Archivum Mathematicum

Milan Gera

Einige oszillatorische Eigenschaften der Lösungen der Differentialgleichung dritter Ordnung $y''' + p(x)y' + q(x)y = 0$

Archivum Mathematicum, Vol. 7 (1971), No. 2, 65--76

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104740`

SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS, ARCH. MATH. 2,
VII: 65—76, 1971

EINIGE OSZILLATORISCHE EIGENSCHAFTEN DER LÖSUNGEN DER DIFFERENTIALGLEICHUNG DRITTER ORDNUNG

$$y''' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$$

MILAN GERA, Bratislava

(Eingegangen am 21. Mai 1969)

EINLEITUNG UND VORLÄUFIGE BETRACHTUNGEN

Man sagt, daß die lineare homogene Differentialgleichung n-ter Ordnung im Intervall J nichtoszillatorisch ist, wenn jede ihre nichttriviale Lösung in diesem Intervall höchstens n—1 Nullstellen, die Vielfachheit eingerechnet, hat. Im entgegengesetzten Falle sagen wir, daß sie im Intervall J oszillatorisch ist.

In dieser Arbeit werden einige notwendige und hinreichende Bedingungen abgeleitet, unter welchen die lineare Differentialgleichung der dritten Ordnung

$$K[y] \equiv y''' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0 \tag{1}$$

im Intervall $\mathscr{J}$ nichtoszillatorisch (oszillatorisch) ist, wo $p(x) \in C^1(\mathscr{J})$, $q(x) \in C(\mathscr{J})$ und $\mathscr{J} = \langle x_0, b)$ bzw. $(a, x_0\rangle$, $-\infty \leqq a < x_0 < b \leqq \infty$.

Die lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung in der allgemeinen Form

$$y''' + p_1(x)\, y'' + p_2(x)\, y' + p_3(x)\, y = 0 \tag{1'}$$

kann auch auf die Differentialgleichung der Form (1) überführt werden, wenn $p_1(x) \in C^2(\mathscr{J})$ ist (siehe [1]).

(In den Arbeiten [2], [3] beschäftigen wir uns mit der Ableitung der Bedingungen, bei welchen die lineare Differentialgleichung (1') im Intervall $\mathscr{J}$ nichtoszillatorisch (ozsillatorisch) ist.)

Die zu der Differentialgleichung (1) adjungierte Differentialgleichung hat die Form

$$\bar{K}[y] \equiv y''' + p(x)\, y' + (p'(x) - q(x))\, y = 0. \tag{2}$$

Wir werden die nachfolgenden Lemmata benutzen;

Lemma 1 [3]. *Die Funktion $A(x, t)$ sei stetig und nichtnegativ für $x_0 \leqq t \leqq x < b$ [nichtpositiv für $a < x \leqq t \leqq x_0$] und die Funktion $f(x)$ sei stetig und nichtnegativ (nichtpositiv) im Intervall $\langle x_0, b)$ $[(a, x_0\rangle]$. Für die Lösung $u(x)$ der Integralgleichung*

$$u(x) = f(x) + \int_{x_0}^{x} A(x, t)\, u(t)\, \mathrm{d}t \tag{a}$$

m Intervall $\langle x_0, b)$ $[(a, x_0\rangle]$ gilt dann

$$u(x) \geqq f(x) \geqq 0 \quad (u(x) \leqq f(x) \leqq 0).$$

Die Integralgleichung (a) ist äquivalent mit der Integralgleichung

$$\text{(b)} \qquad u(x) = \varphi(x) + \int_{x_0}^{x} \left\{ \int_{t}^{x} A(x, \tau)\, A(\tau, t)\, \mathrm{d}\tau \right\} u(t)\, \mathrm{d}t,$$

wo

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{x_0}^{x} A(x, t)\, f(t)\, \mathrm{d}t$$

ist und $f(x)$, $A(x, t)$ stetige Funktionen für $x_0 \leqq t \leqq x < b$ $[a < x \leqq t \leqq x_0]$ sind.

Lemma 2 [3]. *Die Funktion $A(x, t)$ sei stetig und nichtpositiv für $x_0 \leqq t \leqq x < b$ [nichtnegativ für $a < x \leqq t \leqq x_0$]. Die Funktion $f(x)$ sei stetig und die Funktion*

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{x_0}^{x} A(x, t)\, f(t)\, \mathrm{d}t$$

sei nichtnegativ (nichtpositiv) für $x \in \langle x_0\, b)$ $[x \in (a, x_0\rangle]$. Für die Lösung $u(x)$ der Integralgleichung (a) im Intervall $\langle x_0, b)$ $[(a, x_0\rangle]$ gilt dann

$$0 \leqq \varphi(x) \leqq u(x) \leqq f(x) \quad (f(x) \leqq u(x) \leqq \varphi(x) \leqq 0).$$

Bemerkung 1. Ist der Kern $A(x, t)$ der Integralgleichung (a) für $x_0 \leqq t \leqq x < b$ nichtpositiv [für $a < x \leqq t \leqq x_0$ nichtnegativ] und die Funktion $\varphi(x)$ für $x \in \langle x_0, b)$ $[x \in (a, x_0\rangle]$ nichtnegativ (nichtpositiv), so ist auch notwendig die Funktion $f(x)$ im Intervall $\langle x_0, b)$ $[(a, x_0\rangle]$ nichtnegativ (nichtpositiv).

