Archivum Mathematicum

Lev M. Berkovič

Об одном классе неавтономных нелинейных дифференциальных уравнений n-го порядка

Archivum Mathematicum, Vol. 6 (1970), No. 1, 7--13

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104708`

Л. М. Беркович

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕАВТОНОМНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ n-ГО ПОРЯДКА

(Посвящается профессору O. Borůvka в связи с 70-летием со дня рождения)

(Поступило в редакцию 18-ого декабря 1969 г.)

ВВЕДЕНИЕ

E. Pinney [1] установил, что нелинейное уравнение 2-го порядка

$$y'' + p(x)\, y + by^{-3} = 0, \qquad b = \text{const} \tag{1}$$

($p(x)$ — непрерывная функция в рассматриваемом интервале), имеет решение

$$y = \sqrt{y^2 - bw^{-2}y_2^2}\,, \tag{2}$$

где $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ образуют фундаментальную систему решений линейного уравнения

$$y'' + p(x)\, y = 0, \tag{3}$$

а $w = w\,(y_1, y_2,) = const$ — Вронскиан.

В работах [2], [3], [4] (см. также [5]) рассматривались нелинейные дифференциальные уравнения 1-го и 2-го порядков, имеющие своими решениями функции от решений соответствующих линейных уравнений. В [6] рассматривались нелинейные дифференциальные уравнения 1-го и 2-го порядков, решения которых выражались через решения соответствующих нелинейных уравнений.

В данной работе исследуется некоторый класс нелинейных дифференциальных уравнений n-го порядка. Из полученных результатов вытекает упомянутый выше результат E. Pinney.

§ 1. Основные теоремы.

Теорема 1. *Если линейное однородное дифференциальное уравнение*

$$L_n(y) \equiv y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)\, y = 0 \tag{4}$$

приводимо к уравнению с постоянными коэффициентами

$$M_n(z) \equiv z_{(t)}^{(n)} + b_{n-1} z_{(t)}^{(n-1)} + \ldots + b_0 z = 0, \tag{5}$$

преобразованием функции и независимой переменной

$$y = v(x)\, z \qquad \mathrm{d}t = v^{\alpha}(x)\, \mathrm{d}x, \qquad \alpha = \mathrm{const}, \tag{6}$$

то нелинейное дифференциальное уравнение

$$N_n(y) \equiv L_n(y) + by^{n\alpha+1} = 0 \tag{7}$$

допускает в качестве решения функцию

$$y = pv(x), \tag{8}$$

где

$$p = \left(-\frac{b_0}{b}\right)^{\frac{1}{n\alpha}} \tag{9}$$

Доказательство. Как было показано в ([7], теорема 2), если уравнение (4) приводится к уравнению с постоянными коэффициентами преобразованием

$$y = v(x)\, z, \qquad \mathrm{d}t = u(x)\, \mathrm{d}x, \tag{10}$$

то функции $v(x)$ и $u(x)$ удовлетворяют следующему уравнению:

$$Ln(v) - bou^{n}(x)\,\vartheta = O. \tag{11}$$

Подставим (8) в (7) и используем (11) при $u = v^{\alpha}$:

$$\begin{aligned} N_n(pv) &= pL_n(v) + bp^{n\alpha+1}v^{n\alpha+1} - pb_0v^{n\alpha+1} + pb_0v^{n\alpha+1} = \\ &= bp^{n\alpha+1}v^{n\alpha+1} + pb_0v^{n\alpha+1} = pv^{n\alpha+1}(bp^{\,n\alpha} + b_0). \end{aligned} \tag{12}$$

Предполагая, что $p \neq 0$ и $v \neq 0$, найдем из (12), что при условии (9) $Nn(pv) = 0$, что и требовалось доказать.

Теорема 1 в несколько иной формулировке была анонсирована в [8].

Теорема 2. *Если линейное однородное дифференциальное уравнение* (4) *приводится к уравнению с постоянными коэффициентами* (5) *преобразованием* (6), *то неавтономное нелинейное дифференциальное уравнение* (7) *тем же преобразованием* (6) *приводится к автономному уравнению*

$$M_n(z) + bz^{n\alpha+1} = 0, \qquad z = z(t). \tag{13}$$

Доказательство. Непосредственно проверяется, что подстановка (6) в (7) приводит к уравнению $v^{n\alpha}\cdot vM_n(z) + bv^{n\alpha+1}z^{n\alpha+1} = 0$, откуда после сокращения на $v^{n\alpha+1}$ приходим к уравнению (13).

§ 2. Вывод результата E. Pinney.

Сформулированный во Введении результат E. Pinney проверяется непосредственно, и в [1] не был указан способ получения этого результата. Здесь будет показана принадлежность уравнения (1) к классу нелинейных дифференциальных уравнений (7), рассмотренному в § 1, откуда вытекает, что для уравнения (1) имеет место результат E. Pinney, а также то, что уравнение (1) приводится к автономному уравнению (см. теорему 3).

