Archivum Mathematicum

Lucien Godeaux

Sur la suite de Laplace de l'espace à cinq dimensions associée à une surface

Archivum Mathematicum, Vol. 6 (1970), No. 3, 149--154

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104718`

SUR LA SUITE DE LAPLACE DE L'ESPACE À CINQ DIMENSIONS ASSOCIÉE À UNE SURFACE

LUCIEN GODEAUX (LIEGE)

(Présenté le 13 Mars 1970)

Dans des travaux antérieurs [1] nous avons associé à une surface de l'espace ordinaire une suite de Laplace L d'un espace S_5 à cinq dimensions. La suite L est déterminée par les points de l'hyperquadrique Q de Klein de S_5 qui représentent les tangentes asymptotiques en un point à la surface (x) considérée. Cette suite de Laplace L est autopolaire par rapport à l'hyperquadrique Q et nous en avons déduit l'existence d'une suite de quadriques Φ, Φ^1, Φ^2, ... attachée à chaque point x de la surface (x), la première étant la quadrique de Lie. Deux quadriques consécutives de cette suite se touchent en quatre points qui sont caractéristiques pour chacune des quadriques.

Nous avons cherché dans quelles conditions les asymptotiques de l'enveloppe d'une quadrique Φ^n correspondaient à celles u, v de la surface (x).[2] Nous reprenons cette question dans cette note pour simplifier nos démonstrations, pour préciser les résultats et les compléter sur quelques points.

1. Soit (x) une surface non réglée de l'espace ordinaire S_3 rapportée à ses asymptotiques u, v. Les coordonnées normales de Wilczynski d'un point x de la surface (x) satisfont à un système d'équations aux dérivées partielles complètement intégrable

$$x_{uu} + 2bx_v + p'x = 0, \qquad x_{vv} + 2ax_u + p''x = 0,$$

oú a, b, p', p'' sont des fonctions de u, v différentialles autant de fois que cela est nécessaire. Les fonctions a, b ne sont pas identiquement nulles puisque (x) n'est pas réglée.

Désignons par Q l'hyperquadrique d'un espacee S_5 à cinq dimensions dont les points représentent les droites de S_3. Soient

$$U = | xx_u |, \qquad V = | xx_v |$$

les points de Q qui correspondent aux tangentes asysptotiques xx_u, xx_v en un point x de la surface (x). Nous avons

$$U_u + 2bV = 0, \qquad V_v + 2aU = 0$$

et les points U, V sont transformés de Laplace l'un de l'autre.

Les points U, V sont consécutifs dans une suite de Laplace

$$\ldots, U^n, \ldots, U^1, U, V, V^1, \ldots, V^n, \ldots \qquad (L)$$

où chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u. Nous supposerons que cette suite L est illimitée dans les deux sens et qu'en dehors des points U, V, aucun de ses points n'appartient à l'hyperquadrique Q.

L'hyperplan tangent à Q au point U est $U^1UVV^1V^2$ et l'hyperplan tangent à Q au point V est $U^2U^1UVV^1$. La suite L est autopolaire par rapport à Q en ce sens que l'hyperplan polaire du point U^i est $V^{i-1}V^{i-2}V^iV^{i+1}V^{i+2}$ et que l'hyperplan polaire du point V^i est $U^{i-1}U^{i-2}U^iU^{i+1}U^{i+2}$.

2. Rappelons quelques propriétés déjà établies dans nos travaux précédents.

Les plans $U^nU^{n+1}U^{n+2}$ et $V^nV^{n+1}V^{n+2}$ sont conjugués par rapport à Q et coupent cette hyperquadrique suivant deux coniques dont les points représentent les génératrices rectilignes des deux modes d'une quadrique non conique Φ^n. Nous avons ainsi une suite de quadriques Φ, Φ^1, $\ldots$, Φ^n, $\ldots$ attachée au point x de la surface (x), la première, qui correspond aux plans UU^1U^2 et VV^1V^2 étant la quadrique de Lie.

Deux quadriques consécutives de la suite se touchent en quatre points qui sont caractéritiques pour chacune des quadriques. L'enveloppe des quadriques Φ^n se compose donc de deux nappes, l'une commune à l'enveloppe des quadriques Φ^{n-1}, l'autre commune à l'enveloppe des quadriques Φ^{n+1}.

Dans le cas de la quadrique de Lie, on sait que la surface (x) fait partie de l'enveloppe comptée quatre fois.

3. Soient C^1, C^2 les points de rencontre de la droite V^nV^{n+1} avec Q et D^1, D^2 ceux de la droite U^nU^{n+1}.

Les tangentes $C^1C^1_v$, $C^2C^2_v$ aux lignes v des surfaces (C^1), (C^2) appartiennent au plan $V^{n+1}V^nV^{n-1}$ et se coupent en un point A. L'hyperplan polaire de A passe par les point C^1, C^2 donc par les points V^n, V^{n+1} et contient le plan $U^{n+1}U^nU^{n-1}$, c'est donc l'hyperplan $U^nU^{n+1}V^{n+1}V^nV^{n-1}$.