Die Differentialgleichung $K[y] = 0$ bzw. $\bar{K}[y] = 0$ mit den gegebenen Cauchyschen Anfangsbedingungen in der Zahl x_0

$$\text{(3)} \qquad y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ y''(x_0) = y_0''$$

ist äquivalent im Intervall $\mathscr{I}$ mit der Volterraschen Integralgleichung zweiter Art

$$\text{(4)} \qquad y^{(l)}(x) = P_l(x, y_0, y_0', y_0'') + \int_{x_0}^{x} A_l(x, t)\, y^{(l)}(t)\, \mathrm{d}t$$

bzw.

$$\text{(5)} \qquad y^{(l)}(x) = Q_l(x, y_0, y_0', y_0'') + \int_{x_0}^{x} B_l(x, t)\, y^{(l)}(t)\, \mathrm{d}t,$$

welche mit der Integralgleichung

$$\text{(6)} \qquad y^{(l)}(x) = \varphi_l(x, y_0, y_0', y_0'') + \int_{x_0}^{x} \left\{ \int_{t}^{x} A_l(x, \tau)\, A_l(\tau, t)\, \mathrm{d}\tau \right\} y^{(l)}(t)\, \mathrm{d}t$$

bzw.

$$\text{(7)} \qquad y^{(l)}(x) = \psi_l(x, y_0, y_0', y_0'') + \int_{x_0}^{x} \left\{ \int_{t}^{x} B_l(x, \tau)\, B_l(\tau, t)\, \mathrm{d}\tau \right\} y^{(l)}(t)\, \mathrm{d}t$$

äquivalent ist, wo

$$\varphi_l(x, y_0, y_0', y_0'') = P_l(x, y_0, y_0', y_0'') + \int_{x_0}^{x} A_l(x, t)\, P_l(t, y_0, y_0', y_0'')\, \mathrm{d}t,$$

$$\psi_l(x, y_0, y_0', y_0'') = Q_l(x, y_0, y_0', y_0'') + \int_{x_0}^{x} B_l(x, t)\, Q_l(t, y_0, y_0', y_0'')\, \mathrm{d}t,$$

l ist eine der Zahlen 0, 1, 2, 3 und

$$P_l(x, y_0, y_0', y_0'') = \begin{cases} -y_0 q(x) - y_0'\left(p(x) + \dfrac{x - x_0}{1} q(x)\right) - y_0''\left(\dfrac{x - x_0}{1} p(x) + \dfrac{(x - x_0)^2}{2} q(x)\right) & \text{für } l = 3 \\ y_0'' - y_0' \displaystyle\int_{x_0}^{x} \left(p(t) + \frac{t - x_0}{1} q(t)\right) \mathrm{d}t - y_0 \int_{x_0}^{x} q(t)\, \mathrm{d}t & \text{für } l = 2, \\ y_0' + y_0''(x - x_0) - y_0 \displaystyle\int_{x_0}^{x} (x - t)\, q(t)\, \mathrm{d}t & \text{für } l = 1, \\ y_0 + y_0'(x - x_0) + (y_0'' + p(x_0)\, y_0) \dfrac{(x - x_0)^2}{2} & \text{für } l = 0; \end{cases}$$

$$A_l(x, t) = \begin{cases} -(x - t)\, p(x) - \dfrac{(x - t)^2}{2} q(x) & \text{für } l = 3, \\ -\displaystyle\int_{t}^{x} [p(\xi) + (\xi - t)\, q(\xi)]\, \mathrm{d}\xi & \text{für } l = 2, \\ -(x - t)\, p(t) - \displaystyle\int_{t}^{x} (x - \xi)\, q(\xi)\, \mathrm{d}\xi & \text{für } l = 1, \\ -(x - t)\, p(t) - \dfrac{(x - t)^2}{2} (q(t) - p'(t)) & \text{für } l = 0; \end{cases}$$

$$Q_l(x, y_0, y_0', y_0'') = \begin{cases} -p(x)\,(y_0' + (x - x_0)\, y_0'') + (q(x) - p'(x))\,\left(y_0 + (x - x_0)\, y_0' + \dfrac{(x - x_0)^2}{2} y_0''\right) & \text{für } l = 3, \\ y_0'' + p(x_0)\, y_0 - p(x)\,(y_0 + (x - x_0)\, y_0') + y_0 \displaystyle\int_{x_0}^{x} q(t)\, \mathrm{d}t & \text{für } l = 2, \\ y_0 \displaystyle\int_{x_0}^{x} [(x - t)\, q(t) - p(t)]\, \mathrm{d}t + y_0' + (p(x_0)\, y_0 + y_0'')\,(x - x_0) & \text{für } l = 1, \\ y_0 + y_0'(x - x_0) + (p(x_0)\, y_0 + y_0'') \dfrac{(x - x_0)^2}{2} & \text{für } l = 0; \end{cases}$$

$$
B_l(x,t) = \begin{cases} -(x-t)\,p(x) + \dfrac{(x-t)^2}{2}(q(x)-p'(x)) & \text{für } l = 3, \\[2ex] -(x-t)\,p(x) + \displaystyle\int_t^x (\xi - t)\,q(\xi)\,\mathrm{d}\xi & \text{für } l = 2, \\[2ex] \displaystyle\int_t^x [(x-\xi)\,q(\xi) - p(\xi)]\,\mathrm{d}\xi & \text{für } l = 1, \\[2ex] -(x-t)\,p(t) + \dfrac{(x-t)^2}{2}\,q(t) & \text{für } l = 0. \end{cases}
$$

Definition 1. *Wir sagen, daß die Differentialgleichung* $K[y] = 0$ *bzw.* $\bar{K}(y] = 0$ *aus der Klasse* $H_l^+(\mathscr{I})$ *ist, wenn der Kern der zugehörigen Integralgleichung* (4) *bzw.* (5) *eine nichtnegative (nichtpositive) Funktion für* $x_0 \leqq t \leqq x < b$ $(a < x \leqq t \leqq x_0)$ *ist.*

Definition 2. *Wir sagen, daß die Differentialgleichung* $K[y] = 0$ *bzw.* $\bar{K}[y] = 0$ *aus der Klasse* $H_l^-(\mathscr{I})$ *ist, wenn der Kern der betreffenden Integralgleichung* (4) *bzw.* (5) *eine nichtpositive (nichtnegative) Funktion für* $x_0 \leqq t \leqq x < b$ $(a < x \leqq t \leqq x_0)$ *ist.*

Bemerkung 2. Wenn die Differentialgleichung $K[y] = 0$ $(\bar{K}[y] = 0)$ aus der Klasse $H_l^+(\mathscr{I})$ bzw. $H_l^-(\mathscr{I})$ ist, dann ist notwendig $p(x) \leqq 0$ bzw. $p(x) \geqq 0$ für $x \in \mathscr{I}$.

Weiter bezeichnen wir $I = \mathscr{I} - \{x_0\}$.

