nach Lemma 3.3 algebraisch und idempotent.

3.9. Satz: *Es sei $(A, J) = \bigtimes_{\iota \in G} (A_\iota, J_\iota)$ ein Produkt von Hüllenstrukturen. Wenn J ein algebraischer Hüllenoperator ist, so auch J_ι für jedes $\iota \in G$.*

Beweis: Es seien $\iota_0 \in G$, $X_{\iota_0} \subseteq A_{\iota_0}$, $t \in J_{\iota_0}(X_{\iota_0})$ beliebig. Sei ferner $X \subseteq A$ so gewählt, daß $\mathrm{pr}_{\iota_0} X = X_{\iota_0}$ ist. Dann gilt $J(X) = J_{\iota_0}(X_{\iota_0}) \times \bigtimes_{\iota \in G - \{\iota_0\}} J_\iota(\mathrm{pr}_\iota X)$. Wir wählen jetzt ein $x \in J(X)$ mit $\mathrm{pr}_{\iota_0} x = t$. Nach Voraussetzung existiert eine endliche Teilmenge $X_f \subseteq X$ so, daß $x \in J(X_f)$ gilt. Also ist $x \in \bigtimes_{\iota \in G} J_\iota(\mathrm{pr}_\iota X_f)$ und daraus folgt $\mathrm{pr}_{\iota_0} x \in J_{\iota_0}(\mathrm{pr}_{\iota_0} X_f)$. Weil aber $\mathrm{pr}_{\iota_0} X_f$ eine endliche Menge ist und außerdem $\mathrm{pr}_{\iota_0} X_f \subseteq$ $\subseteq \mathrm{pr}_{\iota_0} X = X_{\iota_0}$ gilt, haben wir eine endliche Teilmenge der Menge X_{ι_0} gefunden, für die $t \in J_{\iota_0}(\mathrm{pr}_{\iota_0} X_f)$ gilt; J_{ι_0} ist also algebraisch.

Aus den Sätzen 3.5 und 3.9 folgt die

---

*) Während des Druckes dieses Artikels zeigt man, daß die notwendige Bedingung, damit J algebraisch sei, die Endlichkeit der Menge $\{\iota \in G \mid J_\iota \neq J_\iota^t\}$ ist (ohne weitere Voraussetzungen). Das möchte ich in einem anderen Artikel betrachten.

3.10. Folgerung: *Es sei* $(A, J) = \bigtimes_{\iota \in G} (A_\iota, J_\iota)$ *ein Produkt von Hüllenstrukturen. Sei die Menge G' endlich. Dann ist der Hüllenoperator J algebraisch dann und nur dann, wenn alle Hüllenoperatoren* J_ι *algebraisch sind.*

3.11. Satz: *Es sei* $(A, J) = \bigtimes_{\iota \in G} (A_\iota, J_\iota)$ *ein Produkt von Hüllenstrukturen. Dann ist der Hüllenoperator J idempotent dann und nur dann, wenn alle Hüllenoperatoren* J_ι *idempotent sind.*

Beweis: 1. Sei die Bedingung des Satzes erfüllt und sei $x \in A$ beliebig; dann gilt $J(\{x\}) = \bigtimes_{\iota \in G} J_\iota (\mathrm{pr}_\iota\{x\}) = \bigtimes_{\iota \in G} \mathrm{pr}_\iota \{x\} = \{x\}$. 2. Sei umgekehrt die Bedingung des Satzes nicht erfüllt, d. h. existieren $\iota_0 \in G$, $t \in A_{\iota_0}$ so, daß $J_{\iota_0}(\{t\}) \neq \{t\}$ ist. Es sei ferner $x \in A$ ein Element mit $\mathrm{pr}_{\iota_0} x = t$. Dann ist $J(\{x\}) = \bigtimes_{\iota \in G} J_\iota (\mathrm{pr}_\iota x) \neq \{x\}$; also ist der Hüllenoperator J nicht idempotent.