Les tangentes $D^1D^1_u$, $D^2D^2_u$ aux lignes u des surfaces (D^1), (D^2) appartiennent au plan $U^nU^{n+1}U^{n+2}$ et se coupent en un point B. L'hyperplan polaire de B contient les points V^{n+2}, V^{n+1}, V^n, U^{n+1}, U^n.

Il en résulte que l'espace polaire de la droite AB est $U^nU^{n+1}V^nV^{n+1}$.

Les tangentes $C^1C^1_u$, $C^2C^2_u$ aux lignes u des surfaces (C^1), (C^2) appartiennent au plan $V^nV^{n+1}V^{n+2}$ et se coupent en un point A' dont l'hyperplan polaire contient les points U^n, U^{n+1}, U^{n+2}, V^n, V^{n+1}.

Les tangentes aux lignes v des surfaces (D^1), (D^2) sont dans le plan $U^nU^{n+1}U^{n+2}$ et se rencontrent en un point B' dont l'hyperplan polaire est $V^nV^{n+1}V^{n+2}U^nU^{n+1}$.

L'espace polaire de la droite $A'B'$ est donc $U^n U^{n+1} V^n V^{n+1}$ et par conséquent les droites AB et $A'B'$ coincident.

Les plans tangents aux points de rencontre avec l'hyperquadrique Q des droites $U^n U^{n+1}$ et $V^n V^{n+1}$ passent par une même droite.

Les points A et B et les points A' et B' sont conjugués par rapport à Q.

Aux points C^1, C^2, D^1, D^2 correspondent dans S_3 quatre droites c^1, c^2, d^1, d^2 formant un quadrilatère gauche T dont les sommets (c^1, d^1), (c_1, d^2), (c^2, d^1), (c^2, d^2) sont des points caractéristiques de la quadrique Φ^n.

Aux points de rencontre G^1, G^2 de la droite AB avec Q correspondent deux droites g^1, g^2 qui rencontrent chacune des quatre droites c^1, c^2, d^1, d^2 car les droites joignant les points G^1, G^2 aux points C^1, C^2, D^1, D^2 appartiennent à Q. Il en résulte que les droites g^1, g^2 sont les diagonales du quadrilatère T.

4. Les points A, B, A', B' sont-ils distincts. S'il en est autrement, le point A' ne peut coïncider qu'avec le point B et alors le point B' coïncide nécessairement avec le point A.

Plaçons nous dans cette hypothèse. Le point A appartenant aux plans $V^{n+1} V^n V^{n-1}$ et $U^n U^{n+1} U^{n+2}$, son dérivé A_u appartient aux plans $U^{n+1} U^n U^{n-1}$ et $V^n V^{n+1} V^{n+2}$. Par conséquent la droite AA_u passe par le point B. Donc, le transformé de Laplace du point A est le point B.

On démontre de même que le transformé de Laplace de B dans le sens des v est le point A. Il en résulte que les points A, B sont consécutifs dans une suite de Laplace

$$\ldots, A_m, \ldots, A^1, A, B, B^1, \ldots, B_m, \ldots \qquad (\mathscr{A}$$

chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des u.

Le point A appartenant aux plans $V^{n+1} V^n V^{n-1}$ et $U^n U^{n+1} U^{n+2}$, son transformé de Laplace A^1 dans le sens des v appartient aux plans $V^n V^{n-1} V^{n-2}$ et $U^{n+1} U^{n+2} U^{n+3}$. Et ainsi de suite.

Le point A^i appartient aux plans

$$U^{n+i} U^{n+i+1} U^{n+i+2} \quad \text{et} \quad V^{n-i+1} V^{n-i} V^{n-i-1}$$

et le point B^i aux plans

$$V^{n+i} V^{n+i+1} V^{n+i+2} \quad \text{et} \quad U^{n-i+1} U^{n-i} U^{n-i-1}.$$

Pour $i = n$, on voit que le point A^n appartient aux plans $U^{2n} U^{2n+1} U^{2n+2}$ et $V^1 V U$. Plus généralement, le point A^{n+i} appartient aux plans

$$U^{2n+i} U^{2n+i+1} U^{2n+i+2} \quad \text{et} \quad U^{i-2} U^{i-1} U^i.$$

Le point B^n appartient aux plans $V^{2n} V^{2n+1} V^{2n+2}$ et $U^1 U V$. Le point B^{n+i} appartient aux plans

$$V^{2n+i} V^{2n+i+1} V^{2n+i+2} \quad \text{et} \quad V^{i-2} V^{i-1} V^i.$$

On voit que le plan déterminé par trois points consécutifs de la suite L contient deux points de la suite $\mathscr{A}$ et que celle-ci est illimitée dans les deux sens.

