Archivum Mathematicum

Stefania Ruscior

Une correspondance par parallélisme partiel entre deux variétés réglées de l'espace S_5

Archivum Mathematicum, Vol. 6 (1970), No. 4, 251--255

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104730`

Terms of use:

© Masaryk University, 1970

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

UNE CORRESPONDANCE PAR PARALLÉLISME PARTIEL ENTRE DEUX VARIÉTÉS RÉGLÉES DE L'ESPACE S_5

Stefania Ruscior

(Présenté le 31 Mars 1970)

Dans cette Note nous avons considéré une correspondance par variétés linéaires tangentes partiellement parallèles entre deux variétés réglées de dimensions 3 et 2 d'un espace affine S_5. D. M. Y. Sommerville [1] a introduit dans un espace affine S_n à n dimensions les notions de parallélisme partiel et de parallélisme complet. En partant de ces notions et en employant la théorie des treillis géométriques, nous avons considéré quelques aspects algébriques du parallélisme [2], [3].

La relation de parallélisme donnée dans [4] n'est pas symétrique et ne se rapporte qu'au parallélisme complet. Ainsi, A est parallèle à B ($A \parallel B$), si $A \cap B = \varnothing$ et $A \cup B$ couvre B. Si nous considérons dans un espace S_3 un plan A et une droite B, nous aurons, d'après la définition précédente, le plan parallèle à la droite, tandis que la droite n'est pas parallèle au plan, parce que $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = S_3$. Donc, l'espace S_3 couvre le plan, mais il ne couvre pas la droite.

En vue d'étendre la définition du parallélisme formulée dans [4], afin qu'elle comprenne aussi le parallélisme partiel, nous avons fait les considérations suivantes [5]:

Soit $\overline{M}$ l'ensemble des variétés linéaires mixtes, appartenant à un espace affine S_n, ces variétés étant formées de points propres et de points impropres. Pour définir ces variétés, nous avons introduit un treillis géométrique M de dimension n, formé de variétés ne contenant que des points propres, et un treillis géométrique M^* de dimension $n - 1$, formé de variétés ne contenant que des points impropres.

Une variété mixte $\bar{A} \in \overline{M}$ est définie par le couple (A, A^*), si

1° $A \in M$, $A^* \in M^*$;

2° la dimension d'une des variétés A où A^* est $\geqslant 1$, c'est-à-dire d$[A]$ où bien d$[A^*] \geqslant 1$;

3° d$[A]$ — d$[A^*] = \pm 1$.

Ceci implique $\bar{A} = (A, A^*) = (A^*, A)$.

Pour le couple qui contient l'élément nul $\emptyset$, nous avons par définition:

$$\text{pour } \forall\ A \in M,\ (A,\ \emptyset) = (\emptyset, A) = A,$$

$$\text{pour } \forall\ A^* \in M^*,\ (\emptyset,\ A^*) = (A^*, \emptyset) = A^*.$$

La dimension de la variété linéaire mixte $\bar{A}$ est un nombre naturel $d[\bar{A}]$ donné par la plus grande dimension des variétés composantes:

$$d[\bar{A}] = \max\{d[A], d[A^*]\}.$$

Nous trouvons de même une loi fondamentale qui lie les dimensions de deux variétés mixtes $\bar{A}$ et $\bar{B}$:

$$(1) \qquad d[\bar{A}] + d[\bar{B}] \leqq n + d[\bar{A} \cap \bar{B}].$$

Deux variétés linéaires mixtes distinctes $\bar{A}$ et $\bar{B}$ de dimension $\geqslant 1$ sont appelées *parallèles* ($\bar{A} \parallel \bar{B}$), si leur intersection est une variété impropre C^*. Donc, $\bar{A} \parallel \bar{B}$, si $\bar{A} \cap \bar{B} = C^*$.

Il résulte de cette définition que la relation de parallélisme est symétrique et que la dimension de l'intersection détermine aussi la dimension du parallélisme entre $\bar{A}$ et $\bar{B}$.

On appelle la dimension δ du parallélisme sur l'ensemble des variétés linéaires mixtes M une fonction numérique $P(\bar{A}, \bar{B}) \geqslant 0$, définie pour chaque couple $(\bar{A}, \bar{B}) \in \bar{M}$, $\bar{A} \parallel \bar{B}$, $\bar{A} \neq \bar{B}$ de dimension $\geqslant 1$, donnée par l'expression

$$(2) \qquad \delta = P(\bar{A}, \bar{B}) = \frac{d[\bar{A} \cap \bar{B}] + 1}{\min\{d[\bar{A}], d[\bar{B}]\}}$$

et ayant les propriétés suivantes:

1) $P(\bar{A}, \bar{B})$ est un nombre rationnel contenu dans l'interval $[0, 1]$, c'est-à-dire $0 \leqq \delta \leqq 1$;

2) lorsque $\delta \neq 0$, les variétés $\bar{A}$ et $\bar{B}$ ne sont pas paralléles;

3) lorsque $\delta = 1$, les variétés $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont complètement parallèles.