Für die Lösungen der Differentialgleichung $K[y] = 0$ gilt die folgende Integralidentität [5]

$$
(8) \qquad yy'' - \frac{1}{2}y'^2 + \frac{1}{2}p(x)\,y^2 + \int_{x_0}^{x} \left\{ q(t) - \frac{1}{2}p'(t) \right\} y^2(t)\,\mathrm{d}t = \text{Konst.}
$$

Es existiere die Lösung $y_1(x)$ der Differentialgleichung $K[y] = 0$, welche im Intervall I positiv ist. Dann gilt in demselben Intervall I

$$
(9) \qquad (K[y] \equiv) \left(\frac{v'}{y_1}\right)' + \frac{1}{y_1}\left(p(x) + \frac{y_1''}{y_1}\right) v = 0,
$$

wo $v = y_1^2\,(y/y_1)'$ und y die Lösung der Differentialgleichung $K\,[y] = 0$ ist.

Durch Substitution $v = u\sqrt{y_1}$ geht die Differentialgleichung (9) in die folgende Differentialgleichung über

$$
(10) \qquad u'' + \left(p(x) + \frac{3}{2}\frac{y_1''}{y_1} - \frac{3}{4}\frac{y_1'^2}{y_1^2}\right) = 0, \qquad x \in I.
$$

Wenn $y_1(x_0) = y_1'(x_0) = 0$, $y_1''(x_0) = 1$ ist, dann haben wir aus der Integralidentität (8) für die Lösung y_1 im Intervall I

$$
\frac{3}{2}\frac{y_1''}{y_1} - \frac{3}{4}\frac{y_1'^2}{y_1^2} + p(x) = \frac{1}{4}p(x) - \frac{3}{2}\frac{1}{y_1^2(x)} \int_{x_0}^{x} \left\{ q(t) - \frac{1}{2}p'(t) \right\} y_1^2(t)\,\mathrm{d}t.
$$

Es ist dann möglich die Differentialgleichung (10) in der Form

$$
(11) \qquad u'' + \left\{ \frac{1}{4}p(x) - \frac{3}{2}\frac{1}{y_1^2(x)} \int_{x_0}^{x} \left[q(t) - \frac{1}{2}p'(t) \right] y_1^2(t)\mathrm{d}t \right\} u = 0
$$

zu schreiben.

Aus den Sätzen 1—3 [6] sowie aus dem Zusammenhang der Differentialgleichung (9) mit der Differentialgleichung (11) ergibt sich das

Lemma 3. *Die Differentialgleichung $K[y] = 0$ ist im Intervall $\mathscr{I}$ dann und nur dann nichtoszillatorisch (oszillatorisch), wenn die Differentialgleichung (11) im Intervall I nichtoszillatorisch (oszillatorisch) ist.*

Weiter werden wir oft die folgende Tatsache ausnützen: ist die Differentialgleichung $K[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ nichtoszillatorisch (oszillatorisch), dann ist auch die adjungierte Differentialgleichung $\bar{K}[y] = 0$ nichtoszillatorisch (oszillatorisch) im Intervall $\mathscr{I}$ und umgekerhrt (siehe [6]).

Aus dieser Tatsache und mit Rücksicht darauf, daß die Differentialgleichung $\bar{K}[y] = 0$ dieselbe Form wie die Differentialgleichung $K[y] = 0$ hat, erhalten wir: Wenn unter gewissen Voraussetzungen über die Koeffizienten $p(x)$, $q(x)$ die Differentialgleichung $K[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ nichtoszillatorisch (oszillatorisch) ist, dann ist bei demselben Typ von Voraussetzungen über die Koeffizienten $p(x)$, $p'(x) - q(x)$ die Differentialgleichung $\bar{K}[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ nichtoszillatorisch (oszillatorisch).

In den folgenden Sätzen werden wir uns dieser Tatsache bedienen und in den runden Klammern werden wir die Voraussetzungen über die Koeffizienten der Differentialgleichung $\bar{K}[y] = 0$ schreiben, welche wir so erhalten, daß wir die gegebenen Voraussetzungen über die Koeffizienten der Differentialgleichungen $K[y] = 0$ an die Koeffizienten der Differentialgleichung $\bar{K}[y] = 0$ überschreiben. Aus diesem Grund werden wir diese Fälle nicht beweisen.

OSZILLATORISCHE UND NICHTOSZILLATORISCHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN K [y] = 0

Satz 1. *Es sei l eine der Zahlen* 1, 2, 3 *und die Differentialgleichung $K[y] = 0$ ($\bar{K}[y] = 0$) sei aus der Klasse $H_l^+(\mathscr{I})$. Wenn dabei die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung*

$$u'' + \left\{\frac{1}{4}p(x) - \frac{3}{2}\inf_{\xi\in\mathscr{I}_1}\int_{\xi}^{x}\left[q(t) - \frac{1}{2}p'(t)\right]\mathrm{d}t\right\}u = 0 \tag{12}$$

$$\left(u'' + \left\{\frac{1}{4}p(x) + \frac{3}{2}\sup_{\xi\in\mathscr{I}_1}\int_{\xi}^{x}\left[q(t) - \frac{1}{2}p'(t)\right]\mathrm{d}t\right\}u = 0\right), \tag{13}$$

wo $\mathscr{I}_1$ ein Intervall ist, dessen Endpunkte die Zahlen x_0 und x sind, im Intervall I nichtoszillatorisch ist, dann ist die Differentialgleichung $K[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ nichtoszillatorisch.

Beweis. Es sei $y_1(x)$ die Lösung der Differentialgleichung $K[y] = 0$ mit der Eigenschaft $y_1(x_0) = y_1'(x_0) = 0, y_1''(x_0) = 1$. Da die Differentialgleichung $K[y] = 0$ aus der Klasse $H_l^+(\mathscr{I})$ ist und $(x - x_0)^l P_l(x, 0, 0, 1) \geqq 0$ für $x\in\mathscr{I}$ $(A_3(x, x_0) = P_3(x, 0, 0, 1))$, laut Lemma 1 ist für die Lösung $y_1^{(l)}(x)$ der Integralgleichung (4) im Intervall $\mathscr{I}$ $(x - x_0)^l\, y_1^{(l)}(x) \geqq (x - x_0)^l\, P_l(x, 0, 0, 1)$.

Aus diesen Tatsachen folgt, daß $(x - x_0)\, y_1'(x) \geqq 0$, $y_1(x) > 0$ für $x \in I$ ist.