Daraus folgt mit Lemma 3.3 sofort die

3.12. Folgerung: *Es sei* $A = \bigtimes_{\in G} A_\iota$ *ein kartesisches Produkt. Dann ist der kartesische Hüllenoperator auf der Menge A idempotent.*

Schließlich bekommen wir als Ergebnis aus allen Sätzen dieses Absatzes den

Satz: *Es sei* $(A, J) = \bigtimes_{\in G} (A_\iota, J_\iota)$ *ein Produkt von Hüllenstrukturen, wobei kein* A_ι *für alle* $\iota \in G$ *einelementig ist. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(A) *J ist ein algebraischer idempotenter Hüllenoperator.*

(B) *Die Menge G ist endlich und für jedes* $\iota \in G$ *ist* J_ι *ein algebraischer idempotenter Hüllenoperator.*

Beweis: 1. Wenn die Aussage (B) gilt, folgt die Gültigkeit von (A) aus den Sätzen 3.5 und 3.11. 2. Es gelte (A); dann ist nach den Sätzen 3.9 und 3.11 J_ι algebraisch und idempotent für alle $\iota \in G$; daraus folgt ferner nach Satz 3.6 die Endlichkeit der Menge G.

Bemerkung: Wenn wir unter einer (abstrakten) *Geometrie* eine Hüllenstruktur verstehen werden, wobei J ein algebraischer idempotenter Hüllenoperator mit der Eigenschaft $J(0) = 0$ ist (F. Maeda), können wir den letzten Satz speziell kürzer formulieren:

Es seien die Bedingungen des Satzes erfüllt und sei $J_\iota(0) = 0$ *für jedes* $\iota \in G$. (A, J) *ist eine Geometrie dann und nur dann, wenn G endlich und* (A_ι, J_ι) *eine Geometrie für alle* $\iota \in G$ *sind.*

4. EIN PRODUKT VON HÜLLENSTRUKTUREN UND EIN DIREKTES PRODUKT VON Ω-ALGEBREN

Unter einer Ω-Algebra werden wir in diesem Absatz eine vollständige Algebra mit einer Menge Ω von eindeutigen Operationen verstehen. (Siehe z. B. [2],[3].) Wir bezeichnen ferner mit $\Omega(n)$ die Menge aller n-stelligen Operationen der Ω-Algebra.

4.1. Definition: Es sei A eine Ω-Algebra. Wir definieren den Hüllenoperator J_Ω auf A auf folgende Weise: für beliebiges $X \subseteq A$ setzen wir $J_\Omega(X) = \bigcap_{A_\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, wobei Λ die Menge aller Unteralgebren der Ω-Algebra A ist, die die Menge X enthalten. (Siehe [3], [4].)

In [4] findet man folgende Behauptungen:
(i) Sei A eine Ω-Algebra. Dann ist der Hüllenoperator J_Ω auf A algebraisch.
(ii) Sei A eine Ω-Algebra, $X \subseteq A$ eine Teilmenge. Wir definieren Mengen $X_0 = X$, $X_{k+1} = X_k \cup \{a\omega \mid \text{eine natürliche Zahl } n,\ \omega \in \Omega(n),\ a \in (X_k)^n \text{ sind beliebig}\}$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$. Dann gilt die Gleichung $J_\Omega(X) = \bigcup_{k=0}^{\infty} X_k$.

4.2. Lemma: *Es seien A, B Ω-Algebren, $f\colon A \to B$ ein Homomorphismus. Seien J_Ω^A, J_Ω^B die wie in 4.1 auf A, B definierten Hüllenoperatoren. Für beliebiges $X \subseteq A$ gilt dann $fJ_\Omega^A(X) = J_\Omega^B(fX)$.*