Appelons avec Demoulin *ligne brisée de Laplace* l'ensemble des droites joignant deux points consécutifs d'une suite de Laplace et, d'une manière analogue, *polyèdre de Laplace à faces triangulaires* l'ensemble des plans déterminés par trois points consécutifs d'une suite de Laplace.

Lorsque le couple $A'B'$ coïncide avec le couple AB, les points A, B sont transformés de Laplace l'un de l'autre et appartiennent à une suite de Laplace $\mathscr{A}$ doublement inscrite dans le polyèdre de Laplace à faces triangulaires associé à la suite L.

On remarquera que les points A^i et B^i sont conjugués par rapport à l'hyperquadrique Q, mais qu'il n'en est pas de même des points A^i et B^{i+1}.

5. Recherchons dans quelles conditions les asymptotiques de la surface (c^1, d^1) sont les courbes u, v. Cela revient à chercher dans quelles conditions il existe un point $\lambda C^1 + \mu D^1$ de la droite C^1D^1 dont la tangente à la ligne u (ou v) coïncide avec cette droite.

La tangente à la ligne u de la surface $(\lambda C^1 + \mu D^1)$ au point $\lambda C^1 + \mu D^1$ passe par le point

$$(\lambda C^1 + \mu D^1)_u = \lambda C^1_u + \mu D^1_u + \lambda_u C^1 + \mu_u D^1$$

et pour notre objet, il faut que pour une valeur de u, v, ce point appartienne à la droite C^1D^1. Cela n'est possible que si la droite $C^1_uD^1_u$ rencontre la droite C^1D^1. Mais alors, les droites $C^1C^1_u$ et $D^1D^1_u$ sont dans un même plan et se rencontrent en un point qui ne peut être que le point B, coïncidant avec A'.

On établit de même si la tangente à la ligne v en un point de la droite C^1D^1 coïncide avec cette droite, les droites $C^1C^1_v$ et $D^1D^1_v$ sont coplanaires; elles se rencontrent au point A qui coïncide avec B'. L'existence du point considéré résulte d'ailleurs du fait que si A' coïncide avec B, B' coïncide avec A.

On conclut de tout ceci que s'il existe sur la droite C^1D^1 un point X tel que la droite XX_u coïncide avec C^1D^1, il existe un point Y tel que la droite YY_v coïncide avec la même droite. Les points X, Y sont transformés de Laplace l'un de l'autre et les asymptotiques de la surface (c^1, d^1) sont les courbes u, v.

On remarquera que dans ces conditions, les courbes u, v sont également les asymptotiques des surfaces engendrées par les autres sommets du quadrilatère T.

La condition nécessaire et suffisante pour que les asymptotiques de la surface engendrée par un sommet du quadrilatère gauche T soient les courbes u, v est que les points A', B' coïncident avec les points A, B. Les *courbes u, v sont également les asymptotiques des surfaces engendrées par les autres sommets du quadrilatère T.*

Les points X, Y déterminent une suite de Laplace. Les tangentes aux lignes u aux points de la droite C^1D^1 se trouvent dans le plan C^1D^1B, donc le point Y_u se trouve dans ce plan, de même que le transformé de Laplace Y^1 de Y dans le sens des u. De même le transformé de Laplace X_1 de X dans le sens des v appartient au plan C^1D^1A. On voit donc que le point A appartient au plan X^1XY et le point B au plan XYY^1, donc:

La suite de Laplace $\mathscr{A}$ est inscrite dans le polyèdre de Laplace à faces triangulaires associé à la suite de Laplace déterminée par les points X, Y.

6. Comme nous l'avons rappelé l'enveloppe des quadriques Φ^n se compose de deux nappes: l'une formée par les quatre surfaces lieux des sommets du quadrilatère gauche T, l'autre faisant partie de l'enveloppe des quadriques Φ^{n+1}, lieu des quatre points de contact communs à Φ^n, Φ^{n+1}.

Supposons que les asymptotiques des huit surfaces qui composent l'enveloppe des quadriques Φ^n soient les courbes u, v. Les points A' et B' coïncident avec les points B et A et de plus les tangentes aux courbes v aux points de rencontre de Q avec les droites $V^{n+1}V^{n+2}$ et $U^{n+1}U^{n+2}$ passent par un même point A_1. Dans ces conditions, les tangentes aux courbes u aux mêmes points concourent en un point B_1, transformé de Laplace de A_1 dans le sens des u.