Auf Grund des zweiten Satzes über den Mittelwert der Integralrechnung existiert dann solche Zahl $\xi\in\mathscr{I}_1$, daß

$$\frac{1}{y_1^2(x)}\int\limits_{x_0}^{x}\left[q(t)-\frac{1}{2}p'(t)\right]y_1^2(t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_{\xi}^{x}\left[q(t)-\frac{1}{2}p'(t)\right]\mathrm{d}t,\ x\in I$$

gilt. Mit Rücksicht darauf, daß

$$\int\limits_{\xi}^{x}\left[q(t)-\frac{1}{2}p'(t)\right]\mathrm{d}t\geq\inf_{\xi\in\mathcal{J}_1}\int\limits_{\xi}^{x}\left[q(t)-\frac{1}{2}p'(t)\right]\mathrm{d}t$$

für $x\in I$ ist, ist der Koeffizient bei u in der Differentialgleichung (11) kleiner oder gleich dem Koeffizienten bei u in der Differentialgleichung (12). Aus dem Vergleich der Differentialgleichungen (11) und (12) folgt, daß auch die Differentialgleichung (11) im Intervall I nichtoszillatorisch ist, wenn die Differentialgleichung (12) im Intervall I nichtoszillatorisch ist. Laut Lemma 3 ist deshalb die Differentialgleichung $K[y]=0$ im Intervall $\mathcal{J}$ nichtoszillatorisch.

Folgerung 1. *Es sei l eine der Zahlen 1, 2, 3 und die Differentialgleichung $K[y]=0$ ($\bar{K}[y]=0$) sei aus der Klasse $H_l^+(\mathcal{J})$ (d. h. daß $p(x)\leqq 0$ für $x\in\mathcal{J}$ ist). Wenn dabei $(x-x_0)\left[q(x)-\frac{1}{2}p'(x)\right]\geqq 0$ ($\leqq 0$) für $x\in\mathcal{J}$ ist, dann ist die Differentialgleichung $K[y]=0$ im Intervall $\mathcal{J}$ nichtoszillatorisch.*

Folgerung 2. *Es sei $(x-x_0)\left[q(x)-\frac{1}{2}p'(x)\right]\leqq 0$ ($\geqq 0$) und $p(x)\leqq 0$ für $x\in\mathcal{J}$. Wenn die Differentialgleichung*

$$u''+\left\{\frac{1}{4}p(x)-\frac{3}{2}\int\limits_{x_0}^{x}\left[q(t)-\frac{1}{2}p'(t)\right]\mathrm{d}t\right\}u=0 \tag{14}$$

$$\left(u''+\left\{\frac{1}{4}p(x)+\frac{3}{2}\int\limits_{x_0}^{x}\left[q(t)-\frac{1}{2}p'(t)\right]\mathrm{d}t\right\}u=0\right) \tag{15}$$

im Intervall I nichtoszillatorisch ist, dann ist die Differentialgleichung $K[y]=0$ im Intervall $\mathcal{J}$ nichtoszillatorisch.

Beweis. Den Beweis werden wir nur im Falle durchführen, wenn $q(x)-\frac{1}{2}p(x)\leqq\leqq 0$, $p(x)\leqq 0$ für $x\in\mathcal{J}=\langle x_0,b)$ ist. In den übrigen Fällen wird der Beweis ähnlich durchgeführt.

Aus der Ungleichheit $q(x)-\frac{1}{2}p(x)\leqq 0$ für $x\in\mathcal{J}$ ist ersichtlich, daß die Differentialgleichung (12) in der Form (14) geschrieben werden kann. Auf Grund des Satzes 1 genügt es also zu zeigen, daß die Differentialgleichung $K[y]=0$ aus der Klasse $H_l^+(\mathcal{J})$ ist, wo l eine der Zahlen 1, 2, 3 ist. Wir zeigen, daß die Differentialgleichung $K[y]=0$ aus der Klasse $H_2^+(\mathcal{J})$ ist.

Aus der Form des Kernes $A_2(x,t)$ der Integralgleichung (4) (für $l=2$)

$$A_2(x,t)=-\int\limits_{t}^{x}[p(\xi)+(\xi-t)\,q(\xi)]\,\mathrm{d}\xi$$

und aus den Ungleichheiten $p(x) \leqq 0$, $q(x) \leqq \frac{1}{2} p'(x)$ folgt:

$$A_2(x, t) \geqq -\int_t^x \left[p(\xi) + \frac{1}{2}(\xi - t)\, p'(\xi) \right] \mathrm{d}\xi = -\frac{1}{2}(x - t)\, p(x) -$$

$$-\frac{1}{2} \int_t^x p(\xi)\, \mathrm{d}\xi \geqq 0$$

für $x_0 \leqq t \leqq x < b$. Das bedeutet aber, dass die Differentialgleichung $K[y] = 0$ aus der Klasse $H_2^+(\mathscr{I})$ ist. Damit ist der Beweis beendet.

Bemerkung 3. Es sei die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$u'' + Q(x)\, u = 0 \tag{c}$$

gegeben, wo $Q(x) \in C(\mathscr{I})$ ist.

Es ist leicht zu zeigen (auf Grund dessen, daß die linearen unabhängigen Lösungen dieser Differentialgleichung ihre Nullstellen separieren), daß die Differentialgleichung (c) dann und nur dann nichtoszillatorisch [oszillatorisch] im Intervall $\mathscr{I}$ ist, wenn sie im Intervall I nichtoszillatorisch [oszillatorisch] ist.

Satz 2. *Es seien die Voraussetzungen des Satzes* 1 *erfüllt. Wenn dabei die Differentialgleichung* $K[y] = 0$ *im Intervall* $\mathscr{I}$ *oszillatorisch ist, dann ist die Differentialgleichung* (12) ((13)) *im Intervall* $\mathscr{I}$ *oszillatorisch.*

Der Beweis dieses Satzes folgt aus dem Vergleich der Differentialgleichungen (11) und (12).