Beweis: Sei $X \subseteq A$ beliebig. Wir zeigen, daß $fX_k = (fX)_k$ für beliebiges X_k, wobei $X_k \subseteq$ A, $(fX)_k \subseteq B$ die wie in (ii) definierten Mengen sind. Sei $k = 0$: dann gilt $fX_0 = fX = (fX)_0$ und die Beziehung wird also erfüllt. Wir setzen jetzt die Gültigkeit der Behauptung bis $k - 1$ voraus; wir folgern sie dann für die Menge fX_k:

$$fX_k = fX_{k-1} \cup f\{a\omega \mid \omega \in \Omega(n),\ a \in (X_{k-1})^n \text{ beliebig}\} = fX_{k-1} \cup$$
$$\cup \{fa\omega \mid \omega \in \Omega(n),\ a = (a_1, \ldots, a_n) \in (X_{k-1})^n \text{ beliebig}\} =$$
$$= fX_{k-1} \cup \{fa_1 \ldots fa_n\omega \mid \omega \in \Omega(n),\ (fa_1, \ldots, fa_n) \in (fX_{k-1})^n \text{ belieb.}\} =$$
$$= (fX)_{k-1} \cup \{fa_1 \ldots fa_n\omega \mid \omega \in \Omega(n),\ (fa_1, \ldots, fa_n) \in [(fX)_{k-1}]^n \text{ belieb.}\}.$$

Es gilt also $fX_k = (fX)_k$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$. Daraus bekommen wir nach (ii) die Gleichheit $fJ_\Omega^A(X) = f\bigcup_{k=0}^{\infty} X_k = \bigcup_{k=0}^{\infty} fX_k = \bigcup_{k=0}^{\infty} (fX)_k = J_\Omega^B(fX)$. Das Lemma ist bewiesen.

Es sei $\{A_\iota \mid \iota \in G\}$ ein System von Ω-Algebren; dann bezeichnen wir mit $\prod_{\iota \in G}^d A_\iota$ das direkte Produkt der Ω-Algebren des Systems.

4.3. Satz: *Es sei $A = \prod_{\iota \in G}^d A_\iota$ ein direktes Produkt von Ω-Algebren; es seien J_Ω^ι $(\iota \in G)$, J_Ω die wie in* 4.1 *auf A_ι $(\iota \in G)$, A definierten Hüllenoperatoren. Für beliebiges $X \subseteq A$ gilt dann $J_\Omega(X) \subseteq \times_{\iota \in G} J_\Omega^\iota(\mathrm{pr}_\iota X)$ und für alle $\iota \in G$ ist* $\mathrm{pr}_\iota J_\Omega(X) = J_\Omega(\mathrm{pr}_\iota X)$.

Beweis: Sei $X \subseteq A$ beliebig, nach Definition der Hüllenoperatoren J_Ω^ι $(\iota \in G)$, J_Ω sind dann $J_\Omega^\iota(\mathrm{pr}_\iota X)$ $(\iota \in G)$ bzw. $J_\Omega(X)$ die kleinsten Unteralgebren der Ω-Algebren A_ι $(\iota \in G)$ bzw. A, die $\mathrm{pr}_\iota X$ bzw. X enthalten. Also ist das direkte Produkt $\prod_{\iota \in G}^d J_\Omega^\iota(\mathrm{pr}_\iota X)$ eine Unteralgebra der Ω-Algebra A. Dabei folgt aus $x \in X$ $\mathrm{pr}_\iota x \in \mathrm{pr}_\iota X \subseteq J_\Omega^\iota(\mathrm{pr}_\iota X)$ für jedes $\iota \in G$, also gilt $x \in \prod_{\iota \in G}^d J_\Omega(\mathrm{pr}_\iota X)$. Daraus folgt $X \subseteq \prod_{\iota \in G}^d J_\Omega^\iota(\mathrm{pr}_\iota X)$ und nach Definition von J_Ω gilt die Inklusion $J_\Omega(X) \subseteq \prod_{\iota \in G}^d J_\Omega^\iota(\mathrm{pr}_\iota X)$; d. h. für die Mengen gilt $J_\Omega(X) \subseteq \times_{\iota \in G} J_\Omega^\iota(\mathrm{pr}_\iota X)$. Die Gültigkeit der Beziehung $\mathrm{pr}_\iota J_\Omega(X) = J_\Omega(\mathrm{pr}_\iota X)$ folgt ferner aus Lemma 4.2, denn $\mathrm{pr}_\iota\colon A \to A_\iota$ ist ein Homomorphismus.