Чтобы было возможным применить теоремы 1 и 2 к уравнению (1), должно выполняться условие $2\varkappa + 1 = -3$, откуда $\alpha = -2$ и преобразование (6) примет вид:

$$y = v(x)\, z, \qquad \mathrm{d}t = v^{-2}(x)\, \mathrm{d}x. \tag{14}$$

Лемма 1. *Уравнение* (3) *приводится к уравнению с постоянными коэффициентами преобразованием* (14).

Доказательство. В силу непрерывности $p(x)$ левая часть уравнения (3) допускает факторизацию (см., например, [9], стр. 177—179):

$$[D^2 + p(x)]\, y = (D + \beta)\, (D - \beta)\, y, \qquad D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}, \tag{15}$$

где β —, вообще говоря, комплексно-значная функция от x.

В то же время, так как (3) приводимо преобразованием (10) (см., например, [10]), то согласно ([7], теорема 1) имеет место факторизация:

$$[D^2 + p(x)]\, y = \left(D - \frac{v'}{v} - r_2 u - \frac{u'}{u}\right) \left(D - \frac{v'}{v} - r_1 u\right) y, \tag{16}$$

где r_1, r_2 являются корнями характеристического уравнения $M_2(r) = 0$. В силу (14) факторизация (16) примет вид

$$[D^2 + p(x)]\, y = \left(D + \frac{v'}{v} - r_2 \frac{1}{v^2}\right) \left(D - \frac{v'}{v} - r_1 \frac{1}{v^2}\right) y. \tag{17}$$

При выполнении условия $r_2 = -r_1$ (17) примет форму (15). Доказательство леммы окончено.

Лемма 2. *Функция* $v(x)$ *из преобразования* (14) *может быть взята в форме*

$$v(x) = \left(-\frac{b_0}{b}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{y_1^2 - b w^{-2} y_2^2}\,. \tag{18}$$

Доказательство. Как известно, общее решение уравнения (3), приводимого преобразованием (14) к уравнению $z''(t) + b_0 z = 0$, имеет вид

$$y = v\left[C_1 \exp\left(r_1 \int \frac{dx}{v^2}\right) + C_2 \exp\left(r_2 \int \frac{dx}{v^2}\right)\right], \tag{19}$$

где r_1, r_2 являются корнями характеристического уравнения $r^2 + b_0 = 0$, а C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Положив

$$v \exp\left(r_1 \int \frac{dx}{v^2}\right) = y_1 + \sqrt{b}\, w^{-1} y_2, \tag{20}$$

найдем $v(x)$. Взяв логарифмическую производную от выражения (20), придем к уравнению Бернулли относительно v:

$$v' = \frac{y_1' + \sqrt{b}\, w^{-1} y_2'}{y_1 + \sqrt{b}\, w^{-1} y_2}\, v - \frac{r_1}{v}. \tag{21}$$

Будем искать решение уравнения (21) в форме

$$v(x) = C(x)\,(y_1 + \sqrt{b}\, w^{-1} y_2). \tag{22}$$

Отыскивая неизвестную функцию $C(x)$ по методу вариации произвольной постоянной, приходим к выражению:

$$\frac{1}{2} C^2(x) = -r_1 \int \frac{dx}{(y_1 + \sqrt{b}\, w^{-1} y_2)^2} +$$

$$+ C_1 = -r_1 \int \frac{dx}{y_1^2 \left(1 + \sqrt{b}\, w^{-1} \frac{y_2}{y_1}\right)^2} + C_1 =$$

$$= -\frac{r_1}{\sqrt{b}} \int \frac{d\left(1 + \sqrt{b}\, w^{-1} \frac{y_2}{y_1}\right)}{\left(1 + \sqrt{b}\, w^{-1} \frac{y_2}{y_1}\right)^2} + C_1 = \frac{r_1}{\sqrt{b}} \frac{1}{1 + \sqrt{b}\, w^{-1} \frac{y_2}{y_1}} + C_1 =$$

$$= \frac{r_1}{\sqrt{b}} \frac{y_1}{y_1 + \sqrt{b}\, w^{-1} y_2} + C_1. \tag{23}$$

Найдя $C(x)$ из (23) и подставив полученное выражение для $C(x)$ в (22), придем к соотношению

$$v(x) = \sqrt{\left[\left(2\frac{r_1}{\sqrt{b}} + 2C_1\right) y_1 + 2C_1 \sqrt{b}\, w^{-1} y_2\right] (y_1 + \sqrt{b}\, w^{-1} y_2)}\,.$$

Положив

$$2\frac{r_1}{\sqrt{b}} + 2C_1 = -2C_1,$$

получим

$$v(x) = \sqrt{\frac{r_1}{\sqrt{b}}}\sqrt{y_1^2 - bw^{-2}y_2^2} = \left(-\frac{b_0}{b}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{y_1^2 - bw^{-2}y_2^2}. \tag{18}$$

Доказательство леммы 2 окончено.