Dans l'espace S_5, l'ensemble des variétés linéaires mixtes $\bar{M}$ contient les éléments $\bar{V}_i (i = 1, \ldots, 5)$: $\bar{M} = \{\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3, \bar{V}_4, \bar{V}_5\}$. Si nous étudions la nature du parallélisme entre $\bar{V}_2$ et $\bar{V}_3$, c'est-à-dire entre les plans et les hyperplans de dimension 3, nous avons

$$\bar{V}_2 \parallel \bar{V}_3, \text{ si} \begin{cases} \bar{V}_2 \cap \bar{V}_3 = V_1^* \Rightarrow \delta = 2/2 = 1, \\ \bar{V}_2 \cap \bar{V}_3 = V_0^* \Rightarrow \delta = 1/2. \end{cases}$$

Dans le premier cas, les variétés considérées sont complètement parallèles et ont comme intersection une droite impropre. Dans le deuxième cas, les variétés considérées sont semi-parallèles et ont en commun un point impropre. Dans les deux cas la loi fondamentale (1) est vérifiée.

Donc, si nous considérons dans S_5 deux variétés réglées de dimensions 3 et 2, elles peuvent être semi-parallèles, parceque la relation (1) est vérifiée, et $\delta = 1/2$.

Nous nous sommes proposés dans ce qui suit de mettre en correspondance par semi-parallélisme des variétés réglées V_3 à trois dimensions et variétés réglées V_2 à deux dimensions d'un espace affine S_5. Ayant en vue que ces variétés sont de types différents ([6], [3]), nous ne considérons que celles qui ne contiennent pas de points singuliers sur une génératrice génerique, c'est-à-dire que V_3 est de catégorie V_0^2 et V_2 de catégorie V_0^1.

Nous disons que deux variétés réglées V_3 et V_2 sont mises en correspondance par variétés tangentes semi-parallèles, si dans les points correspondants les hyperplans tangents H à la variété V_3 et les plans tangents P à la variété V_2 sont semi-parallèles.

Soit V_3 une variété donnée par l'équation

$$\bar{r} = \bar{\varrho}(u, v) + w\bar{a}(u, v), \tag{3}$$

où $\bar{\varrho} = \bar{\varrho}(u, v)$ représente une surface directrice de la variété et $\bar{a} = \bar{a}(u, v)$ est le vecteur unitaire d'une génératrice générique g de V_3. La variété réglée V_2 est donnée par une équation de la même forme

$$\bar{r}^* = \bar{\varrho}^*(u) + w^*\bar{a}^*(u), \tag{4}$$

où $\bar{\varrho}^* = \bar{\varrho}^*(u)$ est une courbe directrice de la variété et $\bar{a}^* = \bar{a}^*(u)$ est le vecteur unitaire de la génératrice g^* de V_2.

L'hyperplan tangent H est déterminé en chaque point de la génératrice g par les vecteurs

$$\bar{\varrho}_u + w\bar{a}_u,\ \bar{\varrho}_v + w\bar{a}_v \text{ et } \bar{a}.$$

Le plan tangent mené dans un point de la génératrice g^* est déterminé par les vecteurs

$$\bar{\varrho}_u^* + w^*\bar{a}_u^* \text{ et } \bar{a}^*(u).$$

L'hyperplan tangent H et le plan tangent P sont déterminés dans tous les points des variétés, parce que les variétés V_3 et V_2 étant des types mentionnés, le rang de la matrice fonctionnelle

$$(\bar{\varrho}_u + w\bar{a}_u,\ \bar{\varrho}_v + w\bar{a}_v,\ \bar{a})$$

est égal à 3 et celui de

$$(\bar{\varrho}_u^* + w^*\bar{a}_u^*,\ \bar{a}^*)$$

est égal à 2. Les fonctions qui interviennent dans ces matrices sont régulières et d'ordre 1.

L'hyperplan H admet comme section impropre un plan π^* situé dans l'hyperplan impropre S_4^* de l'espace affine S_5. Le plan P admet comme section impropre une droite δ^* située dans le même S_4^*. En général, un plan et une droite n'admettent pas des points communs dans S_4. Pour que H et P soient semi-parallèles il faut que le plan π^* et la droite δ^* aient un point commun, c'est-à-dire se trouvent dans le même espace S_3^*. Par conséquent, $\pi^* \cup \delta^* = S_3^*$.

La condition nécessaire et suffisante pour que $\pi^* \cup \delta^* = S_3^*$ est que la matrice des vecteurs

$$(\bar{\varrho}_u + w\bar{a}_u,\ \bar{\varrho}_v + w\bar{a}_v,\ \bar{\varrho}_u^* + w_u^*\bar{a}_u,\ \bar{a},\ \bar{a}^*) \tag{5}$$

soit de rang 4. Alors les vecteurs qui forment la matrice (5) sont linéairement dépendents. Par conséquent, l'hyperplan H et le plan P ont un point commun impropre si et seulement si le déterminant correspondant à la matrice (5) est nul, ce qui implique

$$[\bar{\varrho}_u + w\bar{a}_u,\ \bar{\varrho}_v + w\bar{a}_v,\ \bar{\varrho}_u^* + w^*\bar{a}_u^*,\ \bar{a},\ \bar{a}^*] = 0. \tag{6}$$