4.4. Folgerung: *Sei $A = \prod_{\iota \in G}^d A_\iota$ ein direktes Produkt von Ω-Algebren. Dann kann man jede Unteralgebra der Ω-Algebra A als ein subdirektes Produkt von Unteralgebren der Ω-Algebren A_ι $(\iota \in G)$ ausdrücken.*

Beweis: Es sei $X \subseteq A$ eine Unteralgebra der Ω-Algebra A. Dann gilt $J_\Omega(X) = X$ und nach Satz 4.3 $X \subseteq \prod^d_{\iota \in G} J^\iota_\Omega\,(\mathrm{pr}_\iota X)$. X ist also eine Unteralgebra eines direkten Produkt von Unteralgebren der Ω-Algebren $A_\iota\,(\iota \in G)$. Dabei gilt nach Satz 4.3, daß die Einschränkung des Epimorphismus pr_ι: $\prod^d_{\iota \in G} J^\iota_\Omega\,(\mathrm{pr}_\iota X) \to J^\iota_\Omega\,(\mathrm{pr}_\iota X)$ auf die Menge $J_\Omega(X) = X$ auch ein Epimorphismus für jedes $\iota \in G$ ist. Also ist X ein subdirektes Produkt der Unteralgebren $J^\iota_\Omega\,(\mathrm{pr}_\iota X)$ der Ω-Algebren A_ι.

4.5. Satz: *Es sei $A = \prod^d_{\iota \in G} A_\iota$ ein direktes Produkt von Ω-Algebren; es seien J^ι_Ω $\iota \in G)$, J_Ω die wie in 4.1 auf $A_\iota\,(\iota \in G)$, A definierten Hüllenoperatoren. Sei $\bar{J}$ der kartesische Hüllenoperator auf A. Dann gilt $(A, \bar{J}J_\Omega) = \mathsf{X}_{\iota \in G}\,(A_\iota, J^\iota_\Omega)$.*

Beweis: Es sei $X \subseteq A$ eine beliebige Menge. Dann gilt nach Satz 4.3 $\mathsf{X}_{\iota \in G} J^\iota_\Omega\,(\mathrm{pr}_\iota X) = \mathsf{X}_{\iota \in G}\,\mathrm{pr}_\iota\, J_\Omega(X) = \bar{J}J_\Omega(X)$ und das ist die Behauptung des Satzes. Wir bemerken noch, daß $\bar{J}J_\Omega$ nach 2.1 ein Hüllenoperator auf A ist.

Aus dem Satz und aus Satz 1.9 folgt unmittelbar die

4.6. Folgerung: *Seien die Voraussetzungen des Satzes 4.5 erfüllt. Dann gilt $(A, J_\Omega) = \mathsf{X}_{\iota \in G}\,(A_\iota, J^\iota_\Omega)$ dann und nur dann, wenn $\bar{J} \leqq J_\Omega$ gilt.*

Die Folgerung 4.6 gibt eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß jede Unteralgebra der Ω-Algebra $A = \prod^d_{\iota \in G} A_\iota$ in ein direktes Produkt von Unteralgebren der Ω-Algebren $A_\iota\,(\iota \in G)$ zerlegbar ist. Die Bedingung sagt uns aber nicht viel. Am Schluß des Absatzes leiten wir deshalb in einem Spezialfall eine konkrete notwendige Bedingung ab, unter der obiges erfüllt wird.