Folgerung. *Es sei* $(x - x_0)\left[q(x) - \frac{1}{2} p'(x) \right] \leqq 0\ (\geqq 0)$ *und* $p(x) \leqq 0$ *für* $x \in \mathscr{I}$. *Ist die Differentialgleichung* $K[y] = 0$ *im Intervall* $\mathscr{I}$ *oszillatorisch, so ist die Differentialgleichung* (14) ((15)) *im Intervall* $\mathscr{I}$ *oszillatorisch.*

Satz 3. *Die Differentialgleichung* $K[y] = 0$ ($\bar{K}[y] = 0$) *sei aus der Klasse* $H_0^+(\mathscr{I})$ *(d. h. daß* $p(x) \leqq 0$ *für* $x \in \mathscr{I}$ *ist) und es sei* $(x - x_0)\left[q(x) - \frac{1}{2} p'(x) \right] \geqq 0\ (\leqq 0)$ *für* $x \in \mathscr{I}$. *Dann ist die Differentialgleichung* $K[y] = 0$ *im Intervall* $\mathscr{I}$ *nichtoszillatorisch.*

Beweis. Es sei $y_1(x)$ die Lösung der Differentialgleichung $K[y] = 0$ mit der Eigenschaft $y_1(x_0) = y_1'(x_0) = 0$, $y_1''(x_0) = 1$. Da die Differentialgleichung $K[y] = 0$ aus der Klasse $H_0^+(\mathscr{I})$ ist und $P_0(x, 0, 0, 1) > 0$ für $x \in I$ ist, haben wir laut Lemma 1 für $y_1(x)$ sowie auch für die Lösung der Integralgleichung (4) (für $l = 0$) im Intervall $\mathscr{I}$ $y_1(x) \geqq P_0(x, 0, 0, 1)$ d. h. $y_1(x) > 0$ für $x \in I$ ist. Mit Rücksicht darauf, daß $p(x) \leqq 0$, $(x - x_0)\left[q(x) - \frac{1}{2} p'(x) \right] \geqq 0$ für $x \in \mathscr{I}$, ist der Koeffizient bei u in der Differentialgleichung (11) nichtpositiv und deshalb ist die Differentialgleichung (11) im Intervall I nichtoszillatorisch [1]. Laut Lemma 3 folgt daraus, daß die Differentialgleichung $K[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ nichtoszillatorisch ist.

Satz 4. *Es sei* l *eine der Zahlen* 1, 2. *Die Differentialgleichung* $K[y] = 0$ ($\bar{K}(y) = 0$) *sei aus der Klasse* $H_l^-(\mathscr{I})$ *und es sei im Intervall* $\mathscr{I}$

$$(x - x_0)^l \varphi_l(x, 0, 0, 1) \geqq 0 \quad ((x - x_0)^l \psi_l(x, 0, 0, 1) \geqq 0).$$

Wenn dabei die Differentialgleichung zweiter Ordnung (12) ((13)) *im Intervall I nichtoszillatorisch ist, dann ist die Differentialgleichung* $K[y] = 0$ *im Intervall* $\mathcal{I}$ *nichtoszillatorisch.*

Beweis. Es sei $y_1(x)$ die Lösung der Differentialgleichung $K[y] = 0$ mit der Eigenschaft $y_1(x_0) = y_1'(x_0) = 0$, $y_1''(x_0) = 1$. Da die Differentialgleichung $K[y] = 0$ aus der Klasse $H_l^-(\mathcal{I})$ ist und $(x - x_0)^l \varphi_l(x, 0, 0, 1) \geqq 0$ für $x \in \mathcal{I}$ ist, haben wir gemäß Lemma 2 für die Lösung $y_1^{(l)}(x)$ der Integralgleichung (4) im Intervall $\mathcal{I}$

$$(x - x_0)^l y_1^{(l)}(x) \geqq (x - x_0)^l \varphi_l(x, 0, 0, 1) \geqq 0.$$

Mit Rücksicht auf die Anfangsbedingungen, welche von $y_1(x)$ in der Zahl x_0 erfüllt werden, haben wir aus der letzten Ungleichung $(x - x_0)\, y_1'(x) \geqq 0$, $y_1(x) > 0$ für $x \in I$. Der Beweis wird weiter derart durgeführt, daß die Differentialgleichungen (11) und (12) verglichen werden (siehe den Beweis des Satzes 1) und das Lemma 3 angewendet wird.

Ähnlich werden folgende Sätze bewiesen:

Satz 5. *Die Voraussetzungen des Satzes* 4 *seien erfüllt. Ist die Differentialgleichung* $K[y] = 0$ *im Intervall* $\mathcal{I}$ *oszillatorisch, so ist auch die Differentialgleichung* (12) ((13)) *im Intervall* $\mathcal{I}$ *oszillatorisch.*

Bemerkung 4. Die Differentialgleichung $K[y] = 0$ ist im Intervall $\mathcal{I}$ dann und nur dann nichtoszillatorisch, wenn sie im Intervall I nichtoszillatorisch ist (siehe Folgerung 4 [6]). Daraus geht hervor:

Die Differentialgleichung $K[y] = 0$ ist im Intervall $\mathcal{I}$ oszillatorisch gerade dann, wenn sie im Intervall I oszillatorisch ist.

Satz 6. *Die Voraussetzungen des Satzes* 4 *seien erfüllt und die Differentialgleichung zweiter Ordnung*

$$u'' + \left\{\frac{1}{4} p(x) - \frac{3}{2} \sup_{\xi \in \mathcal{I}_1} \int_\xi^x \left[q(t) - \frac{1}{2} p'(t) \right] dt \right\} u = 0 \tag{16}$$

$$\left(u'' + \left\{\frac{1}{4} p(x) + \frac{3}{2} \inf_{\xi \in \mathcal{I}_1} \int_\xi^x \left[q(t) - \frac{1}{2} p'(t) \right] dt \right\} u = 0\right), \tag{17}$$

wo $\mathcal{I}_1$ *ein Intervall ist, dessen Endpunkte die Zahlen* x_0 *und* x *bilden, sei im Intervall* $\mathcal{I}$ *oszillatorisch. Dann ist die Differentialgleichung* $K[y] = 0$ *im Intervall I oszillatorisch.*

Satz 7. *Es seien die Voraussetzungen des Satzes* 4 *erfüllt. Ist die Differentialgleichung* $K[y] = 0$ *im Intervall* $\mathcal{I}$ *nichtoszillatorisch, so ist die Differentialgleichung* (16) ((17)) *im Intervall I nichtoszillatorisch.*

Aus den Sätzen 4 und 6 ergibt sich nachstehende

Folgerung. *Die Voraussetzungen des Satzes* 4 *seien erfüllt. Es sei* $(x - x_0) \left\{q(x) - \frac{1}{2} p'(x)\right\} \geqq 0 \ (\leqq 0) \left[(x - x_0) \left\{ q(x) - \frac{1}{2} p'(x) \right\} \leqq 0 \ (\geqq 0) \right]$ *für* $x \in \mathcal{I}$ *und die Differentialgleichung zweiter Ordnung*

$$u'' + \frac{1}{4} p(x)\, u = 0 \tag{18}$$

sei im Intervall I nichtoszillatorisch [*oszillatorisch*]. *Dann ist die Differentialgleichung* $K[y] = 0$ *nichtoszillatorisch* [*oszillatorisch*] *im Intervall* $\mathcal{I}$.