Les points A_1, B_1 appartiennent à une suite de Laplace

$$\ldots, A_1^m, \ldots, A_1^1, A_1, B_1, B_1^1, \ldots, B_1^m, \ldots \qquad (\mathscr{A}_1)$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u.

Les suites $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}_1$ peuvent-elles être confondues.

S'il en est ainsi, le plan $V^nV^{n+1}V^{n+2}$ contenant les points A_1, B et B^{2n+2} et le plan $U^nU^{n+1}U^{n+2}$ les points B_1, A et A^{2n+2}, le point A_1 doit coïncider avec B ou B^{2n+2} et le point B_1 avec A ou A^{2n+2}.

Supposons que A_1 coïncide avec B. Ces deux points appartiennent aux plans $U^{n-1}U^nU^{n+1}$ et $U^{n+1}U^{n+2}U^{n+3}$ qui ont en commun la droite $U^{n+1}B$. Ces plans appartiennent donc à un espace à trois dimensions qui contient cinq points consécutifs U^{n-1}, U^n, U^{n+1}, U^{n+2}, U^{n+3} de la suite L, ce qui est impossible puisque cette suite appartient à un espace à cinq dimensions. Le point A_1 ne peut donc coïncider avec le point B. Par un raisonnement analogue, on démontre que le point B_1 ne peut coïncider avec A. Il en résulte que les points A_1 et B^{2n+2} coïncident, de même que les points B_1 et A^{2n+2}.

Les transformés de Laplace des points A_1 et B^{2n+2} dans le sens des u doivent coïncider, donc les points B_1 et B^{2n+3} coïncident, de même que les points A_1 et A^{2n+3}. Il en résulte que les hyperplans polaires des points $A^{2n+2}A^{2n+3}$, B^{2n+2}, B^{2n+3} doivent passer par l'espace polaire de la droite A_1B_1, c'est-à-dire par l'espacce $V^{n+1}V^{n+2}U^{n+1}U^{n+2}$, espace que nous désignerons par E.

Sur les surfeces (C^1), (C^2), (D^1), (D^2) les courbes u, v forment un réseau conjugué. D'ailleurs les côtés du quadrimatère gauche T engendrent des congruences W. Les points C^1, C^2, D^1, D^2 appartiennent donc à quatre suites de Laplace inscrites dans la suite L et circonscrites à la suite $\mathscr{A}$.

Si C^{11}, C^{21} sont les transformés de Laplace des points C^1, C^2 dans le sens des v, ils appartiennent à la droite V^nV^{n-1} et les tangentes en ces points aux courbes v passent par le point A^1. L'hyperplan polaire de A^1 contient donc la droite V^nV^{n-1}. Pour une raison analogue, il contient également la droite $U^{n+1}U^{n+2}$. Et ainsi de suite.

L'hyperplan polaire de A^{2n+2} contient les droites U^nU^{n+1} et $U^{3n+2}U^{3n+3}$ et celui de A^{2n+3}, les droites $U^{n+1}U^{n+2}$ et $U^{3n+3}U^{3n+4}$. Ces deux hyperplans doivent passer par E. Ils ont en commun la droite $U^{n+1}U^{3n+3}$ qui appartient donc à E. On démontre de même que la droite $V^{n+1}V^{3n+3}$ appartient à E.

Ni les points $V^{n-1}V^nV^{n+1}$ ni les points $U^{n-1}U^nU^{n+1}$ ne peuvent être en ligne droite, car la suite L qui appartient à un espace à cinq dimensions ne peut avoir trois points consécutifs en ligne droite.

Les plans $V^{n-1}V^nV^{n+1}$ et $U^{n-1}U^nU^{n+1}$ qui sont conjugués et appartiennent à un espace à trois dimensions E ont en commun une droite a qui est sa proprre conjuguée et appartient donc à Q. Le plan $V^{n-1}V^nV^{n+1}$ coupe Q suivant la droite a et suivant une autre droite qui contient au plus deux des points V^{n-1}, V^n, V^{n+1} et par suite a contient au moins un de ces points, contrairement à l'hypothèse que, sauf les points U, V, aucun point de la suite L appartient à Q.

Les suites de Laplace $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}_1$ ne peuvent coïncider.

BIBLIOGRAPHIE

[1] *Sur les lignes asymptotiques d'une surface et l'espace réglé* (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1927, pp. 812—826, 1928, pp. 31—41). Voir également *La théorie des surfaecs et l'espace réglé* (Paris, Hermann, 1934) et notre mémoire *La Géométrie differentielle des surfaces considérée dans l'espace réglé* (Mémoires in — 80 de l'Académie roy. de Belgique, 1964).

[2] Voir notre mémoire cité plus haut et une note *Sur une correspondance entre surfaces avec conservation des asymptotiques* (Bulletin des Sciences Mathématiques, 1954, pp. 139—146).

37, quae Orban
4000 — Liége, Belgique