4.7. Lemma: *Es seien A eine Ω-Algebra, J_Ω der wie in 4.1 definierte Hüllenoperator auf A. Dann ist J_Ω ein idempotenter Hüllenoperator dann und nur dann, wenn jede Operation der Ω-Algebra A idempotent ist.*

Beweis: Die Bedingung ist notwendig: Sei J_Ω der idempotente Hüllenoperator. Dann gilt für beliebiges $a \in A$ $J_\Omega(\{a\}) = \{a\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} X_k$, wobei die X_k wie in (ii) definiert werden; also gilt $\{a\} = X_0 \subseteq X_1 \subseteq \ldots \subseteq X_k \subseteq \ldots \subseteq \{a\}$ und also ist $X_k = \{a\}$ für jedes $k = 0, 1, \ldots$. Nach Definition von X_k gilt also $\{a\} = \{a\} \cup \{b\omega \mid$ eine natürliche Zahl n, $\omega \in \Omega(n)$, $b \in \{a\}^n$ sind beliebig$\}$. Daraus folgt $\{b\omega \mid n, \omega \in \Omega(n), b \in \{a\}^n$ beliebig$\} \subseteq \{a\}$ und es gilt also schließlich $a \ldots a\omega = a$ für jedes $\omega \in \Omega$.

Die Bedingung ist hinreichend: Es sei $a \ldots a\omega = a$ für beliebiges $a \in A$, $\omega \in \Omega$ erfüllt. Dann kann man für $X_0 = \{a\}$, $X_k\,(k = 1, 2, \ldots)$, die wie in (ii) definiert sind, leicht beweisen, daß $X_k = \{a\}$ für jedes $k = 0, 1, \ldots$ gilt. Also gilt $J_\Omega(\{a\}) = \bigcup_{k=0}^{\infty} X_k = \{a\}$ und J_Ω ist ein idempotenter Hüllenoperator.

Aus Lemma 4.7 und dem Satz 3.11 folgt unmittelbar die

4.8. Folgerung: *Es sei $A = \prod^d_{\iota \in G} A_\iota$ ein direktes Produkt von Ω-Algebren, so daß $(A, J_\Omega) = \mathsf{X}_{\iota \in G}\,(A_\iota, J^\iota_\Omega)$ für die wie in 4.1 auf $A_\iota\,(\iota \in G)$, A definierten Hüllenoperatoren $J^\iota_\Omega\,(\iota \in G)$, J_Ω gilt. Dann ist jede Operation der Ω-Algebra A idempotent dann und nur dann, wenn jede Operation der Ω-Algebra A_ι für jedes $\iota \in G$ idempotent ist.*

4.9. Satz: *Es sei* $A = \prod_{\iota \in G}^{d} A_\iota$ *ein direktes Produkt von* Ω*-Algebren, wobei kein* A_ι *für* $\iota \in G$ *eine einelementige Menge ist; seien alle Operationen der* Ω*-Algebra* A *idempotent. Gilt* $(A, J_\Omega) = \mathsf{X}_{\iota \in G} (A_\iota, J_\Omega^\iota)$ *für die wie in 4.1 definierten Hüllenoperatoren* J_Ω $(\iota \in G)$, J_Ω, *dann ist die Menge* G *endlich.*

Beweis: Nach Lemma 4.7 ist J_Ω ein idempotenter Hüllenoperator; ferner ist er nach (i) algebraisch. Die Endlichkeit der Menge G folgt dann aus dem Schlußsatz des vorigen Absatzes.

4.10. Folgerung: *Es sei* $A = \prod_{\iota \in G}^{d} A_\iota$ *ein direktes Produkt von* Ω*-Algebren, wobei kein* A_ι *für* $\iota \in G$ *einelementig ist; seien alle Operationen der* Ω*-Algebra* A *idempotent. Wenn jede Unteralgebra der* Ω*-Algebra* A *in ein direktes Produkt von Unteralgebren der* Ω*-Algebren* A_ι $(\iota \in G)$ *zerlegbar ist, dann ist* G *eine endliche Menge.*