Bemerkung 5. Aus der Voraussetzung $p(x) \geqq 0$, $(x - x_0)\left\{q(x) - \frac{1}{2}p'(x)\right\} \geqq 0$ $(\leqq 0)$ für $x \in \mathcal{I}$ folgt, daß die Differentialgleichung $K[y] = 0$ $(\bar{K}[y] = 0)$ aus der Klasse $H_1^-(\mathcal{I})$ und $H_2^-(\mathcal{I})$ ist.

Satz 8 [**3**]. *Es existiere die Lösung $\bar{y}(x)$ der Differentialgleichung $K[y] = 0$ $(\bar{K}[y] = 0)$ mit der Eigenschaft $\bar{y}(x) > 0$, $(x - x_0)\,\bar{y}'(x) > 0$ für $x \in \mathcal{I}$ und dabei sei $(x - x_0)\,q(x) \geqq 0$ $((x - x_0)\,[p'(x) - q(x)] \geqq 0)$ für $x \in \mathcal{I}$. Dann ist die Differentialgleichung $K[y] = 0$ im Intervall $\mathcal{I}$ nichtoszillatorisch.*

Satz 8' [**3**]. *Es sei $(x - x_0)\,q(x) \geqq 0$ $((x - x_0)\,[p'(x) - q(x)] \geqq 0)$ für $x \in \mathcal{I}$. Dann ist die notwendige Bedingung für die Existenz der Lösung $\bar{y}(x)$ der Differentialgleichung $K[y] = 0$ $(\bar{K}[y] = 0)$ mit der Eigenschaft $\bar{y}(x) > 0$, $(x - x_0)\,\bar{y}'(x) > 0$ in I, daß die Differentialgleichung zweiter Ordnung*

$$u'' + p(x)\,u = 0 \tag{18'}$$

im Intervall $\mathcal{I}$ nichtoszillatorisch sei.

Satz 9. *Es sei $p(x) \geqq 0$, $(x - x_0)\,q(x) \geqq 0$ $\left((x - x_0)\left[p'(x) - q(x)\right] \geqq 0\right)$ in $\mathcal{I}$ und zwar derart, daß*

$$\varphi_2\,(x, 0, 0, 1) \geqq 0 \quad (\psi_2(x, 0, 0, 1) \geqq 0),$$

oder

$$(x - x_0)\,\varphi_1(x, 0, 0.\,1) > 0 \;((x - x_0)\,\psi_1(x, 0, 0, 1) > 0)$$

für $x \in I$ ist. Dann ist die Differentialgleichung $K[y] = 0$ im Intervall $\mathcal{I}$ nichtoszillatorisch.

Beweis. Es sei $p(x) \geqq 0$, $(x - x_0)\,q(x) \geqq 0$ für $x \in \mathcal{I}$. Aus diesen Voraussetzungen sehen wir, dass die Differentialgleichung $K[y] = 0$ aus der Klasse $H_l^-(\mathcal{I})$ ist, wo l eine der Zahlen 1, 2 ist. Aus dieser Tatsache und daraus, daß $(x - x_0)^l\varphi_l(x, 0, 0, 1) \geqq 0$ für $x \in \mathcal{I}$ ist, wobei $(x - x_0)\;\varphi_1(x, 0, 0, 1) > 0$ in I, können wir ähnlicher Weise, wie wir den Satz 4 bewiesen haben, zeigen, daß für die Lösung $y_1(x)$ von $K[y] = 0$ mit der Eigenschaft $y_1(x_0) = y_1'(x_0) = 0$, $y_1''(x_0) = 1$ im Intervall I die Ungleichungen $y_1(x) > 0$, $(x - x_0)\,y_1'(x) > 0$ gelten. Aus diesen Tatsachen ergibt sich dann auf Grund des Satzes 8, daß die Differentialgleichung $K[y] = 0$ im Intervall $\mathcal{I}$ nichtoszillatorisch ist.

Bemerkung 6. Die Voraussetzungen des Satzes 9 seien erfüllt. Dann ist die Differentialgleichung zweiter Ordnung (18') im Intervall $\mathcal{I}$ nichtoszillatorisch (siehe Beweis des Satzes 9 und den Satz 8').

Aus dem Vergleich der Differentialgleichungen (16), (17), (18) mit der nichtoszillatorischen Differentialgleichung (18') $(p(x) \geqq 0$ in $\mathcal{I})$ folgt, daß dann auch die Differentialgleichungen (16), (17), (18) im Intervall $\mathcal{I}$ nichtoszillatorisch sind.

Satz 10. *Die Differentialgleichung $K[y] = 0$ $(\bar{K}[y] = 0)$ sei aus der Klasse $H_0^-(\mathcal{I})$ und $\varphi_0(x, 0, 0, 1) > 0$ $(\psi_0(x, 0, 0, 1) > 0)$ sei für $x \in I$. Wenn dabei $(x - x_0)\left\{q(x) - \frac{1}{2}p'(x)\right\} \geqq 0\ (\leqq 0)$ $\left[(x - x_0)\left\{q(x) - \frac{1}{2}p'(x)\right\} \leqq 0\ (\geqq 0)\right]$ für $x \in \mathcal{I}$ ist und die Differentialgleichung* (18) *im Intervall I nichtoszillatorisch* [*oszillatorisch*] *ist, dann ist die Differentialgleichung $K[y] = 0$ im Intervall $\mathcal{I}$ nichtoszillatorisch* [*oszillatorisch*].