Теорема 3. *Уравнение* (1) *имеет решение* (2) *и преобразованием*

$$y = \left(-\frac{b_0}{b}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{y_1^2 - bw^{-2}y_2^2}\, z, \qquad dt = \frac{1}{\sqrt{-\frac{b_0}{b}(y_1^2 - bw^{-2}y_2^2)}}\, dx \tag{24}$$

приводится к автономному уравнению

$$z''(t) + b_0 z + bz^{-3} = 0. \tag{25}$$

Доказательство. В силу леммы 1 уравнение (1) удовлетворяет теореме 1. Применяя теорему 1 и лемму 2 к (1), получаем:

$$y = pv = \left(-\frac{b_0}{b}\right)^{-\frac{1}{2.2}}\left(-\frac{b_0}{b}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{y_1^2 - bw^{-2}y_2^2} = \sqrt{y_1^2 - bw^{-2}y_2^2}. \tag{2}$$

Для окончания доказательства остается воспользоваться теоремой 2. Преобразование (24) есть (14) при условии (18), а уравнение (25) есть частный случай уравнения (13).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Pinney E., *The Nonlinear Differential Equation* $y'' + p(x)y + ey^{-3} = 0$, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 1, 1950, p. 581.

[2] Thomas J. M., *Equations Equivalent to a Linear Differential Equation*, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 3, 1952, pp. 899—903.

[3] Herbst R. T., *The Equivalence of Linear and Nonlinear Differential Equations*, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 7, 1956, pp. 95—97.

[4] Gergen J. J. and Dressel F. G., *Second Order Linear and Nonlinear Differential Equations*, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 16, 1965, 767—773.

[5] Ames W. F., *Nonlinear Ordinary Differential Equations in transport processes*, Academic Press, New York and London, 1968.

[6] de Spautz J. F. and Lerman R. A., *Equations Equivalent to Nonlinear Differential Equations*, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 18, 1967, pp. 441—444.

[7] Беркович Л. М., *О факторизации обыкновенных линейных дифференциальных операторов, преобразуемых в операторы с постоянными коэффициентами*, Известия вузов. Математика., 1967, № 12, 3—14.
[8] Беркович Л. М., *О линеаризации некоторых дифференциальных уравнений*, *Тезисы докладов по физико-математическим наукам*, Куйбышевский политехнический институт, 1969, 3—4.
[9] Сансоне Дж., *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, т. 1, ИИЛ, Москва, 1953.
[10] Беркович Л. М., *О факторизации и приводимости обыкновенных линейных дифференциальных уравнений 2-го и самосопряженных дифференциальных уравнений 3-го порядков*, Труды 11 Республиканской конференции математиков Белоруссии, Минск, Белорусский университет, 1969, 165—170.

Автор: доцент Л. М. Беркович,
СССР, г. Куйбышев, политехнический институт,
кафедра высшей математики
(Домашний адрес: Куйбышев, 86, Московское шоссе, 26, кв. 1)

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NON-AUTONOMES ET NON-LINÉAIRES D'ORDRE n

Résumé

Dans ce travail on démontre les théorèmes suivantes:

Théorème I. Si l'équation différentielle linéaire

$$Ln(y) \equiv y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)\, y = 0 \tag{4}$$

se réduit a l'équation a coefficients constants

$$Mn(z) \equiv z_{(t)}{}^{(n)} + b_{n-1} z_{(t)}{}^{(n-1)} + \ldots + b_0 z = 0 \tag{5}$$

par une transformation d'une fonction et d'une variable independante

$$y = v(x)\, z, \qquad \mathrm{d}t = v^{\alpha}(x)\, \mathrm{d}x, \qquad \alpha = \text{const} \tag{6}$$

l'équation non-linéaire

$$Nn(y) \equiv Ln(y) + b y^{n\alpha+1} = 0, \qquad b = \text{const} \tag{7}$$

a la solution

$$y = pv(x),$$

ou

$$p = \left(-\frac{b_0}{b}\right)^{\frac{1}{n\alpha}}.$$

Théorème 2. Si l'équation (4) se réduit à l'équation (5) par une transformation (6) l'équation non-autonome (7) se réduit à l'équation autonome

$$Mn(z) + bz^{n\alpha+1} = 0, \qquad z = z(t).$$

Théorème 3. (E. Pinney [1]). L'équation différentielle du second ordre $y'' + p(x)\, y + by^{-3} = 0$ a la solution $y = \sqrt{y_1^2(x) - bw^{-2}y_2^2(x)}$, ou les fonctions y_1, y_2 forment un systéme fondamental des solutions d'équation linéaire $y'' + p(x)\, y = 0$ [$w = w(y_1, y_2) =$ const est le Wronskian], et aussi l'équation (1) se réduit à l'équation autonome $z''(t) + b_0 z + bz^{-3} = 0$ par une transformation $y = \left(-\frac{b_0}{b}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{y_1^2 - bw^{-2}y_2^2 z}$, $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\sqrt{-\frac{b_0}{b}(y_1^2 - bw^{-2}y_2^2)}}\, \mathrm{d}x$.

СССР, г. Куйбышев, 86,
Московское шоссе, 26, *кв.* 1