5. EIN PRODUKT VON HÜLLENSTRUKTUREN UND EIN KARDINALPRODUKT VON VOLLSTÄNDIGEN VERBÄNDEN

Am Anfang erinnern wir an folgende Bezeichnungen und Begriffe. Es sei $\{A_\iota \mid \iota \in G\}$ ein System von geordneten Mengen. Dann bezeichnen wir das Kardinalprodukt dieses Systems mit $\prod_{\iota \in G}^{c} A_\iota$. Sei A ferner eine geordnete Menge, $x_0 \in A$ beliebig, $x_1, x_2 \in A$ so gewählt, daß $x_1 \leqq x_2$ gilt. Dann nennen wir die Mengen $\{x \in A \mid x \leqq x_0\}$ einen Anfang, $\{x \in A \mid x_0 \leqq x\}$ ein Ende, $[x_1, x_2] = \{x \in A \mid x_1 \leqq x \leqq x_2\}$ ein Intervall der Menge A.

5.1. Lemma: *Es sei* $A = \prod_{\iota \in G}^{c} A_\iota$ *ein Kardinalprodukt von geordneten Mengen, seien* $x_1, x_2 \in A$ *so gewählt, daß* $x_1 \leqq x_2$ *gilt. Dann gilt die Gleichung* $[x_1, x_2] = \prod_{\iota \in G}^{c} [\mathrm{pr}_\iota\, x_1, \mathrm{pr}_\iota\, x_2]$.

Beweis: Es sei $x \in [x_1, x_2]$ beliebig, dann gilt $\mathrm{pr}_\iota\, x_1 \leqq \mathrm{pr}_\iota\, x \leqq \mathrm{pr}_\iota\, x_2$ für jedes $\iota \in G$, denn diese Abbildungen sind isoton. Daraus folgt $x \in \prod_{\iota \in G}^{c} [\mathrm{pr}_\iota\, x_1, \mathrm{pr}_\iota\, x_2]$. Es sei umgekehrt $x \in \prod_{\iota \in G}^{c} [\mathrm{pr}_\iota\, x_1, \mathrm{pr}_\iota\, x_2]$, dann gilt $\mathrm{pr}_\iota\, x \in [\mathrm{pr}_\iota\, x_1, \mathrm{pr}_\iota\, x_2]$ für jedes $\iota \in G$. Daraus folgt aber $x_1 \leqq x \leqq x_2$, also gilt $x \in [x_1, x_2]$.

Nun werden wir uns für die Frage interessieren, wann die Menge aller Anfänge, Enden und Intervalle einer gegebenen geordneten Menge einen vollständigen Verband bildet, denn in diesem Fall können wir durch diese Mengen einen Hüllenoperator auf der geordneten Menge definieren. Wir können uns leicht davon überzeugen, daß die Menge aller Anfänge, Enden und Intervalle einer geordneten Menge A einen vollständigen Verband dann und nur dann bildet, wenn die Menge A ein vollständiger Verband ist. Wir werden also nur vollständige Verbände betrachten.

5.2. Definition: Es sei A ein vollständiger Verband. Dann definieren wir auf A einen Hüllenoperator J_V auf folgende Weise: für beliebiges $X \subseteq A$ setzen wir $J_\mathrm{V}(X) = \bigcap_{A_\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, wobei Λ die Menge aller Intervalle der Menge A ist, die die Menge X enthalten. Dann nennen wir J_V einen *Verbandshüllenoperator*.

Bemerkung: Der Verbandshüllenoperator auf einem vollständigen Verband ist offensichtlich idempotent.

5.3. Lemma: *Es sei* $A = \prod\limits_{\iota \in G}^{c} A_\iota$ *ein Kardinalprodukt von vollständigen Verbänden. Für jedes* $X \subseteq A$ *existieren dann* $\inf X$, $\sup X$ (*A ist ein vollständiger Verband*) *und dabei gelten die Gleichungen* $\inf \mathrm{pr}_\iota X = \mathrm{pr}_\iota \inf X$, $\sup \mathrm{pr}_\iota X = \mathrm{pr}_\iota \sup X$ *für jedes* $\iota \in G$.