Beweis. Es sei $y_1(x)$ die Lösung der Differentialgleichung $K[y] = 0$ mit der Eigenschaft $y_1(x_0) = y_1'(x_0) = 0$, $y_1''(x_0) = 1$. Da die Differentialgleichung $K[y] = 0$ aus der Klasse $H_0^-(\mathscr{I})$ ist und $\varphi_0(x, 0, 0, 1) > 0$ für $x \in I$ ist, haben wir laut Lemma 2 für $y_1(x)$, wie auch für die Lösung der Integralgleichung (4) (für $l = 0$), $y_1(x) \geqq \varphi_0(x, 0, 0, 1) > 0$ für $x \in I$. Wenn $(x - x_0)\left\{q(x) - \frac{1}{2}p'(x)\right\} \geqq 0$ $\left[(x - x_0)\left\{q(x) - \frac{1}{2}p'(x)\right\} \leqq 0\right]$ für $x \in \mathscr{I}$ ist, dann gilt für die Koeffizienten der Differentialgleichungen (11) und (18)

$$\frac{1}{4}p(x) - \frac{3}{2}\frac{1}{y_1^2(x)}\int_{x_0}^{x}\left\{q(t) - \frac{1}{2}p'(t)\right\}y_1^2(t)\,dt \leqq \frac{1}{4}p(x)$$

$$\left[\frac{1}{4}p(x) - \frac{3}{2}\frac{1}{y_1^2(x)}\int_{x_0}^{x}\left\{q(t) - \frac{1}{2}p'(t)\right\}y_1^2(t)\,dt \geqq \frac{1}{4}p(x)\right], x \in I.$$

Aus dieser Ungleichheit und aus der Tatsache, daß die Differentialgleichung (18) im Intervall I nichtoszillatorisch [oszillatorisch] ist, folgt, daß auch die Differentialgleichung (11) im Intervall I nichtoszillatorisch [oszillatorisch] ist. Deshalb ist gemäß Lemma 3 die Differentialgleichung $K[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ nichtoszillatorisch [oszillatorisch].

DISKUSSION

G. Sansone [5] bewies folgenden Vergleichssatz:

$A(x)$ sei eine stetige Funktion von x zusammen mit ihrer ersten Ableitung im Intervall $\langle a, b\rangle$, $b(x) \geqq 0$ sei auch stetig in $\langle a, b\rangle$ und $y(x)$ sei die die Anfangsbedingungen

$$y(a)\,y''(a) - \frac{1}{2}y'^2(a) + A(a)\,y^2(a) \leqq 0$$

erfüllende Lösung der Differentialgleichung

$$y''' + 2Ay' + (A' + b)\,y = 0.$$

Weiter sei $A_1'(x)$ eine stetige Funktion von $x \in < a, b >$ und für $a \leqq x \leqq b$ gelte $A(x) \geqq A_1(x)$.

$z(x)$ sei die Lösung der selbstadjungierten Differentialgleichung

(19) $$z''' + 2A_1z' + A_1'z = 0$$

mit doppelten aufeinanderfolgenden Nullstellen α, β; $a \leqq \alpha < \beta \leqq b$.

Dann hat $y(x)$ im Intervall (α, β) wenigstens eine Nullstelle, außer dem Fall, daß $A \equiv A_1$, $b \equiv 0$ und $y(x) = kz(x)$ in $\langle \alpha, \beta\rangle$ ist, wobei k eine Konstante bezeichnet.

Aus dem Zusammenhang zwischen den Lösungen der selbstadjungierten Differentialgleichung (19) und der Differentialgleichung zweiter Ordnung

(20) $$u'' + \frac{1}{2}A_1u = 0$$

(siehe [5] oder (1]) folgt:

Die Differentialgleichung (19) *ist im Intervall* $\langle a, b\rangle$ *dann und nur dann oszillatorisch, wenn die Differentialgleichung* (20) *im Intervall* $\langle a, b\rangle$ *oszillatorisch ist.*

Auf Grund des Vergleichssatzes von G. Sansone und mit Rücksicht darauf, daß die Differentialgleichung $K[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ oszillatorisch ist, wenn die adjungierte Differentialgleichung $\bar{K}[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ oszillatorisch ist und umgekehrt, ist es möglich in der Folgerung nach dem Satze 7 und im Satz 10 die Voraussetzungen, unter welchen die Differentialgleichung $K[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ oszillatorisch ist, folgenderweise abzuschwächen:

Es sei $q(x) - \frac{1}{2}p'(x) \geqq 0$ *oder* $q(x) - \frac{1}{2}p'(x) \leqq 0$ *für* $x \in \mathscr{I}$ *und die Differentialgleichung* (18) *sei oszillatorisch im Intervall* $\mathscr{I}$. *Dann ist die Differentialgleichung* $K[y] = 0$ *im Intervall* $\mathscr{I}$ *oszillatorisch.*

In den Arbeiten [7], [8], [9] werden die Differentialgleichungen der dritten Ordnung mit folgenden zwei Eigenschaften untersucht:

V_1: *Jede nichttriviale Lösung der linearen homogenen Differentialgleichung dritter Ordnung, welche in einem Punkte* c, $c \in \mathscr{I}$, *eine zweifache Nullstelle besitzt, hat keine Nullstelle, die kleiner als* c *ist.*

V_2: *Jede nichttriviale Lösung der linearen homogenen Differentialgleichung dritter Ordnung, welche in einem Punkte* c, $c \in \mathscr{I}$, *eine zweifache Nullstelle besitzt, hat keine Nullstelle, die größer als* c *ist.*

Es ist leicht zu sehen, daß die Differentialgleichung $K[y] = 0$ $(\bar{K}[y] = 0)$ aus der Klasse $H_l^+(\bar{\mathscr{I}})$ $[H_l^-(\bar{\mathscr{I}})]$ ist, wenn diese aus der Klasse $H_l^+(\mathscr{I})$ $[H_l^-(\mathscr{I})]$ ist, wobei $\bar{\mathscr{I}} = \langle \bar{x}_0, b)$ bzw. $(a, \bar{x}_0 \rangle$, $\bar{x}_0 \in I$.

Wenn die Differentialgleichung $K[y] = 0$ $(\bar{K}[y] = 0)$ aus der Klasse $H_l^+(\mathscr{I})$ ist, so hat diese auch die Eigenschaft V_2 bzw. V_1 (siehe die Definition der Funktion $P_l(x, 0, 0, 1)$ und den Beweis des Satzes 1; l ist eine der Zahlen 0, 1, 2, 3).