En développant ce déterminant, nous obtenons la correspondance cherchée. Nous ordonnons les termes d'après w et w^*, qui représentent les coordonnées projectives des points situés sur les génératrices g et g^*, et obtenons

$$\begin{aligned} &ww^*\{[\bar{a}_u,\ \bar{\varrho}_v,\ \bar{a}_u^*,\ \bar{a},\ \bar{a}^*] + [\bar{\varrho}_u,\ \bar{a}_v,\ \bar{a}_u^*,\ \bar{a},\ \bar{\alpha}^*]\} + \\ &+ w\{[\bar{a}_u,\ \bar{\varrho}_v,\ \bar{\varrho}_u^*,\ \bar{a},\ \bar{a}^*] + [\bar{\varrho}_u,\ \bar{a}_v,\ \bar{\varrho}_u^*,\ \bar{a},\ \bar{a}^*]\} + \\ &+ w^*[\bar{\varrho}_u,\ \bar{\varrho}_u^*,\ \bar{a}_u^*,\ \bar{a},\ \bar{a}^*] + [\bar{\varrho}_u,\ \bar{\varrho}_v,\ \bar{\varrho}_u^*,\ \bar{a},\ \bar{a}^*] = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

La relation (7) nous montre qu'entre les points de deux génératrices correspondantes s'établit, par le semi-parallélisme des variétés linéaires tangentes, une correspondance homographique. Cette correspondance est intepprétée géométriquement comme il suit:

En considérant une génératrice g^* sur V_2, fixée par $u =$ const., il en résulte une infinité de génératrices correspondantes sur V_3, données par $u =$ const. et v arbitraire. Cette infinité de génératrices forme une surface réglée U située sur V_3. À toute génératrice de la surface U correspond par semi-parallélisme la génératrice g^* sur V_2. Nous avons ainsi une correspondance entre les génératrices g^* sur V_2 et les surfaces réglées U sur V_3. La manière dont la génératrice g^* est mise en correspondance avec une des géneratrices de la surface U est arbitraire et peut être déterminée à l'aide d'une fonction univoque dépendant de l'argument u. Une fois cette fonction $v = \varphi(u)$ fixée, à une génératrice g^* sur V_2 il correspond une certaine génératrice g sur la surface réglée U. Mais à toutes les génératrices de la surface U, il correspond la même génératrice g^* sur V_2. Par conséquent, si nous fixons un point M^* sur g^* donné par $w^* =$ const., le point correspondant M sur une des génératrices g correspondantes est obtenu par l'homographie (7).

La correspondance est telle que l'hyperplan tangent à la variété V_3 en M est semi-parallèle avec le plan tangent à la variété V_2 en M^*.

On constate que si les génératrices correspondantes sont parallèles, l'homographie (7) est indéterminée, parce que la relation (7) est vérifiée identiquement.

En effet, dans ce cas tout plan tangent P en un point de g^* est semi-parallèle à tout hyperplan H en un point de g. Donc, l'homographie (7) est indéterminée (parce que $\bar{a} = \bar{a}^*$). Par conséquent, la correspondance par semi-parallélisme est déterminée seulement si $\bar{a}^*(u) \neq \bar{a}(u)$.

Nous avons, donc, obtenu les résultats suivants:

— Deux variétés V_3 et V_2, de dimensions 3 et 2, ayant respectivement les types V_0^2 et V_0^1, peuvent être mises en correspondance par variétés tangentes semi-parallèles si et seulement si les génératrices correspondantes ne sont pas parallèles.

— À une génératrice g^* sur V_2 correspond par semi-parallélisme une infinité de génératrices g sur V_3 qui forment une surface réglée U.

— Si l'on considére une fonction univoque qui mette en correspondance g^* avec une des genératrices de la surface U, alors les points sur les génératrices correspondantes sont des points qui se correspondent homographiquement par la relation (7).

BIGLIGRAPHIE

1. Sommerville D. M. Y., *An introduction to the geometry of n dimensions*. London. 1929.
2. Ruscior St., *Aspecte algebrice ale corespondenţei prin paralelism*. Bul. Inst. Polit. Iaşi, tom. VI(X), fasc. 1—2, 1960, pp 1—6.
3. Ruscior St., *Sur le problème de la correspondance par parallélisme entre les varités réglées dans S_n*. Annali di Matematica pura ed applicata. Bologna, tom. LXXX, 1968, pp. 153—166.
4. Dubreil-Jacotin M. L., Lesieur L. et Croisot R., *Leçons sur la théorie des treillis des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques*. Paris. 1953.
5. Ruscior St., *Despre o funcţie numerică ce caracterizează paralelisme parţiale*. Bul. Inst. Polit. Iaşi, tom. XVI(XX), fasc. 3—4, 1970 (sous presse).
6. Ruscior St., *Sur les propriétés des hypersurfaces réglées dans E_5*. Bull. de l'Acad. Polonaise des Sci., vol. XIII, No. 3, 1965, pp. 225—227.

Institut Polytechnique
IAŞI Roumanie