Beweis: Sei $X \subseteq A$ beliebig und sei $a \in A$ so gewählt, daß $\mathrm{pr}_\iota a = \inf \mathrm{pr}_\iota X$ für jedes $\iota \in G$ gilt; wir zeigen, daß $a = \inf X$ ist. Sei $x \in X$ beliebig, dann gilt $\mathrm{pr}_\iota a \leqq \mathrm{pr}_\iota x$ für jedes $\iota \in G$ nach Definition des Elements a; also gilt $a \leqq x$ und a ist eine untere Schranke von X. Wenn ferner $b \leqq x$ für beliebiges $x \in X$ gilt, gilt $\mathrm{pr}_\iota b \leqq \mathrm{pr}_\iota x$ für beliebige $x \in X$, $\iota \in G$; also gilt für beliebiges $\iota \in G$ $\mathrm{pr}_\iota b \leqq \inf \mathrm{pr}_\iota X = \mathrm{pr}_\iota a$ und daraus bekommen wir $b \leqq a$. Insgesamt gilt also $a = \inf X$. Dual zeigt man die Existenz eines Supremums einer beliebigen Teilmenge der Menge A und die Gültigkeit der zweiten Beziehung.

5.4. Lemma: *Es sei* (A, J_V) *eine Hüllenstruktur, so daß A ein vollständiger Verband und* J_V *der Verbandshüllenoperator auf A ist. Dann gilt* $J_V(X) = [\inf X, \sup X]$ *für beliebiges* $X \subseteq A$.

Beweis: Nach Definition gilt $J_V(X) = \bigcap\limits_{A_\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ für beliebiges $X \subseteq A$, wobei Λ die Menge aller Intervalle von A ist, die die Menge X enthalten. Also gilt auch $[\inf X, \sup X] \in \Lambda$ und daraus folgt $J_V(X) \subseteq [\inf X, \sup X]$. Es sei ferner $[a, b] \in \Lambda$ ein beliebiges Intervall, dann für beliebiges $x \in X$ ist $a \leqq x \leqq b$, also ist a eine untere Schranke und b eine obere Schranke von X; daraus bekommen wir $a \leqq \inf X \leqq \sup X \leqq b$, also gilt $[\inf X, \sup X] \subseteq [a, b]$. Weil $[a, b] \in \Lambda$ beliebig war, gilt $[\inf X, \sup X] \subseteq \bigcap\limits_{A_\lambda \in \Lambda} A_\lambda = J_V(X)$. Es gilt also obige Gleichung.

5.5. Satz: *Es sei* $A = \prod\limits_{\iota \in G}^{c} A_\iota$ *ein Kardinalprodukt von vollständigen Verbänden. Es sei* J_V *der Verbandshüllenoperator auf A und* J_V^ι *der Verbandshüllenoperator auf* A_ι *für beliebiges* $\iota \in G$. *Dann gilt die Gleichung* $(A, J_V) = \mathop{\mathsf{X}}\limits_{\iota \in G} (A_\iota, J_V^\iota)$.

Beweis: Es sei $X \subseteq A$ eine beliebige Teilmenge. Dann gilt $J_V(X) = [\inf X, \sup X] = \prod\limits_{\iota \in G}^{c} [\mathrm{pr}_\iota \inf X, \mathrm{pr}_\iota \sup X] = \prod\limits_{\iota \in G}^{c} [\inf \mathrm{pr}_\iota X, \sup \mathrm{pr}_\iota X] = \prod\limits_{\iota \in G}^{c} J_V^\iota (\mathrm{pr}_\iota X)$ nach Lemma 5.4, 5.1 und 5.3. Für die zugehörigen Mengen gilt also die Gleichung $J_V(X) = \mathop{\mathsf{X}}\limits_{\iota \in G} J_V^\iota (\mathrm{pr}_\iota X)$ und das war zu beweisen.

6. DAS PRODUKT VON HÜLLENSTRUKTUREN UND DAS PRODUKT VON TOPOLOGISCHEN RÄUMEN

Wir erinnern an einige bekannten Begriffe und Sätze. Unter einem topologischen Raum verstehen wir ein geordnetes Paar $(A, \mathscr{T})$, wo A eine Menge und $\mathscr{T}$ eine Menge abgeschlossener Teilmengen von A sind. (Siehe z. B. [1], S. 5.)