Ähnlich, wenn die Differentialgleichung $K[y] = 0$ $(\bar{K}[y] = 0)$ aus der Klasse $H_2^-(\mathscr{I})$ ist und

$$\varphi_2(x, 0, 0, 1) = 1 + \int_{x_0}^{x} A_2(x, t)\, dt \geqq 0 \qquad \left(\psi_2(x, 0, 0, 1) = 1 + \int_{x_0}^{x} B_2(x, t)\, dt \geqq 0\right)$$

[aus dieser Ungleichheit folgt, daß auch

$$1 + \int_{\bar{x}_0}^{x} A_2(x, t)\, dt \geqq 0 \qquad \left(1 + \int_{\bar{x}_0}^{x} B_2(x, t)\, dt \geqq 0\right)$$

für jede $\bar{x}_0 \in I$, $x \in \bar{\mathscr{I}}$ ist], dann hat die Differentialgleichung $K[y] = 0$ $(\bar{K}[y] = 0)$ die Eigenschaft V_2 bzw. V_1 (siehe Beweis des Satzes 4).

Weiter wird in den Arbeiten [7], [8], [9] der Begriff der oszillatorischen und nichtoszillatorischen Differentialgleichung folgendermassen definiert:

Definition 3. *Man sagt, daß die lineare homogene Differentialgleichung im Intervall* J *oszillatorisch ist, wenn sie wenigstens eine nichttriviale Lösung hat, welche im Intervall* J *unendlich viele Nullstellen hat. Im entgegengesetzten Falle sagen wir, daß sie im Intervall* J *nichtoszillatorisch ist.*

Bei dem derart definierten Begriff der oszillatorischen Differentialgleichung ist in der Arbeit [7] folgender Satz bewiesen:

Die lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung mit der Eigenschaft V_1 *oder* V_2 *ist dann und nur dann im Intervall* J *oszillatorisch, wenn die zu ihr adjungierte Differentialgleichung im Intervall* J *oszillatorisch ist.*

Auf Grund dieser Tatsache ist es möglich, in den Sätzen 1—10 und ihren Folgerungen, die Oszillationsfähigkeit und die Nichtoszillationsfähigkeit der gegebenen Differentialgleichungen (die Oszillationsfähigkeit nur wenn die Differentialgleichung $K[y] = 0$ ($\bar{K}(y] = 0$) die Eigenschaft V_1 oder V_2 hat) im Sinne der Definition 3 zu verstehen.

Wenn wir den Zusammenhang zwischen den Lösungen der Differentialgleichungen (9) und $\bar{K}[y] = 0$ beachten, sehen wir, daß jede Lösung der Differentialgleichung (9) zugleich die Lösung der Differentialgleichung $\bar{K}[y] = 0$ ist.

Infolge dieses Umstandes (wenn wir dabei die Oszillationsfähigkeit der gegebenen Differentialgleichungen im Sinne der Definition 3 verstehen) können wir den Satz 6 folgenderweise umformulieren: *Die Voraussetzungen des Satzes 4 seien erfüllt und die Differentialgleichung zweiter Ordnung* (16), ((17)) *sei im Intervall $\mathscr{I}$ oszillatorisch. Dann ist die Differentialgleichung $\bar{K}[y] = 0$ ($K[y] = 0$) im Intervall $\mathscr{I}$ oszillatorisch. Dabei hat die Differentialgleichung $\bar{K}[y] = 0$ ($K[y] = 0$) ein Paar linear unabhängiger Lösungen im Intervall I, welche in diesem Intervall unendlich viele einfache, sich gegenseitig separierende Nullpunkte hat.*

In diesem Sinne ist es auch möglich die Folgerung nach dem Satze 7 und den Satz 10 umzuformulieren.

LITERATUR

[1] Сансоне Дж., Обыкновенные дифференциальные уравнения, Том I, Москва 1953, перевод из итальянского.

[2] Gera M., *Bedingungen der Nicht-oszillationsfähigkeit für die lineare Differentialgleichung dritter Ordnung $y''' + p_1(x)\,y'' + p_2(x)\,y' + p_3(x)\,y = 0$*, Acta Fac. Rer. Nat. Univ. Comenianae — Mathematica, XXIII (1969), 13—34.

[3] Gera M., *Bedingungen der Nicht-oszillationsfähigkeit und der Oszillationsfähigkeit für die lineare Differentialgleichung dritter Ordnung*, Mat. časop. 21 (1971), 65—80.

[4] Greguš M., *O oscilatoričnosti riešení diferenciálnej rovnice tretieho rádu*, Sborník družby pěti bratrských universít Kyjev, Krakov, Debrecín, Bratislava, Brno, Praha (1966), 146 až 150.

[5] Sansone G., *Studi sulle equazioni differenzialli lineari omogene di terzo ordine nel campo reale*, Revista Matem. y Fisica Teoretica, Seria A (1948) Tucuman, 195—253.

[6] Gera M., *Allgemeine Bedingungen der Nicht-oszillationsfähigkeit und der Oszillationsfähigkeit für die lineare Differentialgleichung dritter Ordnung $y''' + p_1(x)\ y'' + p_2(x)\ y' + p_3(x)\,y = 0$*, Mat. časop. 20 (1970), 49—61.

[7] Hanan M., *Oscillation criteria for third-order linear differential equations*, Pacific. J. Math. II (1961), 919—944.

[8] Швец М., Несколько замечаний о линейном дифференциальном уравнении третьего порядка, Чех. мат. ж., т. 15 (90) (1965), 42—49.

[9] Švec M., *Einige asymptotische und oszillatorische Eigenschaften der Differentialgleichung $y''' + A(x)\,y' + B(x)\,y = 0$*, Czech. mat. J., 15 (90) (1965), 378—393.

[10] Mammana G., *Decomposizione delle espressioni differenziali lineari omogenee in prodotti di fattori simbolici e applicazione relativa allo studio delle equazioni differenzialli lineari*, Math. Z. 33 (1931), 186—231.

Milan Gera
Mathematisches Institut
Šmeralova 2b, Bratislava
Tschechoslowakei