Es sei $(A, \mathscr{T})$ ein topologischer Raum. Dann bestimmt die Menge $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{B}(A)$ eindeutig einen Hüllenoperator $J_{\mathscr{T}}$ auf A folgendrmaßen: für beliebiges $X \subseteq A$ gilt $J_{\mathscr{T}}(X) = \bigcap\limits_{Y \supseteq X, Y \in \mathscr{T}} Y$.

Es sei ferner $\{(A_\iota, \mathscr{T}_\iota) \mid \iota \in G\}$ ein System von topologischen Räumen; dann bezeichnen wir das Produkt dieses Systems mit $\prod\limits_{\iota \in G}^{t} (A_\iota, \mathscr{T}_\iota)$. (Siehe [1], S. 42.)

Für das Produkt von topologischen Räumen gilt der folgende Satz: (siehe [1], Seite 46):

(i) Es sei $(A, \mathscr{T}) = \prod^{t}_{\iota \in G} (A_\iota, \mathscr{T}_\iota)$ ein Produkt von topologischen Räumen. Seien $J_{\mathscr{T}}$, $J_{\mathscr{T}_\iota}$ $(\iota \in G)$ die zugehörigen Hüllenoperatoren auf A, A_ι $(\iota \in G)$. Wir wählen für jedes $\iota \in G$ ein $X_\iota \subseteq A_\iota$ beliebig. Dann gilt die Gleichung $J_{\mathscr{T}} (\bigtimes_{\iota \in G} X_\iota) = \bigtimes_{\iota \in G} J_{\mathscr{T}_\iota} (X_\iota)$.

6.1. Satz: *Es sei* $(A, \mathscr{T}) = \prod^{t}_{\iota \in G} (A_\iota, \mathscr{T}_\iota)$ *ein Produkt von topologischen Räumen; seien* $J_{\mathscr{T}}$, $J_{\mathscr{T}_\iota}$ $(\iota \in G)$ *die zugehörigen Hüllenoperatoren auf* A, A_ι $(\iota \in G)$. *Es sei* $\bar{J}$ *der kartesische Hüllenoperator auf* A. *Dann gilt die Gleichung* $(A, J_{\mathscr{T}}\bar{J}) = \bigtimes_{\iota \in G} (A_\iota, J_{\mathscr{T}_\iota})$.

Beweis: Es sei $X \subseteq A$ eine Menge. Dann gilt $\bar{J}(X) = \bigtimes_{\iota \in G} \mathrm{pr}_\iota X$ und nach (i) bekommen wir $J_{\mathscr{T}}\bar{J}(X) = \bigtimes_{\iota \in G} J_{\mathscr{T}_\iota} (\mathrm{pr}_\iota X)$, und das war zu beweisen. Bemerken wir noch, daß $J_{\mathscr{T}}\bar{J}$ nach 2.1 ein Hüllenoperator auf A ist.

6.2. Folgerug: *Seien die Voraussetzungen von 6.1 erfüllt. Dann gilt* $(A, J_{\mathscr{T}}) = \bigtimes_{\iota \in G} (A_\iota, J_{\mathscr{T}_\iota})$ *dann und nur dann, wenn* $\bar{J} \leqq J_{\mathscr{T}}$ *ist.*

LITERATUR

[1] Bourbaki, N., *Topologie générale (Structures topologiques)*, Paris, 1940.
[2] Cohn P. M., *Universal algebra*, New York, 1965.
[3] Kuroš A. G., *Lekcii po obščej algebre*, Moskva, 1962.
[4] Schmidt J., *Über die Rolle der transfiniten Schlußweisen in einer allgemeinen Idealtheorie*, Math. Nachr. 7 (1952), 165—182.

O. Kopeček
Mathematisches Institut
J. E. Purkyně Universität, Brno
Czechoslovakia